

NOCIONES SOBRE EL MOVIMIENTO DE UN ROBOT

Javier HOLGADO CORRALES
Dr. Ingeniero Industrial. Universidad de Cádiz

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de la regulación y el control automático [4], surgió hace algunos años la aplicación de dichas técnicas a elementos electromecánicos denominados manipuladores (articulaciones dotadas de movimiento motorizado) [7], generándose los pasos iniciales de una rama tecnológica de enorme trascendencia en el campo industrial, la ROBÓTICA. La aplicación de este tipo de elementos por parte de las grandes compañías multinacionales la impulsó definitivamente en las dos últimas décadas, constituyendo actualmente una de las más firmes realidades en el campo de la investigación, lo que ha inducido a su introducción a gran nivel en los estudios de Ingeniería y en la formación doctoral. Nombres de robots y empresas como UNIMATE, CINCINATI MILACRON, PUMA, SCARA, MAKER, YASUKAWA MOTOMAN, etc. [6], pertenecen ya a la breve pero intensa historia de esta rama tecnológica.

El estudio de un robot comprende aspectos relacionados con la cinemática, la dinámica, la regulación y el control [5], estudio de fuerzas, programación, diseño por ordenador, etc. [8], aspectos todos ellos muy variados y especializados que requieren grupos de trabajo formados por técnicos de diversas especialidades. En este artículo se realiza una introducción al movimiento de un robot, describiendo los conceptos matemáticos básicos que definen y determinan el estudio de las trayectorias, sus velocidades y sus aceleraciones [1].

2. ESTUDIO DE LA CINEMÁTICA DE UN ROBOT

La unión de los elementos de un robot se realiza a través de articulaciones, una para cada tipo de movimiento que realizan. Así por ejemplo, en la figura 1, si la barra *A* está empotrada y la barra *B* puede efectuar gracias a *C* los giros indicados, existirán dos articulaciones en el punto *C* que permitan tal movimiento, definiéndose en este caso la existencia de dos grados de libertad [2].

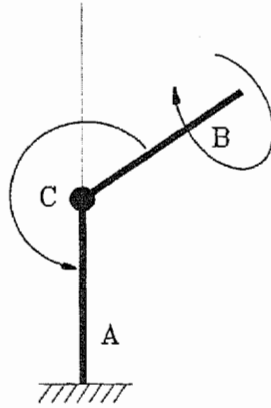


Figura 1.
Articulaciones con 2
grados de libertad

Un robot se define según el número de grados de libertad que posee, asociándose dicho concepto con el de articulaciones diferentes en el conjunto de elementos del robot. Existen varias posibilidades de definir el movimiento de un robot en el espacio, basándose en la representación cartesiana de las distintas posiciones que va ocupando durante su desplazamiento y su conversión a los distintos tipos de coordenadas, cilíndrica, polar, etc.

El sistema más sencillo de estudiar es el que emplea representación de coordenadas en forma polar [1], siendo necesario conocer en cada caso la distancia al origen de coordenadas y el desplazamiento angular del punto que se analiza. Este sistema, introducido por Euler, permite que las uniones entre los elementos del robot estén referenciadas en un sistema de coordenadas mediante valores angulares cuyas derivadas serán las velocidades angulares y las derivadas de éstas las aceleraciones angulares de los elementos [7]. Para simplificar el sistema de ecuaciones que lógicamente se obtendrá al estudiar la posición, velocidad y aceleración, se utilizan los ejes de coordenadas más accesibles en cada caso, normalmente el coincidente con cada uno de los elementos del robot.

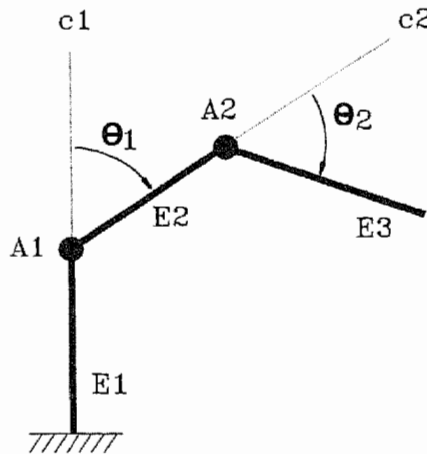


Figura 2.
Ejemplo de
Articulaciones

Por ejemplo, en el esquema de la figura 2, C_1 es el eje de coordenadas respecto al que se mide el ángulo θ_1 , y C_2 el eje correspondiente al ángulo θ_2 . E_1 , E_2 y E_3 son los tres elementos del robot y A_1 y A_2 las articulaciones, que según indican los movimientos de la figura, determinan dos grados de libertad en el sistema [3]. Una posición cualquiera se determina mediante una ecuación de tercer grado :

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (1)$$

La velocidad se obtiene mediante derivada de la ecuación de posición:

$$\omega(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (2)$$

La segunda derivada de la ecuación de posición determinará la aceleración:

$$a(t) = 2a_2 + 6a_3 t \quad (3)$$

La aplicación de condiciones iniciales y finales, determina la obtención de los parámetros a_0 , a_1 , a_2 , y a_3 . Estas ecuaciones son específicas de un punto y una articulación, lo que quiere decir que para un robot de seis grados de libertad se necesitan seis sistemas de ecuaciones para definir una posición en el espacio. Cada nueva posición requiere la definición y resolución de nuevos sistemas de ecuaciones, tomándose como condiciones iniciales en cada desplazamiento las condiciones finales definidas en el desplazamiento anterior. La resolución del sistema se realiza mediante aplicación de posiciones inicial y final y de velocidades inicial y final nula.

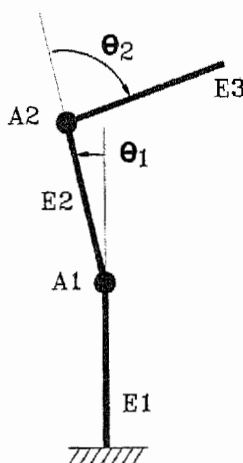


Figura 3.
Movimiento
de las
articulaciones

Suponiendo el robot articulado de la figura 2, se asignan inicialmente los valores $\theta_{1i} = -45^\circ$ y $\theta_{2i} = -30^\circ$, desplazándose en 2^{ses} hasta la posición indicada en la figura 3, donde $\theta_{1f} = 5^\circ$ y $\theta_{2f} = -90^\circ$, determinándose el movimiento de ambas articulaciones mediante las siguientes ecuaciones:

a) Articulación A_1 , elementos E_1 y E_2 :

$$\theta_1(t) = a_{10} + a_{11} t + a_{12} t^2 + a_{13} t^3 \quad (4)$$

$$\omega_1(t) = a_{11} + 2a_{12} t + 3a_{13} t^2 \quad (5)$$

$$a_1(t) = 2a_{12} + 6a_{13} t \quad (6)$$

b) Articulación A_2 , elementos E_2 y E_3 :

$$\theta_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (7)$$

$$\omega_2(t) = a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2 \quad (8)$$

$$a_2(t) = 2a_{22} + 6a_{23}t \quad (9)$$

c) Condiciones iniciales y finales:

$$\theta_1(t=t_i) = -45^\circ \quad \omega_1(t=t_i) = 0 \quad (10)$$

$$\theta_1(t=t_f) = -5^\circ \quad \omega_1(t=t_f) = 0$$

$$\theta_2(t=t_i) = -30^\circ \quad \omega_2(t=t_i) = 0$$

$$\theta_2(t=t_f) = -90^\circ \quad \omega_2(t=t_f) = 0$$

Sustituyendo en las ecuaciones (4) a (9) las condiciones iniciales y finales (10), y particularizando para los valores de tiempo $t=t_i=0^{\text{seg}}$ y $t=t_f=2^{\text{seg}}$, se obtiene:

$$-45 = a_{10} \quad (11)$$

$$5 = a_{10} + 2a_{11} + 4a_{12} + 8a_{13}$$

$$0 = a_{11}$$

$$0 = a_{11} + 4a_{12} + 12a_{13}$$

$$-30 = a_{20} \quad (12)$$

$$-90 = a_{20} + 2a_{21} + 4a_{22} + 8a_{23}$$

$$0 = a_{21}$$

$$0 = a_{21} + 4a_{22} + 12a_{23}$$

La solución de los sistemas de ecuaciones (11) y (12) conduce a la obtención de los siguientes parámetros:

$$a_{10} = -45 \quad a_{20} = -30 \quad (13)$$

$$a_{11} = 0 \quad a_{21} = -0$$

$$a_{12} = -32,5 \quad a_{22} = -45$$

$$a_{13} = -12,5 \quad a_{23} = 15$$

Las ecuaciones que se obtienen sustituyendo en (4) y (7) los valores obtenidos en los parámetros son las siguientes:

$$\theta_1(t) = -45 + 37,5t^2 - 12,5t^3 \quad (14)$$

$$\theta_2(t) = -30 - 45t^2 - 15t^3 \quad (15)$$

Si el robot se mueve a través de varios puntos, se utilizarían las mismas ecuaciones genéricas ya definidas, particularizando para valores iniciales y finales de cada tramo.

3. APLICACIÓN CINEMÁTICA A UN MODELO CONCRETO

Utilizando nuevamente el robot articulado de la figura 2, se puede definir el siguiente movimiento:

Posición 1: $\theta_1 = -45^\circ \quad \theta_2 = -30^\circ$

Posición 2: $\theta_1 = -5^\circ \quad \theta_2 = -90^\circ$

Posición 3: $\theta_1 = -10^\circ \quad \theta_2 = -100^\circ$

Tiempo 1-2: 2^{seg}

Tiempo 2-3: 1^{seg}

La posición final obtenida se representa mediante el gráfico de la figura 4, correspondiendo a la posición 3. (La posición 1 corresponde a la figura 2 y la posición 2 a la figura 3).

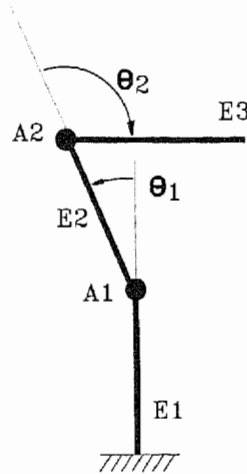


Figura 4.
Segunda posición
de las
articulaciones

Las ecuaciones genéricas (4) a (9) para el tramo 1-2, determinan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\theta_{a1}(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 \quad (16)$$

$$\omega_{a1}(t) = a_{11} + 2a_{12}t + 3a_{13}t^2 \quad (17)$$

$$a_{a1}(t) = 2a_{12} + 6a_{13}t \quad (18)$$

$$\theta_{a2}(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (19)$$

$$\omega_{a2}(t) = a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2 \quad (20)$$

$$a_{a2}(t) = 2a_{22} + 6a_{23}t \quad (21)$$

Para el tramo 2-3 las mismas ecuaciones genéricas (4) a (9) se representarían:

$$\theta_{b1}(t) = b_{10} + b_{11}t + b_{12}t^2 + b_{13}t^3 \quad (22)$$

$$\omega_{b1}(t) = b_{11} + 2b_{12}t + 3b_{13}t^2 \quad (23)$$

$$a_{b1}(t) = 2b_{12} + 6b_{13}t \quad (24)$$

$$\theta_{b2}(t) = b_{20} + b_{21}t + b_{22}t^2 + b_{23}t^3 \quad (25)$$

$$\omega_{b2}(t) = b_{21} + 2b_{22}t + 3b_{23}t^2 \quad (26)$$

$$a_{b2}(t) = 2b_{22} + 6b_{23}t \quad (27)$$

Las condiciones iniciales y finales de los 4 sistemas expuestos serían las siguientes:

$$\text{Tramo 1-2: } t_{11} = 0 \quad t_{f1} = 2^{\text{seg}}$$

$$\text{Tramo 2-3: } t_{12} = 0 \quad t_{f2} = 1^{\text{seg}}$$

Se simplifica el análisis considerando $t_{12}=0$, ya que de otra forma, al analizar el tramo 2-3 habría que considerar siempre $t=t_{t_1}+\delta t$ con $\delta t_{\max}=t_{12}$, lo que conllevaría a idénticos resultados pero empleando más tiempo de cálculo, teniendo además como desventaja el hecho de tener que emplear tiempos totales en los movimientos en vez de tiempos parciales, más cómodos de operar.

Las ecuaciones (16) a (18) y (22) a (24) determinan el movimiento de la articulación A_1 y las ecuaciones (19) a (21) y (25) a (27) el movimiento de la articulación A_2 . Analizando conjuntamente ambos bloques, se obtienen las siguientes ecuaciones, aplicando las condiciones (28):

$$\begin{aligned} t_{i1} &= t_{i2} = 0 & (28) \\ \omega_{a1}(t=0) &= 0 \\ \omega_{a2}(t=0) &= 0 \\ \omega_{b1}(t=t_{f2}) &= 0 \\ \omega_{b2}(t=t_{f2}) &= 0 \end{aligned}$$

a) Condiciones iniciales en tramo 1-2:

$$\begin{aligned} \text{Posición:} & \quad \theta_{a1}(0) = -45^\circ & \theta_{a2}(0) = -30^\circ \\ \text{Velocidad:} & \quad \omega_{a1}(0) = 0 & \omega_{a2}(0) = 0 \end{aligned}$$

b) Condiciones finales en tramo 1-2:

$$\begin{aligned} \text{Posición:} & \quad \theta_{a1}(t_{f1}) = 5^\circ & \theta_{a2}(t_{f2}) = -90^\circ \\ \text{Velocidad:} & \quad \omega_{a1}(t_{f1}) = \omega_{f11} & \omega_{a2}(t_{f1}) = \omega_{f12} \end{aligned}$$

c) Condiciones iniciales en tramo 2-3:

$$\begin{aligned} \text{Posición:} & \quad \theta_{b1}(0) = 5^\circ & \theta_{b2}(0) = -90^\circ \\ \text{Velocidad:} & \quad \omega_{b1}(0) = \omega_{f11} & \omega_{b2}(0) = \omega_{f12} \end{aligned}$$

d) Condiciones finales en tramo 2-3:

$$\begin{aligned} \text{Posición:} & \quad \theta_{b1}(t_{f2}) = 10^\circ & \theta_{b2}(t_{f2}) = -100^\circ \\ \text{Velocidad:} & \quad \omega_{b1}(t_{f2}) = 0 & \omega_{b2}(t_{f2}) = 0 \end{aligned}$$

Se determinan en cada articulación 4 ecuaciones de posición y 4 de velocidad, junto con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega_{a1}(t=t_{f1}) &= \omega_{b1}(t=0) & \omega_{a2}(t=t_{f1}) &= \omega_{b2}(t=0) & (29) \\ \alpha_{a1}(t=t_{f1}) &= \alpha_{b1}(t=0) & \alpha_{a2}(t=t_{f1}) &= \alpha_{b2}(t=0) \end{aligned}$$

Se obtienen sistemas de 8 ecuaciones y 8 incógnitas, que se resuelven siguiendo el desarrollo matricial que se expone a continuación:

$$\theta_{12}(t) = x_{10} + x_{11}t + x_{12}t^2 + x_{13}t^3 \quad (30)$$

$$\theta_{23}(t) = y_{10} + y_{11}t + y_{12}t^2 + y_{13}t^3 \quad (31)$$

$$\text{Tiempo 1-2} = t_1$$

$$\text{Tiempo 2-3} = t_2$$

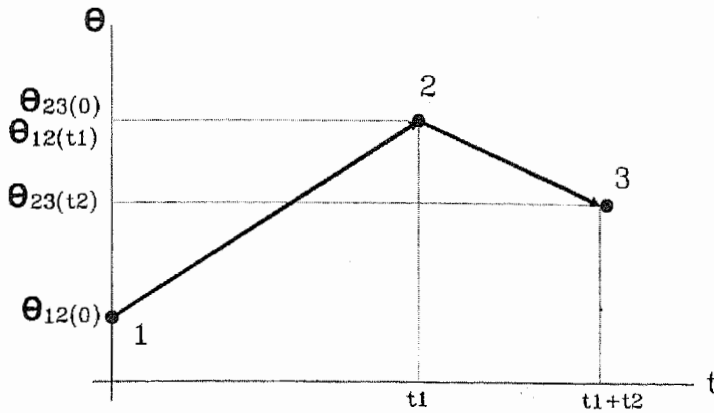


Figura 5.
Gráfico de desplazamientos angulares

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_{12}(0) \\ \theta_{12}(t_1) \\ \theta_{12}(t_1) \\ \theta_{23}(t_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[P]=[T]^{-1}[C] \quad (33)$$

Los valores obtenidos con la matriz P son de aplicación a cualquier tipo de articulación y a cualquier número de grados de libertad de un robot.

Dado que la resolución de este tipo de sistema de ecuaciones con 8 incógnitas no es fácil ni rápido, se desarrolla en el Apéndice un programa en BASIC que se ha diseñado para resolverlos fácilmente. (Las líneas 10 a 1940 del programa realizan los cálculos matemáticos y matriciales, mientras que el resto muestra gráficamente el movimiento, velocidad y aceleración de las articulaciones).

Los resultados obtenidos ejecutando el programa son los siguientes:

$$\begin{aligned} \theta_{a1}(t) &= -45 + 28,75t^2 - 8,125t^3 \\ \theta_{a2}(t) &= -30 + 32,5t^2 - 8,175t^3 \\ \theta_{b1}(t) &= 5 + 17,5t - 20t^2 + 7,5t^3 \\ \theta_{b2}(t) &= -90 + 25t - 20t^2 + 5t^3 \end{aligned} \quad (34)$$

La ecuación de tercer grado (1), se define en el supuesto de ausencia de velocidad inicial y llegando a un punto donde el robot se detendrá, con lo que igual-

mente obtendremos velocidad final nula. Si el estudio se realiza obviando estos supuestos, la ecuación que define el movimiento necesita dos parámetros adicionales, convirtiéndose por tanto en una ecuación de quinto grado como la siguiente:

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5 \quad (35)$$

$$\omega(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4 \quad (36)$$

$$\alpha(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3 \quad (37)$$

Si se realiza el movimiento del robot entre dos o más puntos, será necesario indicar los valores de posición, velocidad y aceleración en cada uno de los puntos en que se sitúa el robot. El sistema de ecuaciones equivalente al realizado para ecuaciones de tercer grado en un movimiento entre tres puntos contiene doce ecuaciones con doce incógnitas, casi imposible de resolver analíticamente, siendo de todo punto imprescindible el empleo del ordenador.

$$\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{15} \\ b_{20} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \\ b_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & t_1^4 & t_1^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & t_2^4 & t_2^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t_1 & 3t_1^2 & 4t_1^3 & 5t_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_2 & 3t_2^2 & 4t_2^3 & 5t_2^4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_1 & 12t_1^2 & 20t_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6t_2 & 12t_2^2 & 20t_2^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \theta_{12}(0) \\ \theta_{12}(t_1) \\ \theta_{23}(0) \\ \theta_{23}(t_2) \\ \omega_{12}(0) \\ \omega_{12}(t_1) \\ \omega_{23}(0) \\ \omega_{23}(t_2) \\ \alpha_{12}(0) \\ \alpha_{12}(t_1) \\ \alpha_{23}(0) \\ \alpha_{23}(t_2) \end{bmatrix}$$

Se omite el programa que resuelve dicha ecuación matricial por el excesivo número de líneas, pero su obtención es muy sencilla a partir del programa descrito anteriormente, modificando los parámetros que definen el máximo número de filas y columnas en el algoritmo de cálculo y asignando los valores correspondientes a las posiciones matriciales de nueva definición.

4. EJEMPLO

Se realiza a continuación un estudio completo de un robot típico de seis grados de libertad. En la figura 6 se representa el esquema genérico del robot con los movimientos de las articulaciones indicativas de los grados de libertad (El extremo final es una pinza).

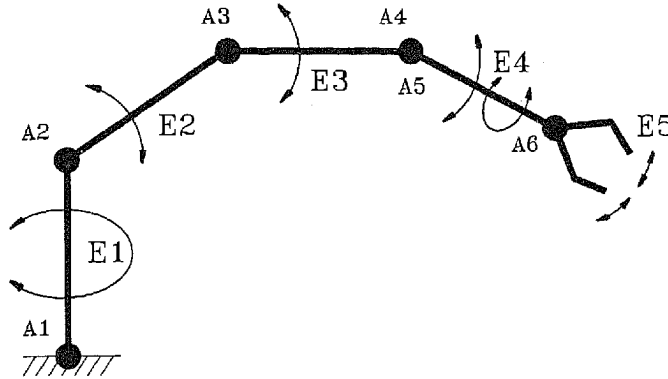


Figura 6.
Sistema con
6 grados de
libertad

El desglose y análisis de las características de cada una de las articulaciones del robot es el siguiente:

- Articulación de la base rotatoria A_1 : Posibilidad de giro según la línea de referencia entre 0° y $\pm 180^\circ$. Figura 7.
- Articulación brazo-base rotatoria A_2 : Posibilidad de giro según la línea de referencia marcada por la prolongación del elemento E_1 , entre 0° y $\pm 160^\circ$, evitando el contacto con E_1 y abarcando el mayor ángulo posible. Figura 8.
- Articulación antebrazo-brazo A_3 : Puede girar según la línea de referencia que se obtiene de prolongar E_2 , entre 0° y $\pm 160^\circ$, fijando las mismas condiciones de movimiento que en la articulación A_2 . Figura 9.
- Articulación muñeca-antebrazo A_4 : Posibilidad de giro entre 0° y $\pm 90^\circ$, según la línea de referencia prolongación de E_3 . Figura 10.
- Articulación de rotación de la muñeca E_5 : Posibilidad de giro entre 0° y $\pm 90^\circ$, según la línea de referencia del esquema de la figura 11.

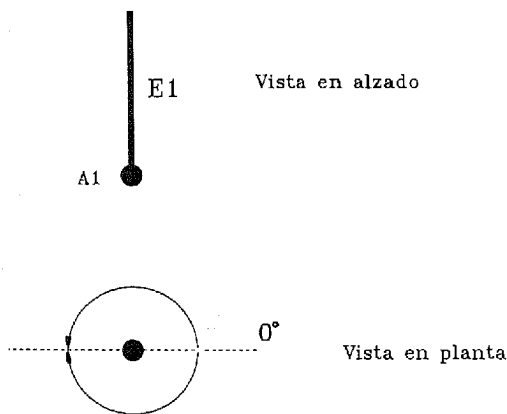


Figura 7. Articulación 1

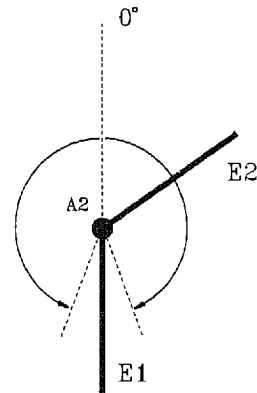


Figura 8. Articulación 2

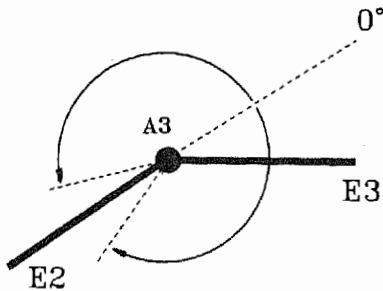


Figura 9. Articulación 3

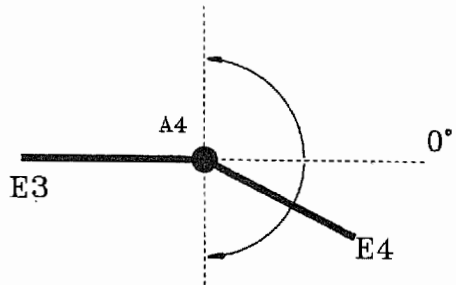


Figura 10. Articulación 4

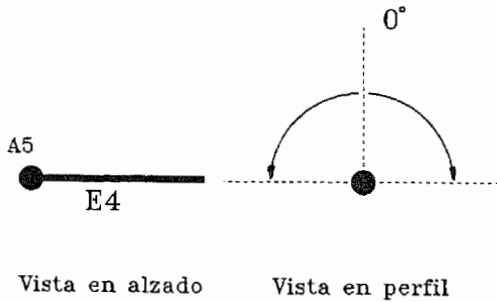


Figura 11. Articulación 5

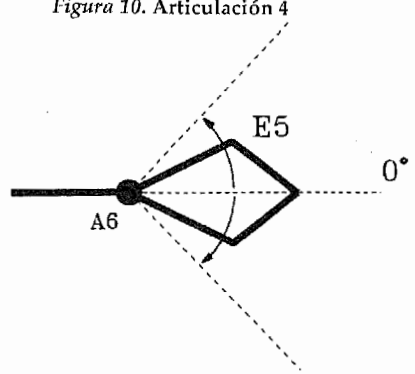


Figura 12. Articulación 6

f) Articulación de apertura y cierre de la pinza A_6 : Posibilidad de apertura entre 0° y $\pm 45^\circ$ según la línea de referencia, moviéndose simultáneamente ambos extremos. Figura 12.

Las posiciones iniciales, intermedias y finales del movimiento del robot en un ejemplo de aplicación, pueden ser las siguientes:

Artic.	Pos. Inic.	Pos. Int.	Pos. Final
A_1	10°	35°	25°
A_2	-45°	-20°	-60°
A_3	-30°	-80°	-55°
A_4	0°	-30°	-45°
A_5	0°	45°	90°
A_6	0°	45°	20°

Tiempo entre posiciones 1-2: 2^{seg}

Tiempo entre posiciones 2-3: $1,5^{\text{seg}}$

Aplicando el programa descrito en el apéndice se obtienen los resultados que se indican a continuación, que conducen al robot a la posición final indicada en el diagrama de la figura 13.

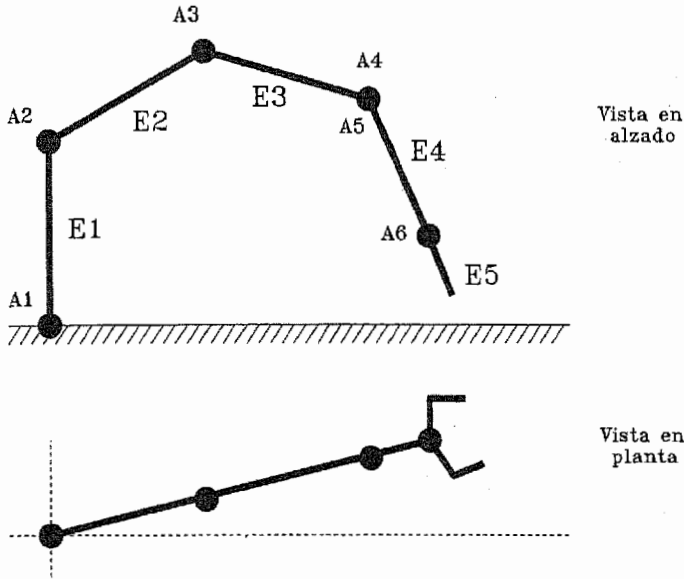


Figura 13. Ejemplo de movimiento del sistema

$$\begin{aligned} \theta_{1-2}^{A1}(t) &= 10 + 17,59t^2 - 5,67t^3 \\ \theta_{2-3}^{A1}(t) &= 35 + 2,32t - 16,4t^2 + 6,96t^3 \\ \theta_{1-2}^{A2}(t) &= -45 + 26,16t^2 - 9,95t^3 \\ \theta_{2-3}^{A2}(t) &= -20 - 14,82t - 33,57t^2 + 17,11t^3 \\ \theta_{1-2}^{A3}(t) &= -30 - 36,6t^2 + 12,05t^3 \\ \theta_{2-3}^{A3}(t) &= -80 - 1,78t + 35,7t^2 - 15,6t^3 \\ \theta_{1-2}^{A4}(t) &= -13,39t^2 + 2,95t^3 \\ \theta_{2-3}^{A4}(t) &= -30 - 18,2t + 4,82t^2 + 0,79t^3 \\ \theta_{1-2}^{A5}(t) &= 13,66t^2 - 1,2t^3 \\ \theta_{2-3}^{A5}(t) &= 45 + 40,18t + 6,43t^2 - 8,8t^3 \\ \theta_{1-2}^{A6}(t) &= 33,66t^2 - 11,2t^3 \\ \theta_{2-3}^{A6}(t) &= 45 + 0,18t - 33,57t^2 + 14,89t^3 \end{aligned}$$

Las figuras 14, 15 y 16 representan respectivamente los gráficos de desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular de la articulación A_1 . De igual forma pueden realizarse los gráficos correspondientes a las otras cinco articulaciones.

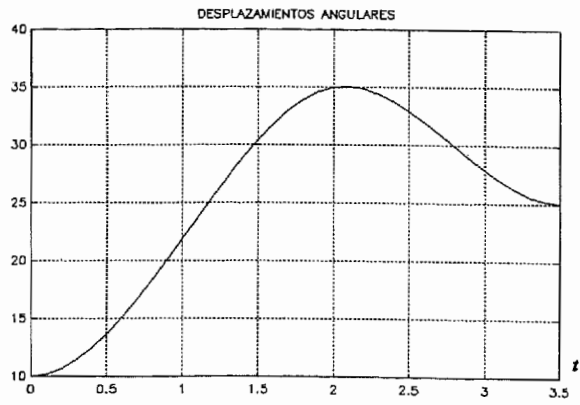


Figura 14. Gráfico de desplazamientos angulares

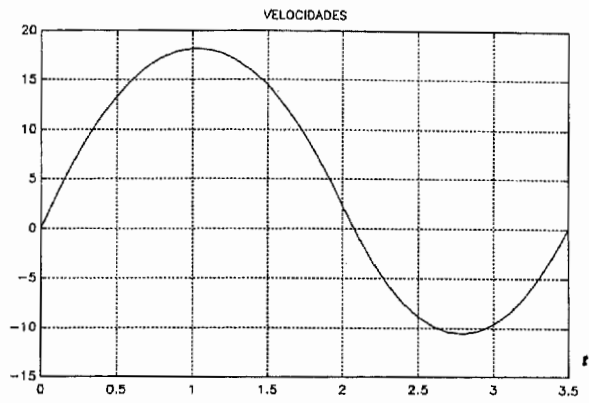


Figura 15. Gráfico de velocidades angulares

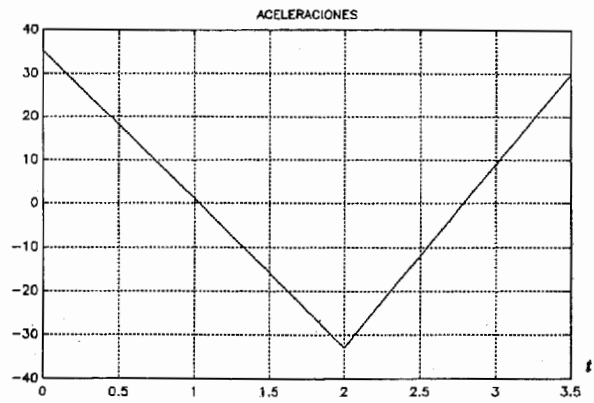


Figura 16. Gráfico de aceleraciones angulares

REFERENCIAS

- [1] J. J. Craig - Introduction to Robotics. Addison-Wesley 1989.
- [2] S. G. Tzafestas - Microprocessors in signal processing, measurement and control. Reidel Publishing Company 1983.
- [3] M. Fogiel - Problem solver in automatic control systems and robotics. REA 1987.
- [4] A. Ollero - Control por computador. Marcombo 1991.
- [5] A. Netushil - Teoría del mando automático. Mir 1987.
- [6] M. P. Groover y otros - Robótica industrial. Mc Graw Hill 1989.
- [7] A. J. Koivo - Fundamentals for control of robotic manipulator. John Wiley & Sons 1989.
- [8] N. M. Schmitt, R. F. Farwell - A fondo: Robótica y sistemas automáticos. Anaya 1988.

APÉNDICE

```

10 'PROGRAMA ANALES-I
20 'APUNTES SOBRE EL CONTROL DEL MOVIMIENTO DE UN ROBOT
30 'AUTOR: JAVIER HOLGADO CORRALES
40 'JUNIO 1991
50 CLS
60 SCREEN 0,0,0
70 COLOR 2
80 PRINT:PRINT
90 PRINT "PROGRAMA DE CONTROL DEL MOVIMIENTO DE UN ROBOT"
100 PRINT "AUTOR: JAVIER HOLGADO CORRALES"
110 PRINT "UNIVERSIDAD DE CADIZ - JUNIO 1991"
120 COLOR 3
130 PRINT:PRINT:PRINT
140 PRINT "LAS ECUACIONES DE DEFINICION SON LAS SIGUIENTES:"
150 PRINT
160 PRINT "TRAMO 1-2: e1 (t) = a10 + a11*t + a12*t^2 + a13*t^3"
170 PRINT "TRAMO 2-3: e2(t) = a20 + a21*t + a22*t^2 + a23*t^3"
180 PRINT
190 PRINT:PRINT:PRINT
200 PRINT "PULSAR RETORNO PARA CONTINUAR"
210 PRINT
220 INPUT R
    
```

```

230 PRINT
240 CLS
250 PRINT:PRINT
260 PRINT "SISTEMA DE ECUACIONES APLICANDO CONDICIONES INICIA-
    LES Y FINALES:"
270 PRINT
280 PRINT "e1(0), a10"
290 PRINT "e1(t1) = a10 + a11*t1 + a12*t1^2 + a13*t1^3"
300 PRINT "e2(0) = a20"
310 PRINT "e2(t2) = a20 + a21*t2 + a22*t2^2 + a23*t2^3"
320 PRINT "v1(0) = a11 = 0"
330 PRINT "v2(t2) = a21 + 2*a22*t2 + 3*a23*t2^2 = 0"
340 PRINT "v1(t1) = a11 + 2*a12*t1 + 3*a13*t1^2 = v2(0) = a21"
350 PRINT "a1(t1) = 2*a12 + 6*a13*t1 = a2(0) = 2*a22"
360 PRINT
370 PRINT "SE OBTIENE UN SISTEMA DE ECUACIONES EN FORMA MATRI-
    CIAL"
380 PRINT "SEGUN EL FORMATO [P] = [T]^ -1*[C]"
390 PRINT:PRINT
400 COLOR 5
410 PRINT "PULSAR RETORNO PARA CONTINUAR"
420 PRINT
430 INPUT R
440 CLS
450 COLOR 2
460 PRINT
470 PRINT "INTRODUCIR PARAMENTROS"
480 COLOR 3
490 PRINT
500 PRINT "(EMPLEAR EL PUNTO PARA SEPARAR PARTE ENTERA DE
    FRACCIONARIA)"
510 PRINT "(TRANSFORMAR PI A SU EQUIVALENTE 180 GRADOS)="
520 COLOR 4
530 PRINT:PRINT
540 PRINT "PUNTO 1 - POSICION INICIAL EN GRADOS=";
550 INPUT A1
560 PRINT "PUNTO 2 - POSICION INTERMEDIA EN GRADOS=";
570 INPUT A2
580 PRINT "PUNTO 3 - POSICION FINAL EN GRADOS=";
590 INPUT A3
600 PRINT "TIEMPO EN SEGUNDOS ENTRE POSICIONES 1 Y 2=";
610 INPUT B1
620 PRINT "TIEMPO EN SEGUNDOS ENTRE POSICIONES 2 Y 3=";
630 INPUT B2
640 PRINT:PRINT
650 PRINT

```

NOCIONES SOBRE EL MOVIMIENTO DE UN ROBOT

```

660 PRINT "***** SE ESTAN REALIZANDO LOS CALCULOS MATRICIALES
*****"
670 PRINT
680 FOR I=1 TO 8
690 FOR J=1 TO 9
700 E(I,1)=1
710 E(I,2)=0
720 E(I,3)=0
730 E(I,4)=0
740 E(I,5)=0
750 E(I,6)=0
760 E(I,7)=0
770 E(I,8)=0
780 E(I,9)=A1
790 E(2,1)=1
800 E(2,2)=B1
810 E(2,3)=B1^2
820 E(2,4)=B1^3
830 E(2,5)=0
840 E(2,6)=0
850 E(2,7)=0
860 E(2,8)=0
870 E(2,9)=A2
880 E(3,1)=0
890 E(3,2)=0
900 E(3,3)=0
910 E(3,4)=0
920 E(3,5)=1
930 E(3,6)=0
940 E(3,7)=0
950 E(3,8)=0
960 E(3,9)=A2
970 E(4,1)=0
980 E(4,2)=0
990 E(4,3)=0
1000 E(4,4)=0
1010 E(4,5)=1
1020 E(4,6)=B2
1030 E(4,7)=B2^2
1040 E(4,8)=B2^3
1050 E(4,9)=A3
1060 E(5,1)=0
1070 E(5,2)=1
1080 E(5,3)=0
1090 E(5,4)=0
1100 E(5,5)=0

```

```

1110 E(5,6)=0
1120 E(5,7)=0
1130 E(5,8)=0
1140 E(5,9)=0
1150 E(6,1)=0
1160 E(6,2)=0
1170 E(6,3)=0
1180 E(6,4)=0
1190 E(6,5)=0
1200 E(6,6)=1
1210 E(6,7)=2*B2
1220 E(6,8)=3*(B2^2)
1230 E(6,9)=0
1240 E(7,1)=0
1250 E(7,2)=1
1260 E(7,3)=2*B1
1270 E(7,4)=3*(B1^2)
1280 E(7,5)=0
1290 E(7,6)=-1
1300 E(7,7)=0
1310 E(7,8)=0
1320 E(7,9)=0
1330 E(8,1)=0
1340 E(8,2)=0
1350 E(8,3)=2
1360 E(8,4)=6*B1
1370 E(8,5)=0
1380 E(8,6)=0
1390 E(8,7)=-2
1400 E(8,8)=0
1410 E(8,9)=0
1420 NEXT J
1430 NEXT I
1440 FOR K=1 TO 7
1450 IF E (K,K)<>0 THEN GOTO 1550
1460 FOR I=K+1 TO 8
1470 IF E (I,K)<>0 THEN GOTO 1500
1480 NEXT I
1490 GOTO 1880
1500 FOR M=K TO 9
1510 F=E (I,M)
1520 E(I,M)=E(K,M)
1530 E(K,M)=F
1540 NEXT M
1550 FOR I=K+1 TO 8
1560 FOR J=K+1 TO 9

```


NOCIONES SOBRE EL MOVIMIENTO DE UN ROBOT

```

1570 E(I,J)=E(I,J)*E(K,K)-E(K,J)*E(I,K)
1580 NEXT J
1590 NEXT I
1600 NEXT K
1610 IF E(8,8)=0 THEN GOTO 1880
1620 FOR K=8 TO 2 STEP-1
1630 F=E(K,9)/E(K,K)
1640 G(K)=F
1650 FOR I=1 TO K-1
1660 E(I,9)=E(I,9)-E(I,K)*F
1670 NEXT I
1680 NEXT K
1690 X1=E(1,9)/E(1,1)
1700 CLS
1710 COLOR 2
1720 PRINT
1730 PRINT "COEFICIENTES DE LAS ECUACIONES RESULTANTES:"
1740 PRINT
1750 PRINT "A) ECUACION QUE DETERMINA EL TRAMO 1-2:"
1760 PRINT
1770 PRINT "e1 = ";X1;" + (";G(2);")t + (";G(3);")t^2 + (";G(4);")t^3"
1780 PRINT "v1 = "G(2);" + (";2*G(3);")t + (";3*G(4);")t^2"
1790 PRINT "a1 = "2*G(3);" + (";6*G(4);")t"
1800 PRINT:PRINT
1810 PRINT "B) ECUACION QUE DETERMINA EL TRAMO 2-3:"
1820 PRINT
1830 PRINT "e2 = ";G(5);" + (";G(6);")t + (";G(7);")t^2 + (";G(8);")t^3"
1840 PRINT "v2 = "G(6);" + (";2*G(7);")t + (";3*G(8);")t^2"
1850 PRINT "a2 = "2*G(7);" + (";6*G(8);")t"
1860 GOTO 1940
1870 COLOR 4
1880 PRINT "NO TIENE SOLUCION EL SISTEMA"
1890 PRINT
1900 PRINT "PULSAR RETORNO PARA REPETIR EL PROCESO"
1910 PRINT
1920 INPUT R
1930 GOTO 440
1940 PRINT:PRINT
1950 PRINT "PULSAR RETORNO PARA CONTINUAR"
1960 PRINT
1970 INPUT R
1980 CLS
1990 SCREEN 2
2000 DEF FN F(Z)=X1+G(2)*Z+G(3)*Z^2+G(4)*Z^3
2010 READ Z1,Z2
2020 READ Y1,Y2

```

```

2030 PRINT " GRAFICA DE DESPLAZAMIENTO ANGULARES"
2040 LINE (30,100)-(620,100)
2050 LINE (30,20)- (30,170)
2060 DZ=(Z2-Z1)/590
2070 DY=(Y2-Y1)/150
2080 FOR Z=Z1 TO B1 STEP DZ
2090 Y=FN F(Z)
2100 X3=INT((Z-Z1)/DZ+.05)
2110 Y3=INT((Y-Y1)/DY+.05)
2120 PSET (30+3*X3,100-Y3)
2130 NEXT Z
2140 FOR Z=Z1 TO 3*B1 STEP 1
2150 PSET (30+3*X3*Z/B1,175)
2160 NEXT Z
2170 FOR Z=Y1 TO 160 STEP 10
2180 PSET (25,170-Z)
2190 NEXT Z
2200 DATA 0,25,0,160
2210 DEF FN H(Z)=G(5)+G(6)*Z+G(7)*Z^2+G(8)*Z^3
2220 READ Z1,Z2
2230 READ Y1,Y2
2240 FORZ=Z1 TO B2 STEP DZ
2250 Y=FN H(Z)
2260 X3=INT((Z-Z1)/DZ+.05)
2270 Y3=INT((Y-Y1)/DY+.05)
2280 X4=INT((B1-Z1)/DZ+.05)
2290 PSET (30+3*X4+3*X3,100-Y3)
2300 NEXT Z
2310 DATA 0,25,0,160
2320 PRINT "PULSAR RETORNO PARA CONTINUAR"
2330 INPUT R5
2340 CLS
2350 DEF FN M(Z)=G(2)+2*G(3)*Z+3*G(4)*Z^2
2360 READ Z1,Z2
2370 READ Y1,Y2
2380 PRINT " GRAFICA DE VELOCIDADES"
2390 LINE (30,100)-(620,100)
2400 LINE (30,20)- (30,180)
2410 DZ=(Z2-Z1)/590
2420 DY=(Y2-Y1)/160
2430 FOR Z=Z1 TO B1 STEP DZ
2440 Y=FN M(Z)
2450 X3=INT((Z-Z1)/DZ+.05)
2460 Y3=INT((Y-Y1)/DY+.05)
2470 PSET (30+3*X3,100-Y3)
2480 NEXT Z

```

NOCIONES SOBRE EL MOVIMIENTO DE UN ROBOT

```

2490 FOR Z=Z1 TO 3*B1 STEP1
2500 PSET (30+3*X3*Z/B1,185)
2510 NEXT Z
2520 FOR Z=Y1 TO 160 STEP 10
2530 PSET (25,180-Z)
2540 NEXT Z
2550 DATA 0,25,0,160
2560 DEF FN N(Z)=G(6)+2*C(7)*Z+3*G(8)*Z^2
2570 READ Z1,Z2
2580 READ Y1,Y2
2590 FOR Z=Z1 TO B2 STEP DZ
2600 Y=FN N(Z)
2610 X3=INT((Z-Z1)/DZ+.05)
2620 Y3=INT((Y-Y1)/DY+.05)
2630 X4=INT((B1-Z1)/DZ+.05)
2640 PSET (30+3*X4+3*X3,100-Y3)
2650 NEXT Z
2660 DATA 0,25,0,160
2670 PRINT "PULSAR RETORNO PARA CONTINUAR"
2680 INPUT R6
2690 CLS
2700 DEF FN P(Z)=2*G(3)+6*G(4)*Z
2710 READ Z1,Z2
2720 READ Y1,Y2
2730 PRINT " GRAFICA DE ACELERACIONES"
2740 LINE (30,100)-(620,100)
2750 LINE (30,20)-(30,180)
2760 DZ=(Z2-Z1)/590
2770 DY=(Y2-Y1)/160
2780 FOR Z=Z1 TO B1 STEP DZ
2790 Y=FN P(Z)
2800 X3=INT((Z-Z1)/DZ+.05)
2810 Y3=INT((Y-Y1)/DY+.05)
2820 PSET (30+3*X3,100-Y3)
2830 NEXT Z
2840 FOR Z=Z1 TO 3*B1 STEP 1
2850 PSET (30+3*X3*Z/B1,185)
2860 NEXT Z
2870 FOR Z=Y1 TO 160 STEP 10
2880 PSET (25,180-Z)
2890 NEXT Z
2900 DATA 0,25,0,160
2910 DEF FN Q(Z)=2*G(7)+6*G(8)*Z
2920 READ Z1,Z2
2930 READ Y1,Y2
2940 FOR Z=Z1 TO B2 STEP DZ

```

```

2950 Y=FN Q(Z)
2960 X3=INT((Z-ZI)/DZ+.05)
2970 Y3=INT((Y-YI)/DY+.05)
2980 X4=INT((B1-ZI)/DZ+.05)
2990 PSET (30+3*X4+3*X3,100-Y3)
3000 NEXT Z
3010 DATA 0,25,0,160
3020 PRINT"PULSAR RETORNO PARA CONTINUAR"
3030 INPUT R
3040 CLS
3050 PRINT:PRINT:PRINT "***** PROGRAMA FINALIZADO *****"
3060 PRINT
3070 END

```

- (*) $\varnothing(t)$, $w(t)$ y $a(t)$ son equivalentes en nomenclatura tradicional a $\varnothing(t)$, $\dot{\varnothing}(t)$ y $\ddot{\varnothing}(t)$, posición, velocidad y aceleración angular respectivamente.