

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ  
FACULTAD DE CIENCIAS  
GRADO EN MATEMÁTICAS

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES  
DE OCEANOGRAFÍA Y MODELOS DE  
TSUNAMIS.

Trabajo de fin de grado presentado por

**Alicia Sánchez Rodríguez**

Tutor: José Rafael Rodríguez Galván

Firma de la alumna

Firma del tutor

Puerto Real, Cádiz, Septiembre de 2015



## Abstract

In this project we study the numerical resolution of the *Shallow Water* equations (also known as Saint-Venant equations). The starting point is the construction of this partial differential equations system. From the most basic laws of physics and by establishing some assumptions to simplify these equations, we end up with a scheme which will allow us to describe the ocean behavior in domains with relatively low depth.

In the second chapter we will describe the Finite Element Method which will serve us to approximate the system of equations that we obtained in the previous chapter.

As we are working with non-linear hyperbolic partial differential equations, the numerical resolution of these equations are not easy and we may observe some spurious oscillations in the results. In the third chapter we highlight these errors and at the same time we give some indications on how to avoid these non-desired results.

By going through our original problem, to solve the system of equations of *Shallow Water* using the Finite Element Method, the first step is to write the Variational Formulation of the problem. This is included in the fourth chapter.

Finally, in the fifth chapter, we show a series of results obtained applying the Finite Element Method with the software FreeFem++, and mentioning the results by using the chapter three conclusions.

As final conclusions we point out how we could obtain better models modifying some factors such as the bottom of the sea (make it non-constant) and at the same time, how to use other tools to make this a more direct application to the real world (use a real area of the Earth as domine).



## Resumen

En este proyecto se estudia la resolución numérica de las ecuaciones de *Shallow Water* (también conocidas como ecuaciones de aguas poco profundas o ecuaciones de Saint-Venant).

El punto de partida consiste en la construcción de este sistema de ecuaciones en derivadas parciales. A partir de leyes básicas de la física y estableciendo una serie de asunciones para simplificar las ecuaciones, llegamos al esquema que nos servirá para describir el comportamiento del océano en dominios cuya profundidad sea pequeña (en términos relativos).

En el segundo capítulo describimos el Método de los Elementos Finitos que nos servirá para aproximar el sistema de ecuaciones que obtuvimos en el capítulo anterior.

Al tratarse de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas y no lineales, la resolución numérica de éstas no es sencilla y se pueden observar oscilaciones espurias (no físicas) en los resultados. En el tercer capítulo resaltamos estos errores y a su vez damos algunas indicaciones para poder evitar estos resultados no deseados.

Entrando en el problema que proponemos, resolver el sistema de ecuaciones de *Shallow Water* mediante el Método de los Elementos Finitos, el primer paso es redactar la formulación variacional de nuestro problema. Dicha construcción se incluye en el capítulo 4.

Finalmente, en el capítulo 5, mostramos una serie de resultados obtenidos empleando el Método de los Elementos finitos con el software FreeFem++, comentando los resultados y haciendo uso de las conclusiones a las que llegamos en el capítulo 3.

Como líneas de trabajo (abordables a corto plazo) hacemos hincapié en cómo se podrían obtener modelos más fieles a la realidad modificando ciertos términos (por ejemplo haciendo no constante el fondo oceánico) y a su vez cómo el utilizar otra serie de herramientas podrían facilitar la aplicación más directa a casos reales (que el dominio sea una zona del planeta).

*A mi abuela, África López Dorado.*

## **Agradecimientos**

Gracias a mi tutor, José Rafael Rodríguez Galván por su ayuda y dedicación durante el desarrollo de este trabajo, pero sobre todo, por transmitirme la pasión e interés que él mismo tiene por las matemáticas y en particular el tema de este proyecto.





# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>1 Ecuaciones de <i>Shallow Water</i></b>	<b>5</b>
1.1 Introducción . . . . .	5
1.2 Ecuaciones de momentos . . . . .	5
1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes 3D . . . . .	7
1.4 Ecuaciones de Navier-Stokes Hidrostáticas . . . . .	8
1.5 Ecuaciones de <i>Shallow Water</i> . . . . .	10
<b>2 El Método de los Elementos Finitos</b>	<b>13</b>
2.1 Introducción . . . . .	13
2.2 Elementos matemáticos del Método de los Elementos Finitos . . . . .	13
2.2.1 Formulaciones Variacionales . . . . .	16
2.2.2 Teorema de Lax-Milgram . . . . .	16
2.2.3 El Método de Ritz-Garlekin . . . . .	17
2.3 El Método de los Elementos Finitos . . . . .	18
<b>3 Aproximación numérica de ecuaciones de convección-difusión</b>	<b>19</b>
3.1 Introducción . . . . .	19
3.2 Planteamiento del problema . . . . .	19
3.3 Ejemplo en 1 dimensión . . . . .	21
<b>4 Discretización del problema</b>	<b>23</b>
4.1 Las ecuaciones en el marco continuo . . . . .	23
4.2 Semidiscretización en tiempo . . . . .	24
4.2.1 Métodos de Euler . . . . .	25
4.2.2 Esquema de tipo Euler implícito . . . . .	25
4.2.3 Esquema de tipo Euler semi-implícito . . . . .	26
4.2.4 Un esquema semi-implícito y desacoplado . . . . .	26
4.3 Formulación variacional y discretización en espacio . . . . .	27
4.3.1 Condiciones de contorno . . . . .	27

## ÍNDICE GENERAL

---

4.3.2	Discretización mediante Elementos Finitos . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Resolución del Problema</b>	<b>31</b>
5.1	Introducción . . . . .	31
5.2	Modelo acoplado frente a modelo desacoplado . . . . .	31
5.3	Modelo no estabilizado frente a modelo con difusión artificial . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

# Introducción

Las ecuaciones que modelan la dinámica de fluidos describen el comportamiento de la atmósfera y del océano. Estas ecuaciones se pueden derivar de las leyes de conservación física (conservación de masa, momento, energía) y a su vez añadiendo factores que pueden influir, como la salinidad para el caso del océano o humedad y componentes contaminantes en el caso de la atmósfera.

Las ecuaciones básicas de conservación de masa y momentos, esto es, las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D, contienen demasiada información y no podemos esperar resolverlas numéricamente en dominios realistas y con la potencia del cálculo actual. Además, como muestra la complejidad de este problema, la existencia y unicidad de solución para estas ecuaciones (ecuaciones Navier-Stokes 3D) constituye uno de los problemas del milenio.

Debido a las diferencias entre las dimensiones horizontales y verticales tanto en el océano como en la atmósfera (por ejemplo de 10 a 20 kms frente a miles de kilómetros), la simplificación más natural nos lleva a las Ecuaciones Primitivas.

Por lo que conocemos, estas ecuaciones fueron introducidas por L. F. Richardson (1922); cuando todavía se veían como ecuaciones complejas, fueron dejadas de lado, y toda la atención se enfocó en modelos más simples: el Modelos Geostrofico y Quasi-Geostrofico, considerado a finales de 1940 por J. von Neumann y sus colaboradores, en especial J. G. Charney.

Con el incremento del uso y poder de la computación, el interés acabó volviendo hacia las ecuaciones Primitivas, las cuales constituyen la base de numerosos modelos como: Global Circulation Models (GCM) u Ocean Global Circulation Models (OGCM). La investigación sobre modelos no-hidrostáticos continúa y en este punto no hay un acuerdo sobre un modelo específico en la comunidad física.

A la hora de aproximar la soluciones de nuestro problema, utilizaremos el Método de los Elementos Finitos. Este algoritmo fue desarrollado para resolver problemas de ingeniería y física matemática (análisis estructural, transferencia de calor, transporte de masa, electromagnetismo,...)

En concreto, fue en principio desarrollado en 1943 por Richard Courant, quien uti-

## **INTRODUCCIÓN**

---

lizó el método de Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Poco después, un documento publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico. En la actualidad tiene aplicación en campos como la biomecánica, la geología y en lo que a este proyecto concierne, en la oceanografía.

# Objetivos

La idea de este proyecto es abordar los distintos pasos necesarios para la resolución numérica de un problema realista, formulado en términos de ecuaciones en derivadas parciales. Estos pasos comprenden la formulación matemática del problema (en este caso extraído del ámbito de oceanografía), el desarrollo de algoritmos numéricos junto una teoría matemática que garantice la aproximación de la solución exacta y la programación en el ordenador estos algoritmos para la extracción de conclusiones y el respaldo de los resultados teóricos.

Además, en este proyecto se trata de resaltar las complicaciones que aparecen cuando tratamos de resolver ecuaciones hiperbólicas y en particular, dar un enfoque físico a éstas partiendo de modelos oceanográficos.

En este caso, nos centramos en el modelo de *Shallow Waters* y entendemos los resultados y la resolución de los sistemas que obtenemos desde un punto de vista físico-oceánico y en concreto, con la posibilidad de ampliar el punto de vista práctico a la modelización de Tsunamis. El modelo quedará simplificado para facilitar la comprensión y la posterior resolución del problema aunque serán abordadas las dificultades esenciales (carácter hiperbólico y no linealidad).

Así mismo, otra de las ideas de este texto era realizar una construcción no rigurosa del modelo físico nombrando y describiendo brevemente los pasos que nos llevan al sistema de ecuaciones en derivadas parciales con el que finalmente trabajamos. Aunque no detallamos de forma extensa cada uno de los pasos y resultados que obtendremos, esta sección facilitará la comprensión de cada uno de los términos de las ecuaciones desde un punto de vista físico y las asunciones que hemos tomado en cada uno de los pasos para continuar la construcción.

En general, pretendemos unir las perspectivas física, matemática y aplicaciones a modo de simulaciones para tratar el tema de los modelos matemáticos de la física oceánica.

En numerosas ocasiones, los requerimientos de espacio y las características de un trabajo tan ambicioso como el actual han hecho imposible el plantearse como objetivo un desarrollo más detallado de aspectos teóricos. En estos casos, se ha optado por referenciar bibliografía adecuada.



# Ecuaciones de *Shallow Water*

## 1.1 Introducción

La idea principal de esta primera sección es realizar una construcción no rigurosa, a partir de las leyes de la Física, de las ecuaciones con las que vamos a trabajar. La deducción detallada de dichas ecuaciones desde el punto de vista de la Física oceanográfica puede encontrarse en [1, 2].

Debido a la complejidad de estas leyes físicas y para llegar a modelos que sean sencillos y puedan ser tratados con los recursos computacionales actuales, es necesario introducir numerosas hipótesis que las simplifiquen, y que irán siendo detalladas.

## 1.2 Ecuaciones de momentos

Comenzando con la Segunda Ley de Newton, dado un sistema que se encuentra en movimiento al que le aplicamos una fuerza, ésta modificará el estado de movimiento. La aceleración que se produce es directamente proporcional a la fuerza neta aplicada. De forma muy simple, esto es:

$$F = m \cdot a,$$

donde  $m$  representa la masa del sistema afectado por la fuerza neta  $F$  y  $a$  es la aceleración que adquiere dicho sistema.

Veamos cómo la expresión anterior puede ser desglosada y de qué forma irán apareciendo finalmente las ecuaciones.

En primer lugar, en las ecuaciones de *Shallow Water*, la masa viene dada en función de una nueva variable  $\rho$ , la densidad. Concretamente,

$$m = \int_V \rho,$$

## 1. ECUACIONES DE *SHALLOW WATER*

---

donde, como en toda esta sección, no se precisa formalmente el sentido (por ejemplo Lebesgue) de la integral.

La primera hipótesis que estableceremos será que  $\rho$  sea constante. En este caso es sencillo ver que queda

$$m = \rho|V|,$$

donde  $|V| = \int_V 1$  denota a la medida de  $V$ , o equivalentemente,

$$\rho = \frac{m}{|V|}.$$

En las fórmulas anteriores  $V \subset \mathbb{R}^n$  representa el volumen y  $m$  la masa del fluido.

Pasemos al término de la aceleración. Entendemos la aceleración como variación de la velocidad en un intervalo de tiempo. Aquí aparecerá expresada como derivada total del vector velocidad  $\vec{u}$ .

El vector  $\vec{u}$  será considerado como un campo vectorial tridimensional que depende, además del tiempo  $t$ , de las variables  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , correspondientes a la posición de una partícula en el instante de tiempo  $t$ . Si  $(u, v, w)$  son las componentes de  $\vec{u}$ , entonces,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t), z(t), t) \\ v(x(t), y(t), z(t), t) \\ w(x(t), y(t), z(t), t) \end{pmatrix},$$

y su derivada tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} D_t \vec{u}(t) &= \begin{pmatrix} x'(t)\partial_x u + y'(t)\partial_y u + z'(t)\partial_z u + \partial_t u \\ x'(t)\partial_x v + y'(t)\partial_y v + z'(t)\partial_z v + \partial_t v \\ x'(t)\partial_x w + y'(t)\partial_y w + z'(t)\partial_z w + \partial_t w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u + \partial_t u \\ u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v + \partial_t v \\ u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w + \partial_t w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad se ha obtenido teniendo en cuenta que  $x'(t) = u$ ,  $y'(t) = v$  y  $z'(t) = w$ . En lo anterior y siempre que no haya ambigüedad, denotamos  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  y  $\partial_z$  a las respectivas derivadas parciales.

Utilizando lo anterior podemos escribir la Segunda Ley de Newton como:

$$F = m \cdot a = \begin{pmatrix} \rho(u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u) + \rho\partial_t u \\ \rho(u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v) + \rho\partial_t v \\ \rho(u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w) + \rho\partial_t w \end{pmatrix}.$$

Con  $\rho$  densidad constante y  $F$  la suma de fuerzas que actúan sobre el sistema (sobre el fluido en nuestro caso). Nos centraremos en dos tipos:

- Fuerzas provenientes de la variación de presión. La expresión correspondiente sería el gradiente del campo escalar  $p$ :

$$-\nabla p = \begin{pmatrix} -\partial_x p \\ -\partial_y p \\ -\partial_z p \end{pmatrix},$$



donde el signo negativo se debe a las variaciones de altas a bajas presiones.

- Fuerzas derivadas de la viscosidad consecuencia del rozamiento entre partículas, que pueden escribirse así:

$$\mu \cdot \Delta u = \begin{pmatrix} \mu(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) \\ \mu(\partial_x^2 v + \partial_y^2 v + \partial_z^2 v) \\ \mu(\partial_x^2 w + \partial_y^2 w + \partial_z^2 w) \end{pmatrix},$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica [1, 2].

En este punto estamos ignorando la rotación de la Tierra y por tanto la Fuerza de Coriolis que también actuaría sobre el fluido. Esta fuerza sólo afecta en los ejes vertical y horizontal del sistema de referencia que estamos considerando, por lo que sólo se verán involucradas las componentes  $u$  y  $v$  de la velocidad. Esta restricción no es fundamental y en caso de querer incluirla en algún punto simplemente añadiríamos los factores  $-fu$  y  $fv$  en la primera y segunda ecuación respectivamente, donde  $f$  es una constante que depende de la latitud [1, 2].

Las ecuaciones nos quedan finalmente expresadas de forma vectorial:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} = (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \partial_t \vec{u}, \quad (1.1)$$

donde  $(\vec{u} \nabla)$  denota al operador  $u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z$ .

Estas son las llamadas ecuaciones de momentos. En este punto sólo estamos a un paso de llegar a las famosas ecuaciones de Navier-Stokes 3D.

### 1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes 3D

Con las ecuaciones de momentos contamos con 4 incógnitas ( $u, v, w, p$ ) y 3 ecuaciones (1.1). Necesitamos una ecuación más para cerrar el sistema.

El siguiente paso consiste en tener en cuenta la conservación de masa en el curso del tiempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV = 0.$$

Por el Teorema del Transporte de Reynolds y aplicando el Teorema de la Divergencia (ver Teoremas 2 y 3) se tiene:

$$\int_{CV} \partial_t \rho dV + \int_{CV} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dV = 0,$$

o equivalentemente,

$$\int_{CV} (\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u})) dV = 0.$$

Y por tanto,

## 1. ECUACIONES DE *SHALLOW WATER*

---

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

Como en nuestro caso  $\rho$  es constante,  $\partial_t \rho = 0$  y además  $\nabla \cdot \rho \vec{u} = \rho \nabla \cdot \vec{u}$ . Queda, de esta forma,

$$0 + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Y esta es la llamada Ecuación de Incompresibilidad:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Usando esta última ecuación junto a (1.1) llegamos las ecuaciones de Navier Stokes 3D.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} = (\vec{u} \nabla) \vec{u} + \partial_t \vec{u}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.3)$$

### 1.4 Ecuaciones de Navier-Stokes Hidrostáticas

En la siguiente transformación de las anteriores ecuaciones, llegaremos a las ecuaciones Primitivas del océano o ecuaciones de Navier-Stokes Hidrostáticas.

Para esto utilizamos la Hipótesis Hidrostática, según la cual la ecuación de momentos vertical se reduce a

$$\partial_z p = -\rho g.$$

La interpretación física de la expresión anterior afirmarí que la presión en dirección vertical en un punto depende de la columna de agua existente sobre dicho punto.

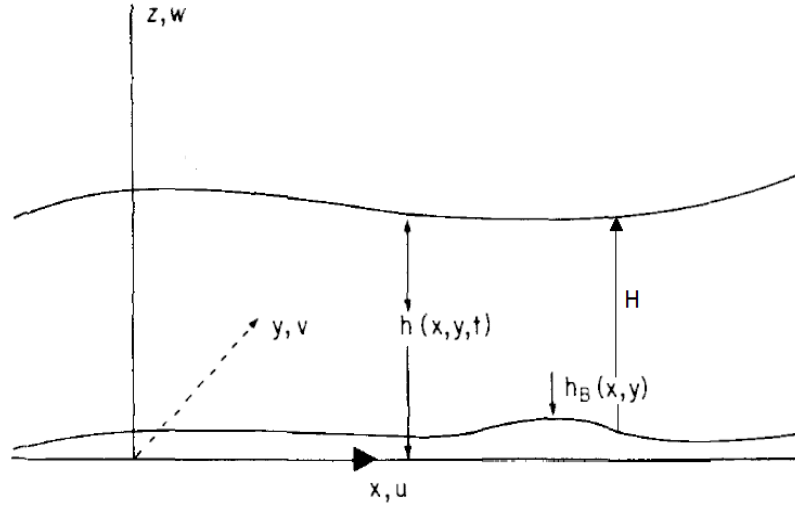
Integrando esto en  $z$  queda

$$p = -\rho g z + C,$$

que es la expresión de la presión, donde  $g$  es la constante gravitatoria y  $C$  la constante de integración (por determinar).

A continuación utilizaremos la notación que aparece en [1] para describir la superficie del océano con la función  $h$ . La siguiente imagen puede servir para familiarizarnos con dicha notación:

## 1.4 Ecuaciones de Navier-Stokes Hidrostáticas



Vamos a suponer que  $p$  es constante en la superficie  $z = h(x, y)$ , es decir,  $p(x, y, h) = p_0$ , de donde  $p_0 = -\rho gh + C$  y por tanto  $C = p_0 + \rho gh$ . Queda entonces:

$$p = p_0 + \rho g(h - z).$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, las Ecuaciones de Navier-Stokes (1.2),(1.3) se transforman en:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u &= \frac{1}{\rho}\partial_x p + \frac{\mu}{\rho}\Delta u, \\ \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v &= \frac{1}{\rho}\partial_y p + \frac{\mu}{\rho}\Delta v, \\ -\rho g &= \partial_z p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

conocidas como ecuaciones Primitivas del Océano o ecuaciones de Navier-Stokes Hidrostáticas. En este punto es usual, en la literatura sobre oceanografía ([1, 2]), considerar fluidos con viscosidad despreciable. Además:

$$\partial_x p = \partial_x(p_0 + \rho g(h - z)) = \rho g\partial_x h, \tag{1.4}$$

$$\partial_y p = \rho g\partial_y h. \tag{1.5}$$

Quedando:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u &= g\partial_x h, \\ \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v &= g\partial_y h, \\ -\rho g &= \partial_z p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

## 1. ECUACIONES DE *SHALLOW WATER*

---

### 1.5 Ecuaciones de *Shallow Water*

En esta sección, introduciremos el modelo *Shallow Water* descrito en [1, 2]. Existen modelos más generales y complejos en los que  $u$  y  $v$  son integrados en profundidad ver [3, 4]. De (1.4) y (1.5) podemos concluir que las aceleraciones horizontales (debidas a la presión) no dependen de  $z$ . Por tanto, tiene sentido (físicamente) asumir la hipótesis de que las componentes horizontales de la velocidad tampoco dependen de  $z$ . Así, integrando en  $z$  la ecuación  $\nabla \cdot u = 0$  queda:

$$\int (\nabla \cdot u) dz = \int (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) dz = z(\partial_x u + \partial_y v) + w - C = 0,$$

donde  $C = \tilde{w}(x, y, t)$  es independiente de  $z$ .

Por tanto

$$w(x, y, z, t) = -z(\partial_x u + \partial_y v) + \tilde{w}(x, y, t).$$

La condición de que no hay corriente normal en la superficie  $z = h_b$  supone:

$$w(x, y, h_b, t) = u\partial_x h_b + v\partial_y h_b.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{w}(x, y, t) = u\partial_x h_b + v\partial_y h_b + h_b(\partial_x u + \partial_y v),$$

tal que:

$$w(x, y, z, t) = (h_b - z)(\partial_x u + \partial_y v) + u\partial_x h_b + v\partial_y h_b, \quad (1.6)$$

La condición cinemática en en la superficie  $z = h$  es,

$$w(x, y, z, t) = \partial_t h + u\partial_x h + v\partial_y h,$$

que junto a (1.6) resulta:

$$\partial_t h + \partial_x((h - h_b)u) + \partial_y((h - h_b)v) = 0.$$

Definimos la profundidad total como

$$H = h - h_b,$$

la ecuación de conservación de masa queda:

$$\partial_t H + \partial_x(uH) + \partial_y(vH) = 0.$$

Finalmente las ecuaciones de *Shallow Water* son:

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - fv = -g\partial_x(H + h_b), \quad (1.7)$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + fu = -g\partial_y(H + h_b), \quad (1.8)$$

$$\partial_t H + \partial_x(uH) + \partial_y(vH) = 0. \quad (1.9)$$

Donde  $H = h - h_b$  o equivalentemente  $h = H + h_b$ , y en (1.7) y (1.8) se ha aplicado que  $w\partial_z u = 0$  y  $w\partial_z v = 0$ , ya que  $u$  y  $v$  no dependen de  $z$ .

Hemos conseguido 3 ecuaciones con 3 nuevas incógnitas  $H, u$  y  $v$ , reduciendo el número de variables dependientes e independientes. Para que el problema anterior esté bien planteado en el sentido de la existencia y unicidad de la solución, es necesario introducir unas determinadas condiciones iniciales junto a condiciones de contorno adecuadas. Reservamos la definición precisa de dichas condiciones para el capítulo 5.



# El Método de los Elementos Finitos

## 2.1 Introducción

En esta sección describiremos brevemente el método que utilizaremos para aproximar en el espacio la solución de nuestro sistema de ecuaciones, el Método de los Elementos Finitos. Puede encontrarse un estudio detallado en [5]. Como introducción son interesantes los manuales [6, 7].

La idea general de dicho método es dividir el dominio en regiones más pequeñas y solucionar el problema en estas subdivisiones con ecuaciones más sencillas. Uniendo los resultados locales obtendremos un sistema de ecuaciones cuya solución es la aproximación buscada del problema inicial.

## 2.2 Elementos matemáticos del Método de los Elementos Finitos

En primer lugar describiremos algunos elementos matemáticos que intervienen en la formulación del Método de los Elementos Finitos.

### Espacios $L^p$

Comenzaremos presentando los espacios  $L^p$ . Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto (en la práctica  $n = 1, 2, 3$ ), el espacio de funciones  $p$ -integrables en  $\Omega$  se define para cada  $p \geq 1$  como:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \int_{\Omega} |f|^p dx < +\infty \right\},$$

## 2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

---

donde la integral anterior debe entenderse en el sentido de Lebesgue. Se puede demostrar [8] que  $L^p(\Omega)$  es un espacio vectorial y, más aún, es un espacio normado para la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left[ \int_{\Omega} |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Para  $p = +\infty$ , definimos

$$L^{+\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \exists c > 0, |f(x)| \leq c \text{ casi por doquier, } x \in \Omega\}.$$

Además,

$$L^{+\infty}(\Omega) \text{ es un espacio normado para } \|f\|_{L^{+\infty}(\Omega)} = \inf \{c : |f(x)| \leq c \text{ casi por doquier, } x \in \Omega\}.$$

### Derivada débil

Para ilustrar este concepto vamos a partir del siguiente ejemplo:

Sea  $\Omega = (0, 1)$ . Se define el problema:

$$\begin{cases} [u'(x)]^2 = 1 & \forall x \in \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Con solución:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 - x & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

que es derivable en todo  $\Omega$  menos en  $x = \{\frac{1}{2}\}$ . Sabemos que  $\{\frac{1}{2}\}$  es un conjunto de medida nula en  $\Omega$  y a la vez podemos decir que  $u(x)$  no es derivable en el sentido clásico. En este caso, aunque no podamos decir que sea derivable, hablamos de derivada débil y de ser derivable en sentido débil.

Para desarrollar y entender este concepto es necesario contar con el concepto de las funciones test. Definimos el conjunto:

$$D(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(v) \text{ es compacto contenido en } \Omega\}.$$

Decimos que  $g$  es la derivada débil de  $f$  cuando:

$$\int_{\Omega} gv = - \int_{\Omega} f \cdot v' dx \quad \forall v \in D(\Omega). \quad (2.1)$$

Véase que si  $f$  es derivable y  $g = f'$  es su derivada en sentido clásico, entonces  $g$  también es su derivada en sentido débil. En efecto, partiendo de la suposición de que  $f$  sea derivable y habiendo definido  $g = f'$ , por la fórmula de integración por partes se tiene  $\forall v \in D(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} gv' = fv|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} f v' = - \int_{\Omega} f v',$$



teniendo en cuenta que en la última igualdad se ha utilizado  $v = 0$  en  $\partial\Omega$  (por ser  $v \in D(\Omega)$ ). Además tiene sentido plantear (2.1), es decir, el concepto de derivada débil, aunque  $f$  no sea continua. Basta que tengan sentido las integrales en (2.1).

Podemos extender este concepto a cualquier número de variables. Es decir, decimos que una función  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en sentido débil cuando:

$$\int_{\Omega} f \partial^{\alpha} v = - \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f v,$$

con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   $\alpha_i \in \mathbb{N}$   $i = 1, \dots, n$ . Donde se define  $\partial^{\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$  y  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

### Espacios de Sobolev

Continuamos con los llamados Espacios de Sobolev, de los que realizaremos sólo una breve introducción no rigurosa. Su estudio detallada queda fuera de las pretensiones de este trabajo, véase por ejemplo [8]. Se trata de una extensión de los anteriormente mencionados espacios  $L^p(\Omega)$ :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega)\},$$

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{con } |\alpha| < m.$$

Los espacios  $L^p(\Omega)$  y  $W^{m,p}$  son espacios normados. En el caso de que  $p = 2$  y  $m = 1$ , denotamos  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ . En particular  $H^1(\Omega)$  es un Espacio de Hilbert, lo que significa que:

- Está dotado de un producto escalar. En concreto,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{du}{dx_i} \frac{dv}{dx_i}.$$

- Es un Espacio de Banach completo para la norma que induce el producto escalar [9].

Otra herramienta que utilizaremos será el Teorema de Green (Fórmula de integración por partes) en sentido débil. Esto es (suponiendo  $u$  y  $v$  suficientemente regulares):

$$\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v) = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} v - \int_{\Omega} \Delta u v,$$

donde  $\partial_n u = \nabla \cdot n$  y  $\Delta u = \sum_i \frac{d^2 u}{dx_i^2}$ .

## 2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

---

### 2.2.1 Formulaciones Variacionales

El uso del concepto "derivada débil" hace que ecuaciones en derivadas parciales puedan reescribirse de una forma particular a la que llamaremos Formulación Variacional. A continuación mostramos un ejemplo simple a modo de ilustración.

Problema de Poisson con condiciones Dirichlet Homogéneas:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

considerando  $v$  todo lo regular que queramos y que cumpla  $v = 0$  en  $\partial\Omega$ , por ejemplo  $v \in D(\Omega)$  e integrando queda:

$$\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v) - \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} v = - \int_{\Omega} (\Delta u)v = \int_{\Omega} f v,$$

y como  $v = 0$  en  $\partial\Omega$ ,  $\int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} v = 0$  y la formulación débil quedaría:

$$\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v) = - \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in D(\Omega).$$

Por tanto, llamando  $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v)$  y  $L(v) = - \int_{\Omega} f v$ , el problema se reduce a hallar  $u \in V$  tal que:

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

Sin embargo, para que la expresión anterior tenga sentido, no es necesario que  $u$  y  $v$  sean derivables en el sentido clásico. Bastará pedir que  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  y  $f \in L^2(\Omega)$ , donde

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) | f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

(el sentido de  $u|_{\partial\Omega}$  habría que definirlo con rigor; ver [8]).

Con estas formulaciones permitimos a funciones que cumplen menos exigencias ser solución de nuestros problemas. No obstante, se puede demostrar que si la solución del problema variacional tiene la regularidad esperada para la ecuación original, se trata de la solución clásica del mismo.

Pasaremos a presentar algunos resultados en los que se fundamenta la teoría matemática que serán utilizados en el algoritmo en cuestión, el Método de los Elementos Finitos.

### 2.2.2 Teorema de Lax-Milgram

Sea  $V$  un espacio de Hilbert,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal y  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma lineal. Decimos que

$a$  es continua si  $|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$  (para algún  $\beta \in \mathbb{R}$ ).

$a$  es coerciva si  $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$a$  es simétrica si  $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$ .

## 2.2 Elementos matemáticos del Método de los Elementos Finitos

$L$  es continua si  $|L(v)| \leq \gamma \|v\|_V \quad \forall v \in V$ , con  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1** (Teorema de Lax-Milgram). Dado un espacio de Hilbert  $V$ , una función continua y coerciva bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  y una forma  $F$  lineal y continua, existe un único  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Para la demostración ver [[5], Teorema 2.7.7]. Por ejemplo, aunque no entraremos en detalles, se puede demostrar que para  $V = H_0^1(\Omega)$  el problema (2.2) cumple las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram y por ello, existe un único  $u \in H_0^1(\Omega)$ , que es solución débil del problema de Poisson.

### 2.2.3 El Método de Ritz-Garlekin

La idea general del método es construir espacios vectoriales de dimensión finita  $V_h \subseteq V$  y restringir el Problema Variacional (PV) al marco discreto.

Como  $V_h$  tiene dimensión finita podemos asegurar que existe una base de funciones  $\{\phi_i\}_i^N$  donde  $N = \dim(V_h)$ . Además, como  $u_h \in V_h$ , existen coordenadas  $\alpha_{i=1}^N$  tales que  $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i$ . El problema se traduce a hallar  $u \in V_h$  tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h.$$

Buscamos entonces  $u$  tal que

$$a\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \phi_j\right) = L(\phi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

y por linealidad,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

Matricialmente sería hallar  $X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  tal que

$$KX = G,$$

donde  $K = (a(\phi_i, \phi_j))_{i,j=1}^N$  y  $G = (L(\phi_j))_{j=1}^N$ .

La solución del anterior sistema depende de la base utilizada. Escogiéndola de forma adecuada obtendremos un sistema más sencillo. Y esto último es el fundamento del Método de los Elementos Finitos.

## 2. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

---

### 2.3 El Método de los Elementos Finitos

Con el Método de Elementos Finitos estamos aplicando el Método de Ritz-Galerkin usando como base de los espacios  $V_h$  funciones continuas, polinomiales a trozos y con soporte pequeño.

Sin entrar en detalles (puede consultarse cualquier referencia sobre el asunto, por ejemplo [5, 10]), para definir el espacio  $V_h$ , se siguen los siguientes pasos:

#### Paso 1.

Realizamos un mallado del dominio  $\Omega$  considerando una triangulación  $\tau_h = \{T_j\}_j$  en dicho dominio tal que  $\cup_j T_j = \overline{\Omega}$ . Es decir, hemos construido una división de  $\Omega$  en polígonos en el caso 2D o poliedros en el caso 3D (por ejemplo triángulos o tetraedros), llamados elementos.

#### Paso 2.

Consideramos para  $k \geq 1$  el espacio de funciones polinómicas a trozos

$$X_h = \{v \in C^0(\Omega) : v|_{T_i} \in \mathbb{P}_k\}. \quad (2.3)$$

Donde  $\mathbb{P}_k$  son los polinomios de grado  $k$  en  $n$  variables. Se puede demostrar que  $X_h \subset H^1(\Omega)$ .

#### Paso 3.

Para definir una base para  $X_h$  escogemos nodos  $N_i$  que permiten la unisolvencia, es decir, que las funciones de la base  $\phi_i$  estén unívocamente determinadas en los nodos. Por ejemplo, para  $k = 1$  (polinomios de grado 1)  $N_i$  puede coincidir con los vértices de la triangulación.

Así, se define el número de grados de libertad del elemento finito como el número de datos a suministrar para definir de forma única las funciones base sobre un elemento. Y se define la base  $\phi_i \in X_h$  tales que  $\phi_i(N_j) = \delta_{ij}$  con:

$$\phi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Para estas funciones la matriz  $K$  tiene muchos 0 porque los  $\phi_i$  se anulan en todo nodo sin contacto con  $N_i$  (soporte pequeño).

Para muchos problemas escritos en términos de EDPs (por ejemplo para (2.1)) se puede demostrar que cuando el número de grados de libertad tiende a  $\infty$ , o equivalentemente, cuando  $h \rightarrow 0$ , siendo  $h$  el máximo diámetro de la triangulación, la solución aproximada obtenida mediante el Método de los Elementos Finitos converge a la solución exacta del problema variacional. Ver [5] para detalles sobre este asunto.

# Aproximación numérica de ecuaciones de convección-difusión

## 3.1 Introducción

Antes de abordar el diseño de esquemas discretos (capítulo 4) y de su implementación en el ordenador en capítulo 5, nos ocuparemos de prever los problemas que, previsiblemente, aparecerán al aplicar el Método de los Elementos Finitos a las ecuaciones de *Shallow Water*.

Para ello, nos será útil estudiar en este capítulo unas ecuaciones más sencillas (las ecuaciones de convección-difusión) en las que cuando desaparece el término difusivo, comparten con las ecuaciones de *Shallow Water* la problemática asociado a su carácter hiperbólico (ver [11] para la clasificación de EDPs).

## 3.2 Planteamiento del problema

Si recordamos cómo quedaron finalmente las ecuaciones de *Shallow Water* (1.6)-(1.8), puede advertirse el caso en el que nos encontramos. Se trata de un sistema de ecuaciones no lineales (en el capítulo 4 se introducirán métodos numéricos para la no-linealidad) y de primer orden, pues no aparecen términos con derivada segunda (términos difusivos).

Estudiamos a continuación la aproximación numérica de unas ecuaciones más sencillas: las ecuaciones de convección-difusión. El motivo de tomarlas como modelo es que, cuando 'desaparecen' los términos difusivos, son de tipo hiperbólico [11] y comparten algunas características de las ecuaciones de *Shallow Water*.

En general, para definir las ecuaciones en derivadas parciales de convección-difusión,

### 3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

---

podríamos considerar el operador lineal:

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^d D_i(a_{ij}D_ju) + \sum_{i,j=1}^d D_i(a_{ij}D_ju) + \sum_{i=1}^d D_i(b_iu) + a_0u.$$

Pero por simplicidad tomaremos,

$$a_{ij} = \begin{cases} A & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Para  $A \in \mathbb{R}$ . De esta forma queda:

$$Lu := -A\Delta u + B\nabla u + a_0u, \quad (3.1)$$

con  $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Si consideramos la condición de contorno  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ , es fácil (procediendo como en la sección 2.2.1) obtener la formulación variacional del problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Concretamente, multiplicando por  $v \in V := H_0^1(\Omega)$  e integrando en  $\Omega$  tenemos:

$$a(u, v) := \int_{\Omega} (Lu)v = -A \int_{\Omega} \Delta uv + \int_{\Omega} B(\nabla u)v + a_0 \int_{\Omega} uv \quad \forall u, v \in V.$$

Ahora, integrando por partes,

$$A \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} (B\nabla v)u + a_0 \int_{\Omega} uv - A \int_{\delta\Omega} (\nabla \cdot un)v + A \sum_{i=1}^n \int_{\delta\Omega} b_i uv,$$

y como  $\int_{\delta\Omega} (\nabla \cdot un)v = 0$  y  $\int_{\delta\Omega} uv = 0$  (porque  $v = 0$  en  $\delta\Omega$ ), queda finalmente:

$$a(u, v) = A \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} (B\nabla v)u + a_0 \int_{\Omega} uv.$$

A esta última expresión la llamamos forma bilineal asociada a (3.1). Esta forma es continua y coerciva (ver [12], sección 6.1.2), por lo que según el Teorema de Lax Milgram el siguiente problema:

Hallar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = F(v)$$

$$\forall v \in V,$$

está bien planteado y por lo tanto existe una solución única.

Ahora bien, a la hora de aproximar la solución  $u$ , el Método de Galerkin puede presentar un comportamiento no deseado en su solución cuando, en (3.1)  $\frac{|A|}{|B|} \ll 1$ , es decir, el término de primer orden (término de advección o de convección) es relativamente alto respecto al término de segundo orden (conocido como de viscosidad o difusivo). Estos inconvenientes se verán cuando apliquemos el Método de los Elementos Finitos para resolver las ecuaciones de *Shallow Water*, pero es conveniente anticipar en este punto dónde van a presentarse estos problemas y los posibles intentos que podemos llevar a cabo para solucionarlos.

### 3.3 Ejemplo en 1 dimensión

Para ilustrar lo anterior, consideremos el problema modelo en  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} -\epsilon D^2 u + bDu = 0 & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = 0 \text{ y } u(1) = 1, \end{cases}$$

con  $\epsilon > 0$  y  $b > 0$ .

Es fácil comprobar, mediante derivación directa que la solución de este problema es

$$u(x) = ((e^{\frac{b}{\epsilon}} - 1)^{-1})(e^{\frac{bx}{\epsilon}} - 1).$$

Para aproximar dicha solución, como ya sabemos, utilizaremos el Método los Elementos Finitos con funciones  $\mathbb{P}_1$  sobre un mallado uniforme del dominio  $\Omega = (0, 1)$ . Comenzamos por elegir un valor  $M$  positivo y entero y definimos  $h = \frac{1}{M}$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, M$ . En el siguiente paso aproximamos el problema no-homogéneo de Dirichlet anterior tomando  $V_h = X_h \cap H_0^1(0, 1)$  y  $V_h^* = \{v_h \in X_h | v_h(0) = 0, v_h(1) = 1\}$  con  $X_h$ , el espacio de funciones polinomiales a trozos definido en (2.3) (para  $k = 1$ ). Así, el Método de los Elementos Finitos (Método de Galerkin) nos lleva a un sistema de la forma (ver [[12], sección 8.2.1]):

$$A \cdot \chi = F$$

Donde

$$A := \text{tridiag}\left(\frac{-\epsilon}{h} - \frac{b}{2}, \frac{2\epsilon}{h}, \frac{-\epsilon}{h} + \frac{b}{2}\right)$$

$$F := (0, \dots, 0, \frac{\epsilon}{h} - \frac{b}{2})$$

$$\chi := \{u_h(x_j)\}_{j=1, \dots, M-1}$$

Asumiendo  $2\epsilon \neq bh$ , la solución del sistema anterior queda:

### 3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

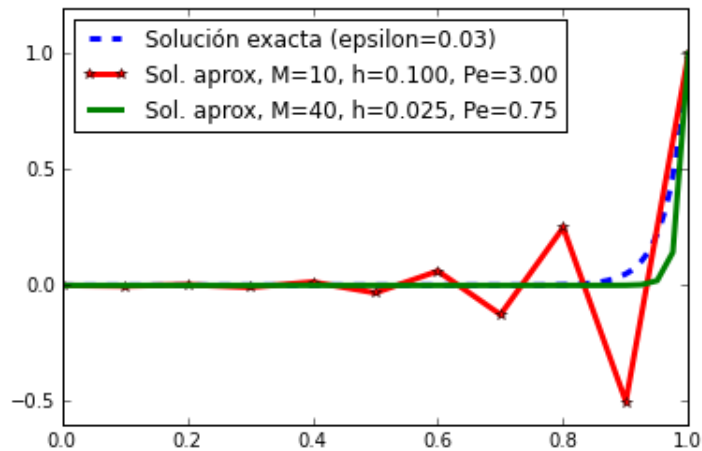
---

$$\chi_j = u_h(x_j) = \frac{\left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^j - 1}{\left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^M - 1}$$

Con  $j = 1, \dots, M - 1$  y  $P_e := \frac{bh}{2\epsilon}$  que es conocido como el número de Péclet. Estudiando dicho valor podemos decir que si  $P_e > 1$  entonces  $\frac{1+P_e}{1-P_e} < 0$  y por tanto la solución  $u_h$  presentará un comportamiento oscilatorio. Fijando  $\epsilon$  y  $b$  en principio es posible siempre elegir el tamaño de  $h$  suficientemente pequeño de forma que  $P_e < 1$  y por tanto evitando las oscilaciones. Sin embargo, no es práctico tomar un valor de  $h$  muy pequeño ya que obtendríamos sistemas lineales con demasiadas incógnitas.

En los casos en los que  $\epsilon$  sea muy pequeño respecto a  $b$  (es decir, casos en los que 'desaparecen los términos difusivos' no será posible en la práctica tomar  $h$  suficientemente pequeñas y aparecerán oscilaciones empíricas (no físicas) en la solución obtenida mediante el Método de los Elementos Finitos.

En la siguiente figura observamos la solución exacta del ejemplo anterior, así como dos aproximaciones con distintos valores para  $M$ ,  $h$  y  $P_e$ . Se observa claramente la existencia de una capa límite ('boundary layer') en  $x = 1$ , es decir, a medida que  $\epsilon$  tiende a 0 (en este caso  $\epsilon$  tiene un valor relativamente bajo), la pendiente de la función tiende a  $\infty$ . [El código empleado queda recogido en el Apéndice].



En este punto podemos conjeturar que las ecuaciones de *Shallow Water* podrían presentar oscilaciones si tratamos de resolverlas numéricamente, salvo si tomamos una talla de discretización pequeña o si aplicamos métodos numéricos específicos llamados métodos de estabilización, para evitarlo. Estos métodos que programaremos (capítulo 5) pueden ser entendidos como una forma de incrementar el coeficiente de difusión  $\epsilon$  (para hacer  $P_e < 1$  y que desaparezcan las oscilaciones). Este factor actuará de forma consistente, en el sentido de que la difusión artificial introducida desaparece cuando  $h \rightarrow 0$ .



## Discretización del problema

En esta sección discretizaremos el problema (1.7)-(1.9) mediante esquemas de Euler y el Método de los Elementos Finitos que ya presentamos en el capítulo 2.

### 4.1 Las ecuaciones en el marco continuo

Consideramos un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Planteamos las ecuaciones, que ya fueron introducidas desde el punto de vista de la física oceanográfica en el capítulo 1: hallar el campo horizontal de velocidades  $(u, v) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  y la elevación del agua,  $H : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que:

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u + g \partial_x H = -g \partial_x h_B \quad \text{en } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v + g \partial_y H = -g \partial_y h_B \quad \text{en } \Omega, \quad (4.2)$$

$$\partial_t H + \partial_x(uH) + \partial_y(vH) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (4.3)$$

donde  $g$  representa a la fuerza de la gravedad y  $h_B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que representa al fondo. Por simplicidad, supondremos  $h_B \in C^1(\Omega)$ . Como todo sistema de EDP, estas ecuaciones deben ser completadas con condiciones iniciales y condiciones de contorno adecuadas.

Se trata de un sistema de tres EDP (evolutivas, no lineales y tipo hiperbólico) cuyo estudio teórico no es sencillo, pues requiere amplios conocimientos de espacios de Sobolev vectoriales y en general de teoría de análisis funcional, y excede las pretensiones del trabajo actual. De hecho, el análisis teórico y numérico de modelos relacionados con las ecuaciones de tipo *Shallow Water* constituye un campo de investigación de gran actualidad [13],[14].

Por tanto, asumiremos la existencia y unicidad de solución del sistema (4.1)–(4.3), en un sentido débil que no precisaremos. En lugar de ello, para fijar ideas, supondremos la

## 4. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

---

siguiente regularidad para la solución:

$$u, v, H \in C^0(H^1(\Omega)), \quad (4.4)$$

donde, para cualquier espacio de Hilbert  $H$  (por ejemplo,  $H = H^1(\Omega)$  o  $H = L^2(\Omega)$ ) denotamos  $C^l(H) = C^l([0, T]; V)$  al conjunto de las funciones  $\phi : [0, T] \rightarrow H$  que son  $l$  veces derivables con continuidad<sup>1</sup>.

Dedicaremos las siguientes secciones a explorar distintas posibilidades para la discretización de las ecuaciones, es decir para el planteamiento de problemas finito-dimensionales (problemas discretos) que nos permitan crear programas de ordenador para aproximar la solución de las ecuaciones (4.1)–(4.3), mediante el Método de los Elementos Finitos. Aunque el análisis de existencia y unicidad de estos problemas discretos tampoco es sencillo, intentaremos esbozar las líneas para el buen planteamiento de los esquemas resultantes.

En sistemas EDP de tipo evolutivo se suelen realizar dos etapas diferentes en la discretización del problema, distinguiendo entre las variables temporales y las espaciales. Así, en una primera etapa procederemos a la semi-discretización en tiempo de las ecuaciones, o sea plantearemos esquemas numéricos que afectan solamente a la variable temporal. Posteriormente, se procederá a la discretización de las variables espaciales (mediante el Método de los Elementos Finitos).

### 4.2 Semidiscretización en tiempo

A partir de ahora, denotaremos

$$V = H^1(\Omega).$$

Dado  $N \in \mathbb{N}$ , consideremos una partición uniforme el intervalo temporal  $[0, T]$  en  $N$  subintervalos de tamaño  $k = T/N$ . Para cada  $m = 0, \dots, N$  denotaremos  $t^m = k \cdot m$  al instante de tiempo correspondiente a la etapa  $m$ . Debido a la asunción (4.4), para cada  $m$  tiene sentido considerar los valores

$$u(t^m), v(t^m), H(t^m),$$

y éstos que son funciones de  $V$ .

Supongamos dada una condición inicial para (4.1)–(4.3),

$$u(t^0) = u_0, \quad v(t^0) = v_0 \quad H(t^0) = H_0,$$

donde  $u_0, v_0, H_0 \in V$  son funciones dadas.

---

<sup>1</sup>El concepto de derivación sobre espacios normados puede consultarse en cualquier referencia de análisis funcional, por ejemplo [8]

### 4.2.1 Métodos de Euler

Recordemos que, dado un problema de valor inicial para una ecuación diferencial,

$$\frac{du}{dt} + f(t, u) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad (4.5)$$

el método de *Euler implícito* puede definirse a través una aproximación de  $du/dt$  dada, en la etapa  $m + 1$ , por el cociente incremental  $(u^{m+1} - u^m)/k$ , conduciendo al siguiente esquema numérico: Dado  $u^0 = u_0$ , para cada  $m = 0, \dots, N - 1$  hallar  $u^{m+1}$  tal que

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{k} + f(t^{m+1}, u^{m+1}) = 0. \quad (4.6)$$

El método de *Euler explícito* se obtiene sustituyendo el segundo sumando de (4.5) por una evaluación de  $f$  en la etapa de tiempo anterior:

$$\frac{u^{m+1} - u^m}{k} + f(t^m, u^m) = 0. \quad (4.7)$$

Es bien conocido que se trata de métodos de orden 1.

Aunque los esquemas explícitos para sistemas de EDPs suelen ser más fáciles de aplicar y suelen requerir un menor coste computacional, éstos tienen un inconveniente (ver [12], sección 5.6.2): sólo son condicionalmente estables, lo que en la práctica significa que requieren un paso de tiempo  $k$  que sea suficientemente pequeño con respecto al resto de los datos de la discretización (típicamente  $k \leq C \cdot h^r$  donde  $h$  es la talla de la discretización en espacio y  $C > 0, r \geq 1$  son constantes). En el marco de ecuaciones hiperbólicas, a este tipo de restricciones se le suele llamar condiciones CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

Por el contrario, en los esquemas implícitos que pueden llegar a ser incondicionalmente estables, las restricciones para el paso de tiempo  $k$  son menos acusadas. Aunque estos métodos no suelen ser directamente aplicables para ecuaciones no lineales.

### 4.2.2 Esquema de tipo Euler implícito

Por ejemplo, la semi-discretización en tiempo mediante un esquema de tipo Euler implícito de las ecuaciones (4.1)–(4.3) se escribiría como: Dados  $u^0, v^0, H^0 \in V$ , hallar, para cada  $m = 0, \dots, N - 1$ ,  $u^{m+1}, v^{m+1}, H^{m+1} \in V$  tales que

$$\frac{1}{k} (u^{m+1} - u^m) + u^{m+1} \partial_x u^{m+1} + v^{m+1} \partial_y u^{m+1} + g \partial_x H^{m+1} = -g \partial_x h_B, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{k} (v^{m+1} - v^m) + u^{m+1} \partial_x v^{m+1} + v^{m+1} \partial_y v^{m+1} + g \partial_y H^{m+1} = -g \partial_y h_B, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{k} (H^{m+1} - H^m) + \partial_x (u^{m+1} H^{m+1}) + \partial_y (v^{m+1} H^{m+1}) = 0. \quad (4.10)$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de EDP estacionario (es decir, no evolutivo) y no lineal. El análisis de existencia y unicidad, así como su convergencia a la (posible) solución exacta de de (4.1)–(4.3) sigue siendo un problema demasiado difícil para estudiarlo aquí. Además, su no linealidad imposibilita el usar directamente un método numérico como el de los Elementos Finitos para, mediante un programa de ordenador, aproximar su solución.

## 4. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

---

### 4.2.3 Esquema de tipo Euler semi-implícito

Con el fin de linealizar el sistema de EDP anterior, optaremos por escribir algunos de los factores de forma explícita (es decir, en la etapa  $m$ , donde han sido calculados anteriormente). Así, por ejemplo, planteamos el siguiente sistema semi-implícito (para cada  $m = 0, \dots, N - 1$ ): hallar  $u^{m+1}, v^{m+1}, H^{m+1} \in V$  tales que

$$\frac{1}{k} (u^{m+1} - u^m) + u^m \partial_x u^{m+1} + v^m \partial_y v^{m+1} + g \partial_x H^{m+1} = -g \partial_x h_B, \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{k} (v^{m+1} - v^m) + u^m \partial_x v^{m+1} + v^m \partial_y v^{m+1} + g \partial_y H^{m+1} = -g \partial_y h_B, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{k} (H^{m+1} - H^m) + \partial_x (u^m H^{m+1}) + \partial_y (v^m H^{m+1}) = 0. \quad (4.13)$$

Este sistema de EDPs, más sencillo que (4.7)–(4.9), será uno de los que utilizemos para aproximar la solución de las ecuaciones *Shallow Water*. Como veremos en la siguiente sección, su linealidad posibilita la aplicación del Método de los Elementos Finitos. No abordaremos cuestiones teóricas como la existencia de solución y su convergencia a la solución exacta. Pero, debido a los factores explícitos que hemos introducido en (4.11)–(4.13), podemos esperar que un análisis numérico refleje restricciones al paso de tiempo  $k$  (condiciones CFL) para su estabilidad y convergencia. Esto se contrastará en los experimentos numéricos que realizaremos en el capítulo 5, donde veremos cómo afecta el paso de tiempo elegido en algunos experimentos numéricos desarrollados en este trabajo.

### 4.2.4 Un esquema semi-implícito y desacoplado

Se podrían explorar diversas variantes de (4.11) y (4.13) para las que el sistema resultante sigue siendo lineal. Entre ellas, resulta interesante el siguiente esquema en el que cada iteración en tiempo se divide en dos pasos, desacoplando el cálculo de la velocidad respecto a las ecuaciones de elevación del agua:

#### Paso 1.

Hallar  $u^{m+1}, v^{m+1} \in V$  tales que:

$$\frac{1}{k} (u^{m+1} - u^m) + u^m \partial_x u^{m+1} + v^m \partial_y v^{m+1} + g \partial_x H^m = -g \partial_x h_B, \quad (4.14)$$

$$\frac{1}{k} (v^{m+1} - v^m) + u^m \partial_x v^{m+1} + v^m \partial_y v^{m+1} + g \partial_y H^m = -g \partial_y h_B. \quad (4.15)$$

#### Paso 2.

Conocidos  $u^{m+1}, v^{m+1}$  hallar  $H^{m+1} \in V$  tales que:

$$\frac{1}{k} (H^{m+1} - H^m) + \partial_x (u^{m+1} H^{m+1}) + \partial_y (v^{m+1} H^{m+1}) = 0. \quad (4.16)$$

El desacoplar las ecuaciones tiene la ventaja de que, a la hora de su discretización en espacio, los sistemas de ecuaciones a resolver tendrán menor tamaño. El precio pagado es

### 4.3 Formulación variacional y discretización en espacio

la necesidad de hacer explícita a la elevación del agua en las ecuaciones (4.14) y (4.15), aunque en (4.16) podemos introducir las variables  $u^{m+1}$  y  $v^{m+1}$  que han sido calculadas en el Paso 1. Como en los casos anteriores, omitimos un análisis de la existencia de solución y de su convergencia y nos remitimos a los resultados de las experiencias numéricas (capítulo 5).

### 4.3 Formulación variacional y discretización en espacio

En esta sección, utilizaremos el Método de los Elementos Finitos, introducido en el capítulo 2, para desarrollar la discretización en espacio del problema semi-implícito relativo a las ecuaciones (4.14)–(4.16), que se tomará como modelo.

#### 4.3.1 Condiciones de contorno

Antes de esto, debemos estudiar las condiciones de contorno adecuadas para el buen planteamiento de estas ecuaciones, las cuales se pueden escribir de forma vectorial como:

##### Paso 1.

Dado  $\mathbf{w}^m = (u^m, v^m)$  y  $H^m$ , hallar  $\mathbf{w}^{m+1} = (u^{m+1}, v^{m+1}) \in V^2$  tal que

$$\alpha \mathbf{w}^{m+1} + \mathbf{w}^m \nabla u^{m+1} = \mathbf{F}_{\mathbf{w}}^m, \quad (4.17)$$

donde

$$\alpha = 1/k \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{w}}^m = (1/k) \mathbf{w}^m - g \nabla (H^m + h_b). \quad (4.18)$$

##### Paso 2.

Dados  $\mathbf{w}^{m+1}$  y  $H^m$ , hallar  $H^{m+1} \in V$  tal que

$$\beta^m H^{m+1} + \mathbf{w}^{m+1} \nabla H^{m+1} = F_H^m, \quad (4.19)$$

donde

$$\beta^m = 1/k - \nabla \cdot \mathbf{w}^{m+1} \quad \text{y} \quad F_H^m = (1/k) H^m. \quad (4.20)$$

Por lo tanto, ambas ecuaciones se ajustan al siguiente modelo de EDP (de tipo hiperbólico), conocido como ecuación de convección:

$$a_0 \phi + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi = f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad (4.21)$$

donde  $\mathbf{a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  (de cuya regularidad se hablará más adelante) y  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Como se puede ver, la ecuación de convección 4.21 se ajusta (en el caso  $a$  constante) a la ecuación de convección-difusión (3.1) para  $\epsilon = 0$  (el caso más desfavorable). Es bien conocido (véase por ejemplo [12], sección 5.1, ejemplo 3) que las condición de contorno, de tipo Dirichlet, adecuada para que la ecuación (4.21) esté bien planteada es:

$$\phi = g \quad \text{en} \quad \partial\Omega^-,$$

#### 4. DISCRETIZACIÓN DEL PROBLEMA

---

donde  $g$  es una función dada y  $\Omega^-$  es la frontera de entrada para el flujo  $\mathbf{a}$ ,

$$\Omega^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega / \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0\},$$

y  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario que apunta al exterior de  $\Omega$ .

En nuestro modelo (4.17)–(4.19), el flujo  $\mathbf{a}$  viene dado por  $\mathbf{w}^m$  (o  $\mathbf{w}^{m+1}$ ), por lo tanto la frontera de entrada, en cada etapa  $m = 0, \dots, N$  es:

$$\Omega^{m,-} = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega / \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{n} < 0\}.$$

Ahora realizaremos la siguiente hipótesis, que físicamente significa que, a lo largo del tiempo, no hay entrada de agua en el dominio a través de su frontera:

$$\Omega^{m,-} = \emptyset \quad \forall m = 0, \dots, N. \quad (4.22)$$

En conclusión: no tiene sentido aplicar condiciones de contorno de tipo Dirichlet a nuestras ecuaciones.

#### Formulación variacional

Para la formulación variacional (o formulación débil, véase el capítulo 2), tomaremos de nuevo como modelo la ecuación de convección (4.21), sin condiciones de contorno adicionales. Multiplicando por  $\phi \in V$  e integrando en  $\Omega$  llegamos a la siguiente formulación: hallar  $\phi \in V$  tal que

$$a(\phi, \bar{\phi}) = b(\bar{\phi}) \quad \forall \bar{\phi} \in V, \quad (4.23)$$

donde la forma bilineal,  $a$ , y la forma lineal,  $b$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned} a(\phi, \bar{\phi}) &= a_0 \int_{\Omega} \phi \bar{\phi} + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot (\nabla \phi) \bar{\phi}, \\ b(\bar{\phi}) &= \int_{\Omega} f \bar{\phi}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

El estudio detallado de (4.23) no es sencillo y no será abordado aquí. Baste decir que, aunque para que la primera integral de (4.24) tenga sentido es suficiente que  $\phi, \bar{\phi} \in H^1(\Omega)$ , esta condición no es suficiente para la segunda de las integrales, salvo si suponemos, por ejemplo,  $\mathbf{a} \in [L^\infty(\Omega)]^2$ . Más aún, se puede demostrar que la forma bilineal  $a$  no es coerciva en  $V = H^1(\Omega)$ , para ello véase [15], (por lo que no se puede aplicar el Teorema de Lax-Milgram) y además para que el problema (4.23) esté bien planteado es necesario introducir la siguiente hipótesis sobre los datos: existe  $\mu > 0$  tal que

$$a_0 - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{a} \geq \mu > 0 \quad \text{casi por doquier en } \Omega. \quad (4.25)$$

Pueden encontrarse los detalles en [12] o en la sección 2.1 de [15].

Volviendo a nuestro modelo de *Shallow Water*, cada una de las dos componentes del problema (4.19), se ajusta a (4.21) para  $a_0 = 1/k$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{w}^m = (u^m, v^m)$ . Aunque no

### 4.3 Formulación variacional y discretización en espacio

---

tenemos garantizadas las hipótesis anteriores, al menos podemos esperar que se verifique la condición (4.25) si  $k$  es suficientemente pequeño. Algo similar podemos decir de (4.19).

En definitiva, con el objetivo de abordar su validación numérica en el ordenador (en el capítulo 5), introducimos el siguiente esquema como generalización de (4.21):

**Paso 1.**

Hallar  $\mathbf{w}^{m+1} = (u^{m+1}, v^{m+1})$  tal que, para todo  $\bar{\mathbf{w}} \in V^2$ :

$$\alpha \int_{\Omega} u^{m+1} \bar{\mathbf{w}} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{w}^{m+1}) \mathbf{w}^m \bar{\mathbf{w}} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_{\mathbf{w}}^m \bar{\mathbf{w}}, \quad (4.26)$$

con  $\alpha$  y  $\mathbf{F}_{\mathbf{w}}^m$  como en (4.18).

**Paso 2.**

Hallar  $H^{m+1}$  tal que, para todo  $\bar{H} \in V$ :

$$\beta^m \int_{\Omega} H^{m+1} \bar{H} + \int_{\Omega} \mathbf{w}^{m+1} \cdot (\nabla H^{m+1}) \bar{H} = \int_{\Omega} F_H^m \bar{H}, \quad (4.27)$$

donde  $\beta^m$  y  $F_H^m$  fueron definidos en (4.20).

#### 4.3.2 Discretización mediante Elementos Finitos

A partir de la formulación variacional anterior, la discretización mediante Elementos Finitos es inmediata. Siguiendo lo estudiado en el capítulo 2, basta considerar, sobre una triangulación con talla  $h$ , el espacio  $V_h \in V$  formado por funciones continuas que son (localmente) polinomios de grado  $n$  y, para cada etapa de tiempo  $m$ , buscar funciones  $\mathbf{w}_h^{m+1} = (u_h^{m+1}, v_h^{m+1}) \in V_h^2$  y  $H_h^{m+1} \in V_h$  tales que se verifican (4.26), (4.27) con  $\mathbf{w}^{m+1} = \mathbf{w}_h^{m+1}$  y  $H^{m+1} = H_h^{m+1}$ , para todo  $\bar{\mathbf{w}} \in V_h^2$  y para todo  $\bar{H} \in V_h$ .





# Resolución del Problema

## 5.1 Introducción

En esta sección nos dedicaremos a resolver numéricamente el problema y en general a realizar una serie de tests que respalden los resultados presentados en los anteriores capítulos. Para esto utilizaremos el programa FreeFem++ que se encarga de la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales por medio del método de elementos finitos.

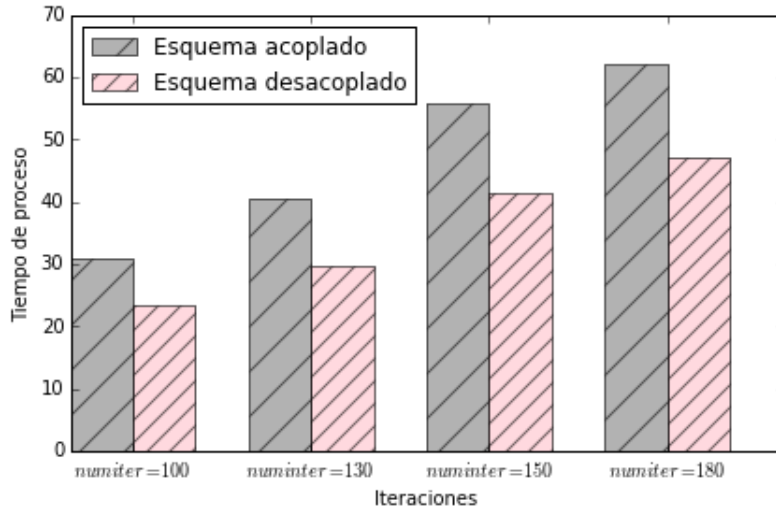
Algunos de los datos utilizados directamente o como valores de referencia han sido tomados de [14].

## 5.2 Modelo acoplado frente a modelo desacoplado

En el capítulo 4 presentamos un modelo desacoplado (4.18)- (4.20) como opción más eficiente a nivel computacional. En la siguiente gráfica comparamos el tiempo de proceso para ambos modelos modificando el número de iteraciones que empleamos.

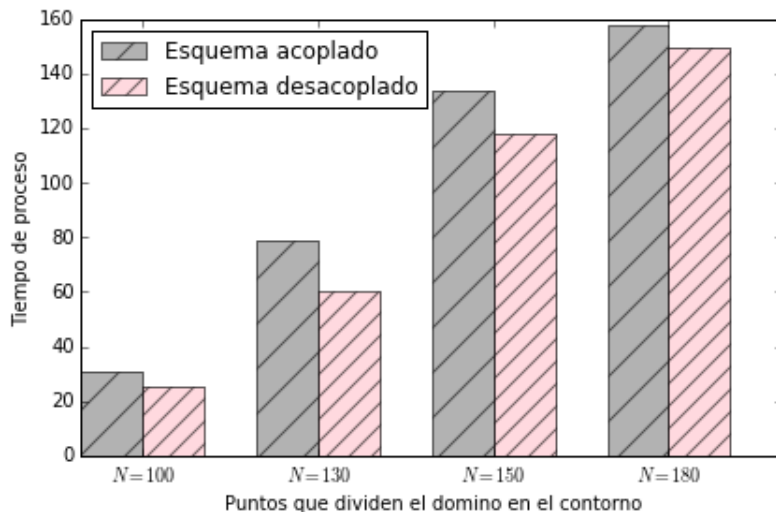
## 5. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

---



Como es de esperar, a medida que aumentamos el número de iteraciones, el tiempo de proceso será mayor, pero la diferencia de tiempo con el cambio de modelo (del acoplado al desacoplado) es notable.

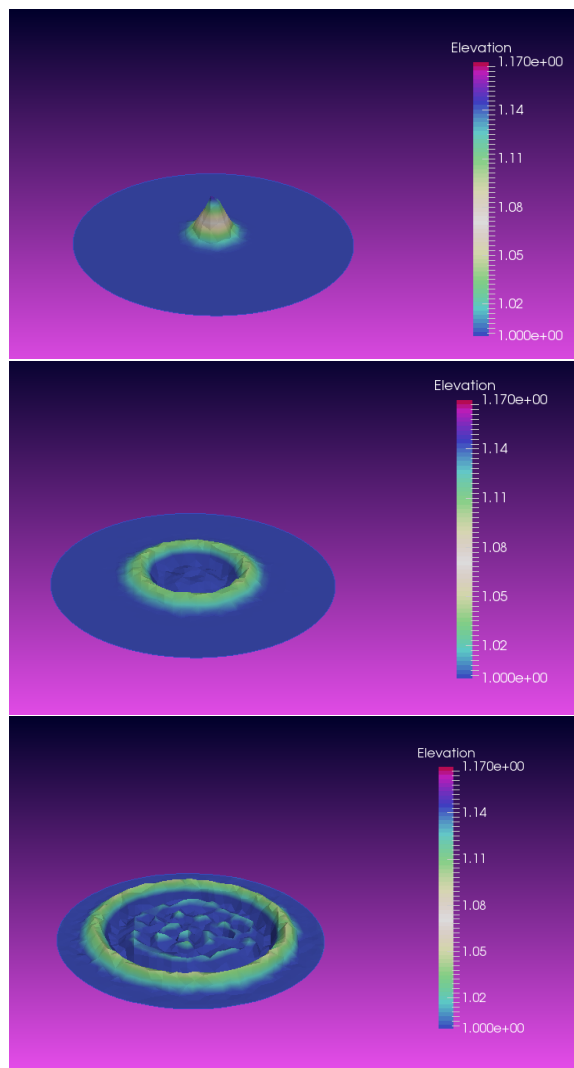
A continuación, volvemos a realizar el test, pero en este caso fijaremos los siguientes parámetros:  $k = 0,03$  y número de iteraciones  $n = 100$ . Lo que variará será el número de puntos de partición del dominio ( $N$ ). Este valor aparece en la dimensión de las matrices de los sistemas que se van construyendo por lo que el aumento de estos valores supondrá un notable incremento en el tiempo de proceso.



Claramente podemos observar la ventaja en cuanto tiempo computacional del esquema desacoplado frente al acoplado.

### 5.3 Modelo no estabilizado frente a modelo con difusión artificial

Viendo las ventajas que supone la implementación de un modelo desacoplado, usamos este esquema para el siguiente test, al que añadiremos un término de viscosidad con coeficiente  $\nu \geq 0$ , con el objetivo de estabilizar posibles oscilaciones. Ya en el capítulo 3 conjeturamos el comportamiento oscilatorio que presentaría la solución de nuestro problema. En las siguientes capturas, observamos estas oscilaciones en la gráfica que muestra la altura  $H$  en distintas etapas de tiempo. Los valores considerados para los parámetros son  $k = 0,01$ ,  $\nu = 0$  (la viscosidad) y realizamos 400 iteraciones.



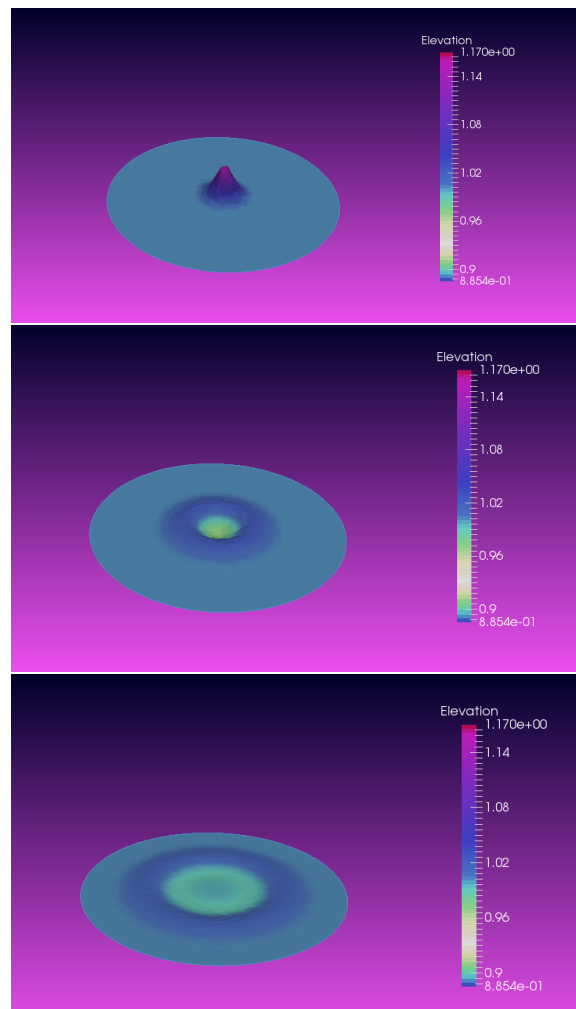
Para evitar estas oscilaciones, introduciremos el término de estabilización basado en la idea de incrementar de forma constante la difusión, tal y como se introdujo en el capítulo 3. Con los mismos datos utilizados en el experimento anterior exceptuando  $\nu$ , al que le

## 5. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

---

daremos el valor  $h$  (tamaño del mallado). Este procedimiento numérico es muy común y es utilizado en [12], sección 8.3.1. El motivo por el cual es usado el llamado Método de Difusión Artificial es que teniendo en cuenta que cuando  $h$  tienda a cero, nuestro problema discreto se acercará a la solución continua. Así, tomando un coeficiente de viscosidad igual a este valor, tendremos la garantía de que cuanto más pequeño lo hagamos, más nos acercaremos a nuestro modelo inicial sin término difusivo.

Vemos aquí los resultados al introducir este término difusivo dándole a  $\nu$  el valor de  $h$ .



Es fácil observar la ausencia de oscilaciones tras incluir el término difusivo, que son los resultados esperados respaldados por la teoría que hemos tratado a lo largo del proyecto.

El código empleado para la implementación del modelo, tanto el esquema acoplado como el desacoplado, puede verse en el Apéndice.

## Conclusiones

En este proyecto hemos recorrido (en la medida de lo posible) las distintas etapas en la resolución numérica de un problema realista, en el ámbito de la Oceanografía. En primer lugar se ha introducido la formulación, en términos de ecuaciones en derivadas parciales, de las ecuaciones de *Shallow Water*. Posteriormente, se ha utilizado el Método de los Elementos Finitos para la discretización en espacio de ecuaciones y se han discutido distintas fórmulas para su discretización temporal. Finalmente, se han programado algunos ejemplos para validar en el ordenador los algoritmos anteriores, prestando atención a las dificultades relacionadas con el carácter hiperbólico (y no lineal) de las ecuaciones. En concreto, con la sección final hemos comprobado como los resultados obtenidos a partir de los modelos desarrollados en la teoría, son los que conjeturamos y por lo tanto eran de esperar.

Hemos observado cómo el modelo estudiado en cuestión, el de *Shallow Water*, en su forma más simple presenta oscilaciones cuando resolvemos el sistema. A la vez hemos comprobado cómo gracias a un procedimiento numérico (con el que añadimos un término que representa las fuerzas debidas a la viscosidad), estas oscilaciones desaparecen.

Una posible ampliación podría ser considerar un fondo oceánico no plano. En nuestros programas de ordenador (por simplicidad en la programación), en sus diferentes esquemas, este fondo se presenta como una función constante  $h_b$ . El tratar el fondo como una función haciendo que varíe sería una asunción más realista que sólo complicaría los cálculos sin causar mayores modificaciones en el modelo y desde el punto de vista teórico no presenta grandes problemas adicionales.

Además, en la resolución de estas ecuaciones y en particular en la implementación del modelo, hemos considerado un dominio  $\Omega$  circular. Con el fin de que este estudio pudiera ser de mayor utilidad práctica, sería interesante considerar un dominio real terrestre. Existen entornos como QGIS que podrían ser útiles para este propósito.

## 6. CONCLUSIONES

---

Finalmente, a medio y largo plazo, sería interesante estudiar discretizaciones en tiempo de mayor orden y discretizaciones en espacio distintas al método clásico de los elementos finitos, que pudieran ser más adecuadas para ecuaciones hiperbólicas



# Apéndice

## Teoremas

**Teorema 2 (Transporte de Reynolds).** Sea  $CV$  un volumen de control,  $\vec{n}$  el vector normal a la frontera y  $\rho$  una función suficientemente regular que representa (por ejemplo) la densidad del fluido (con velocidad  $u_r$ ) que constituye el volumen, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV = \int_{CV} \partial_t \rho dV + \int_{CS} (u_r \vec{n}) dA,$$

Para una versión más rigurosa y su correspondiente demostración ver [[16], Teorema 2.11].

**Teorema 3 (Teorema de la Divergencia).** Sea  $F(X)$  un campo vectorial continuo y diferenciable en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $R \subset D$  una región cerrada y acotada cuyo borde es una superficie regular,  $\Sigma \subset D$ . Para cada  $x \in \Sigma$ , sea  $\nu(x)$  el vector normal a  $\Sigma$  con respecto a  $R$ . Entonces, con  $dX \equiv (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  y con  $d\sigma$  indicando la integración respecto a la superficie  $\Sigma$ ,

$$\int_R (\nabla \cdot F) dX = \int_{\Sigma} (F(X) \cdot \nu(x)) d\sigma.$$

Para una versión más rigurosa y su correspondiente demostración ver Teorema 5-5 de [17].

### Código fuente

#### Código empleado para construcción de Gráficas en el capítulo 3 (Python)

```
from pylab import *

a, b = 0, 1 # Dominio (0,1).
eps=1./30

# Dibujar solución exacta

xex=linspace(a,b,200)

def u_exact(x): # La función solución exacta.
    return (1.0/(exp(1.0/eps)-1)*(exp(1.0*x/eps)-1))

plot(xex,u_exact(xex),"--",linewidth=3, color="blue",label=u"Solución
exacta (epsilon=%.2f)" % eps)

# Dibujar soluciones aproximadas

def uh(n):
    """
    La función aproximación que queremos dibujar para n puntos de la
    partición.
    n=número de puntos sobre los que dibujar la gráfica
    """
    lista_j = range(n)
    M = len(lista_j)-1 # Así lista_j = [0,1,...,M]
    h = 1.0/M
    Pe = 1.0*h/eps
    return (((1+Pe)/(1-Pe))**array(lista_j)-1)/(((1+Pe)/(1-Pe))**M
-1))

def plot_solucion_aprox(M, estilo="--", col="black"):
    "Dibuja la gráfica de la solución aproximada sobre M subintervalos
    en [a,b]"
    h = 1.0/M
    Pe = 1.0*h/eps

    plot(linspace(a,b,M+1), uh(M+1), estilo, linewidth=3, color=col,
        label=u"Sol. aprox, M=%2i, h=%.3f, Pe=%.2f" % (M, h, Pe))

plot_solucion_aprox(10, "-*", "red")
plot_solucion_aprox(40, "-", "green")

legend(loc="upper left")
show()
```



---

## Código empleado para implementar modelo acoplado (FreeFem++)

```
// Shallow water equations 2d
// Alicia Sánchez Rodríguez, Rafa Rodríguez Galván

load "iovtk";

real R=10.0;
border circle(t=0,2*pi){ x=5+R*cos(t); y=5+R*sin(t);};

mesh Th = buildmesh(circle(100));
plot(Th, wait=true);

fespace Xh(Th,P1); // Espacio de Elementos Finitos

/// Sacar valor de h ///

fespace Vh(Th,P1);
Vh h ;
real[int] count(Th.nv);
varf vmeshsizen(u,v)=intalldges(Th,qfnbpE=1)(v);
varf vedgcount(u,v)=intalldges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);

count=vedgcount(0,Vh);
h[]=vmeshsizen(0,Vh);
h[]=h[]./count;

real hmax=h[].max;

cout<<h[]<<endl;
cout<<"tamano malla h="<<hmax<<endl;

//////////

Xh un1,vn1,Hn1,ut,vt,Ht; // Incógnitas y funciones test
Xh un, vn, Hn; // Valores de las incógnitas en la etapa anterior

real k=0.03;
// real f=0; // En principio, no tenemos en cuenta la aceleración de
// Coriolis;

un=0.0; // Dato inicial para u (partimos del reposo)
vn=0.0; // Dato inicial para v (partimos del reposo)

// Altura inicial del agua constante.
// Suponiendo fondo constante z=-1, si la superficie del agua está en
// z=0, entonces la altura es 1
// Hn=1.0;

// Definición de una altura a través de una campana de Gauss,
```

## A. APÉNDICE

---

```
real cteAltura=0.2;
func elevacionInicial = 1.0+cteAltura*exp(-(x-5.0)^2-(y-5.0)^2);
Hn=elevacionInicial;

real g=9.8;
real nu=0; // Coeficiente de viscosidad (difusión)

//
// Defino un problema llamado "ShallowWater" donde:
// - Las incógnitas se definen como (el vector) [un1,vn1,Hn1]
// - Las funciones tests son (el vector) [ut, vt, Ht]
//
// Observaciones:
// - En esta versión, escribimos las ecuaciones para FONDO PLANO (
//   Cushman Roisin, ecuaciones 7.17)
// - El esquema númeroico en tiempo usado es: Euler, en concreto Euler
//   semi-implícito.
// - Es decir, para conseguir que el problema sea lineal, algunas
//   incógnitas se dejan
//   implícitas (se escriben en la etapa n+1) y otras se hacen
//   explícitas (en la etapa n)
// - En la versión actual, no se tiene en cuenta la aceleración de
//   Coriolis.
//

problem ShallowWater([un1,vn1,Hn1], [ut,vt,Ht])=

// Forma bilineal: a(U,V) donde U=[un1,vn1,Hn1] y V=[ut,vt,Ht]
// Aquí aparecen todos los términos de la forma (incógnita)*(
//   funcion_test)

int2d(Th) (
// (1) Ecuación para u
(1/k)*un1*ut // Derivada en t
+ un*dx(un1)*ut + vn*dy(un1)*ut //Convección
+ nu*(dx(un1)*dx(ut) + dy(un1)*dy(ut)) // Difusión
// -int2d(Th)f*vn1*ut //Coriolis

// (2) Ecuación para v
+ (1/k)*vn1*vt // Derivada en t
+ vn*dx(vn1)*vt + vn*dy(vn1)*vt //Convección
+ nu*(dx(vn1)*dx(vt) + dy(vn1)*dy(vt)) // Difusión
// -int2d(Th)f*un1*vt //Coriolis

// (3) Ecuación para H
+ (1/k)*Hn1*Ht
- un*Hn1*dx(Ht) - vn*Hn1*dy(Ht) // Para evitar derivada del
//   producto, integramos por partes
)

// Forma lineal, F(V) donde V=[ut,vt,Ht]
// Aquí aparecen todos los términos de la forma (valor_conocido)*(
```

---

```

    funcion_test)
+ int2d(Th) (
    // (1) Ecuación para u
    - (1.0/k)*un*ut // Derivada en t
    + g*dx(Hn)*ut

    // (2) Ecuación para v
    - (1.0/k)*vn*vt // Derivada en t
    + g*dy(Hn)*vt

    // (3) Ecuación para H
    - (1.0/k)*Hn*Ht
    )

// Condiciones de contorno Dirichlet en los cuatro lados del
// cuadrado
+ on(1,2,3,4, un1=0, vn1=0, Hn1=elevacionInicial);

// Ya hemos definido el problema variacional. Ahora vamos a hacer un
// bucle en tiempo (método de Euler)

// Definimos el número de iteraciones que queremos (el instante final
// de tiempo será  $T = k \cdot \text{numIter}$ )
int numIter=100;

for (int iter=0; iter<numIter; iter++)
{
    real t = k*iter;
    cout << "Solving iteration " << iter << " (time " << t << ")" <<
        endl;

    // Ahora, simplemente escribiendo el nombre del problema definido
    // con "problem(...)", se calcula la solución (se resuelve el
    // sistema de ecuaciones subyacente al método de elementos
    // finitos)

    ShallowWater;

    // Si todo ha ido bien, ya tenemos la solución [un1,vn1,Hn1]. Por
    // ejemplo, dibujamos
    // el campo de velocidades (wait=1 es para que espere a pulsar una
    // tecla)

    plot([un1,vn1], wait=0);

    // Y también dibujamos H:

    plot(Hn1, wait=0);

    // Por último: es muy importante no olvidar preparar la siguiente
    // iteración.

```

## A. APÉNDICE

---

```
un = un1; // La velocidad actual será la de la etapa anterior
vn = vn1;
Hn = Hn1; // Y también la altura

//
// Algunos indicadores
//

// Energía cinética (norma L2 de la velocidad)

real energiaCinetica = sqrt( int2d(Th) (un1[]'*un1[] + vn1[]'*vn1
[]) );
cout << "Kinetic energy: " << energiaCinetica << endl;

// Módulo (norma L2) de la altura en Omega

real normal2H = sqrt(int2d(Th) (Hn1[]'*Hn1[]));
cout << "Hn1 (L2 norm): " << normal2H << endl;

savevtk("testacopvisch" + iter + ".vtk", Th, [un1,vn1,0], Hn1,
dataname="Velocidad Elevacion");
}
```

## Código empleado para implementar modelo desacoplado (FreeFem++)

```
// Shallow water equations 2d
// Alicia Sánchez Rodríguez, Rafa Rodríguez Galván

load "iovtk";

real clock1=clock();
real R=10.0;
border circle(t=0,2*pi){ x=5+R*cos(t); y=5+R*sin(t);};

mesh Th = buildmesh(circle(100));
plot(Th, wait=true);

fespace Xh(Th,P1); // Espacio de Elementos Finitos

Xh un1,vn1,Hn1,ut,vt,Ht; // Incógnitas y funciones test
Xh un, vn, Hn; // Valores de las incógnitas en la etapa anterior

/// Cálculo de h ///

fespace Vh(Th,P1);
Vh h ;
real[int] count(Th.nv);
varf vmeshsizen(u,v)=intalldges(Th,qfnbpE=1)(v);
varf vedgcount(u,v)=intalldges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);
```

---

```

count=vedgecount(0,Vh);
h[]=vmeshsizen(0,Vh);
h[]=h[]./count;

real hmax=h[].max;

//////////

real k=0.031;
// real f=0; // En principio, no tenemos en cuenta la aceleración de
// Coriolis;

un=0.0; // Dato inicial para u (partimos del reposo)
vn=0.0; // Dato inicial para v (partimos del reposo)

// Definición de una altura inicial del agua constante
// Suponiendo fondo constante z=-1, si la superficie del agua está en
// z=0, entonces la altura es 1
// Hn=1.0;

// Definición de una altura a través de una campana de Gauss,

real cteAltura=0.2;
func elevacionInicial = 1.0+cteAltura*exp(-(x-5.0)^2-(y-5.0)^2);
Hn=elevacionInicial;

real g=9.8;
real nu=h; // Coeficiente de viscosidad (difusión)

// macro grad(u) [dx(u),dy(u)] // Definimos una macro para el operador
// gradiente
// macro div(u,v) dx(u)+dy(v) // Definimos una macro para el operador
// divergencia

//
// Defino un problema llamado "ShallowWater" donde:
// - Las incógnitas se definen como (el vector) [un1,vn1,Hn1]
// - Las funciones tests son (el vector) [ut, vt, Ht]
//
// Observaciones:
// - En esta versión, escribimos las ecuaciones para FONDO PLANO (
// Cushman Roisin, ecuaciones 7.17)
// - El esquema número en tiempo usado es: Euler, en concreto Euler
// semi-implícito.
// Es decir, para conseguir que el problema sea lineal, algunas
// incógnitas se dejan
// implícitas (se escriben en la etapa n+1) y otras se hacen
// explícitas (en la etapa n)
// - En la versión actual, no se tiene en cuenta la aceleración de
// Coriolis.
//
problem ShallowWaterVelocity([un1,vn1], [ut,vt])=

```

## A. APÉNDICE

---

```
// Forma bilineal: a(U,V) donde U=[un1,vn1,Hn1] y V=[ut,vt,Ht]
// Aquí aparecen todos los términos de la forma (incógnita)*(
funcion_test)
int2d(Th) (
// (1) Ecuación para u
(1/k)*un1*ut // Derivada en t
+ un*dx(un1)*ut + vn*dy(un1)*ut //Convección
+ nu*(dx(un1)*dx(ut) + dy(un1)*dy(ut)) // Difusión
// -int2d(Th)f*vn1*ut //Coriolis

// (2) Ecuación para v
+ (1/k)*vn1*vt // Derivada en t
+ vn*dx(vn1)*vt + vn*dy(vn1)*vt //Convección
+ nu*(dx(vn1)*dx(vt) + dy(vn1)*dy(vt)) // Difusión
// -int2d(Th)f*un1*vt //Coriolis
)

// Forma lineal, F(V) donde V=[ut,vt,Ht]
// Aquí aparecen todos los términos de la forma (valor_conocido)*(
funcion_test)
+ int2d(Th) (
// (1) Ecuación para u
- (1.0/k)*un*ut // Derivada en t
+ g*dx(Hn)*ut

// (2) Ecuación para v
- (1.0/k)*vn*vt // Derivada en t
+ g*dy(Hn)*vt);

// Condiciones de contorno Dirichlet en los cuatro lados del cuadrado
//+on(1,2,3,4, un1=0, vn1=0, Hn1=elevacionInicial);

problem ShallowWaterElevation(Hn1, Ht)=
// Forma bilineal:
// Aquí aparecen todos los términos de la forma (incógnita)*(
funcion_test)
int2d(Th) (
// Ecuación para H
+ (1/k)*Hn1*Ht
- un*Hn1*dx(Ht) - vn*Hn1*dy(Ht) // Para evitar derivada del
producto, integramos por partes
// + (Hn1*Ht) (dx(un)+dy(vn)) + un*dx(Hn1)*Ht + vn*dy(Hn1)*Ht //
Lo elimino (fondo plano)
)
// Forma lineal.
// Aquí aparecen todos los términos de la forma (valor_conocido)*(
funcion_test)
+ int2d(Th) (
// (3) Ecuación para H
- (1.0/k)*Hn*Ht
)
```

```

;

// Ya hemos definido el problema variacional. Ahora vamos a hacer un
// bucle en tiempo (método de Euler)

// Definimos el número de iteraciones que queremos (el instante final
// de tiempo será  $T = k \cdot \text{numIter}$ )
int numIter=100;

for (int iter=0; iter<numIter; iter++)
{
    real t = k*iter;
    cout << "Solving iteration " << iter << " (time " << t << ")" <<
        endl;

    // Ahora, simplemente escribiendo el nombre del problema definido
    // con "problem(...)", se calcula la solución (se resuelve el
    // sistema de ecuaciones subyacente al método de elementos
    // finitos)

    ShallowWaterVelocity; // Calcular un1, vn1
    ShallowWaterElevation; // Calcular Hn1

    plot([un1,vn1], wait=0);

    plot(Hn1, wait=0);

    // Por último: es muy importante no olvidar preparar la siguiente
    // iteración.

    un = un1; // La velocidad actual será la de la etapa anterior
    vn = vn1;
    Hn = Hn1; // Y también la altura

    //
    // Algunos indicadores
    //

    // Energía cinética (norma L2 de la velocidad)

    real energiaCinetica = sqrt( int2d(Th) (un1[]'*un1[] + vn1[]'*vn1
        []) );
    cout << "Kinetic energy: " << energiaCinetica << endl;

    // Módulo (norma L2) de la altura en Omega

    real normal2H = sqrt(int2d(Th) (Hn1[]'*Hn1[]));
    cout << "Hn1 (L2 norm): " << normal2H << endl;

    savevtk("testconviscosidad" + iter + ".vtk", Th, [un1,vn1,0], Hn1,
        dataname="Velocity Elevation");
}

```





# Bibliografía

- [1] Joseph Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, 1979. 5, 7, 8, 9, 10
- [2] Jean Marie Beckers Benoit Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics, Physical and numerical aspects*. Academic Press, 2011. 5, 7, 9, 10
- [3] Jorge Macías Sánchez. *Simulación numérica en oceanografía: estudio y desarrollo de un modelo de aguas poco profundas y de un modelo acoplado híbrido de atmósfera-oceano. Aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, 1998. 10
- [4] Maria Victoria Redondo Neble. *Estudio de un modelo bidimensional en oceanografía*. Memoria de Licenciatura, Universidad de Sevilla, 1996. 10
- [5] L.Rizgway Scott Susanne Brenner. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2008. 13, 17, 18
- [6] Ernesto Aranda. El método de los elementos finitos desde una perspectiva matemática. 13
- [7] Francisco Javier Sayas. A gentle introduction to the finite element method. 13
- [8] H. Brézis. *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984. 14, 15, 16, 24
- [9] Jean-Luc Guermond Alexandre Ern. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, 2004. 15
- [10] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Number 40 in Classics in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2002. 18
- [11] Steve T. Chiang Klaus A. Hoffmann. *Computational fluid dynamics*, volume Engineering Education System. 2000. 19
- [12] Alberto Valli Alfio Quarteroni. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, 2008. 20, 21, 25, 27, 28, 34

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [13] Clemente Rodriguez-Cuevas y otros. *Modelling Shallow Water Wakes Using a Hybrid Turbulence Model*, volume 2014. 2014. 23
- [14] Stefania Ferrari Fausto Saleri. *A new two-dimensional Shallow Water Model including pressure effects and slow varying bottom topography*, volume 2. 2004. 23, 31
- [15] Eric Savin Danile Di Pietro. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, 1994. 28
- [16] H. Amann and Joachim Escher. *Analysis III*. Birkhuser Verlag AG, 2009. 37
- [17] Michael Spivak. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W.A. Benjamin, New York, 1995. 37