

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ALGECIRAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL E INGENIERÍA CIVIL  
GRUPO DE INVESTIGACIÓN TEP157 - MATERIALES COMPUESTOS



# **Aplicación del Problema Inverso de Conducción de Calor a la estimación del flujo en la zona de radiación de un horno tubular**

Trabajo de investigación que presenta  
**José Manuel Aguado Teixe**  
para la obtención del Grado de Doctor

Bajo la dirección de los doctores  
José María Gutiérrez Cabeza  
Juan Andrés Martín García

ALGECIRAS  
2017

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons  
Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 Internacional



*A mis hijos Luis y Adriana. Ellos son el verdadero motivo de este trabajo. Solo con esfuerzo se consiguen los sueños.*

*A mi esposa, sin cuyo apoyo no hubiera sido posible esta tesis.*



# **APLICACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO DE CONDUCCIÓN DE CALOR A LA ESTIMACIÓN DEL FLUJO EN LA ZONA DE RADIACIÓN DE UN HORNO TUBULAR**

Trabajo de investigación que presenta

**José Manuel Aguado Teixe**

para la obtención del Grado de Doctor

Bajo la dirección de los doctores

José María Gutiérrez Cabeza

Departamento de Física Aplicada

Juan Andrés Martín García

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Algeciras, Mayo de 2017



## ***Agradecimientos***

*A José María Gutiérrez Cabeza, director de esta tesis doctoral, por su aportación y constante ayuda durante estos años.*

*A Juan Andrés Martín, codirector de tesis, y Alfonso Corz, director del Grupo de Investigación de Materiales Compuestos, por la confianza puesta en mí.*

*A la Refinería "Gibraltar-San Roque" de CEPSA, por permitirme disponer de los datos experimentales del Capítulo 6.*

*Cualquier error que pudiera contener esta tesis es responsabilidad exclusiva de su autor.*



# Resumen

En esta tesis se aborda la estimación del flujo de calor en la zona de radiación de un horno tubular mediante la metodología del Problema Inverso de Conducción de Calor.

Partiendo de la formulación basada en temperatura del Teorema de Duhamel, se desarrolla un método matemático, al cual hemos denominado Método SOLS que, a partir de la temperatura superficial, puede estimar de forma muy eficaz el flujo de calor.

Utilizando como base este método, se ha desarrollado un método híbrido mediante el cual es posible estimar de manera online el flujo de calor. Con este método, al que denominamos Método SOLS Híbrido, se estima de manera continua la evolución temporal del flujo de calor local y sus perturbaciones.

Para el caso de hornos tubulares de proceso, la metodología se demuestra capaz de predecir las perturbaciones que localmente se producen en el flujo de calor, pudiendo ser utilizada como una herramienta adicional para supervisar y optimizar estos equipos. Aunque su aplicación se limita a aquellos puntos del horno en los que haya la suficiente instrumentación.

En el Capítulo 1 se presentan los principales aspectos que han motivado el desarrollo de esta tesis. Se hace un breve análisis del consumo energético en una refinería y del peso que tienen los hornos tubulares en este consumo. Se describen también las principales características de estos equipos. En el apartado 3º se estudia la problemática asociada al flujo de calor local en la zona de radiación y el método habitualmente empleado para estimar valores máximos. Finalmente, en el apartado 4º se describe el objetivo de la tesis y las aplicaciones prácticas que se derivan de ella.

En el Capítulo 2 se revisan los aspectos fundamentales del Problema Inverso de Conducción de Calor. Se estudia la formulación matemática de este tipo de problemas, sus dificultades matemáticas inherentes y algunos conceptos fundamentales sobre las técnicas de resolución.

En el apartado 4º se resuelve un problema sencillo de dominio completo mediante el método de especificación de función. El capítulo finaliza exponiendo algunas aplicaciones prácticas del problema inverso en la actualidad.

En el Capítulo 3 se describen los dos métodos matemáticos que se han desarrollado para resolver el problema inverso que se aborda en esta tesis. Se exponen los fundamentos de la metodología y el formalismo matemático de cada método. Posteriormente, cada método es validado numéricamente utilizando unos estimadores de error adecuados. Tras identificar el método más potente, denominado Método SOLS, este es comparado con el acreditado Método FSM, concluyéndose que el SOLS es el método más idóneo para abordar el problema inverso que se trata en esta tesis.

En el Capítulo 4 se expone la formulación recursiva del Método SOLS, la cual permite abordar problemas de larga duración (incluidas las aplicaciones online) con una carga computacional aceptable.

En el Capítulo 5 se estudia el denominado Principio Residual, procedimiento que posibilita sintonizar el parámetro de regularización a partir de los datos experimentales. Debido a que al Método SOLS no le es aplicable el Principio Residual, en el apartado 5º se define un método a propósito al que hemos denominado Método SOLS Híbrido. El método es híbrido en el sentido que utiliza metodología tanto del Método SOLS como del FSM.

En el Capítulo 6 se aplica el Método SOLS Híbrido a los tubos de shock de un horno real instalado en una refinería, para lo cual se obtienen previamente todas las propiedades necesarias. En el apartado 9 se estima la evolución temporal del flujo de calor a partir de los datos experimentales seleccionados y se obtienen conclusiones. También se define la metodología para aquellos casos en los que no se dispone de la desviación estándar  $\sigma$  de las medidas de temperatura superficial.

Finalmente, en el Capítulo 7 se extraen las conclusiones de la tesis y se proponen futuras líneas de trabajo.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	v
<b>Resumen</b>	vii
<b>Índice general</b>	ix
<b>Índice de figuras</b>	xii
<b>Índice de tablas</b>	xv
<b>Nomenclatura</b>	xvii
<b>Capítulo 1      Introducción</b>	
1.1    Introducción	<b>1</b>
1.2    Hornos tubulares de proceso	<b>3</b>
1.3    Flujo de calor local en hornos	<b>10</b>
1.4    Objetivo de la tesis	<b>15</b>
<b>Capítulo 2      Antecedentes</b>	
2.1    Introducción	<b>19</b>
2.2    Definición del IHCP	<b>20</b>
2.3    Dificultad del IHCP	<b>24</b>
2.3.1    Hipótesis estadísticas de los errores de medida	<b>30</b>
2.4    Generalidades sobre los métodos de resolución	<b>31</b>
2.4.1    Ejemplo de dominio completo	<b>36</b>
2.5    Aplicaciones prácticas	<b>41</b>

## **Capítulo 3      Metodología**

3.1	Introducción	45
3.2	Formulación matemática	47
3.3	Problema inverso	52
	3.3.1 Solución fundamental $u(x, t)$	54
3.4	Método Simple	58
	3.4.1 Validación numérica del Método Simple	60
3.5	Método SOLS	68
	3.5.1 Comparativa entre Método Simple y Método SOLS	72
3.6	Comparativa entre Método SOLS y Método FSM	74

## **Capítulo 4      Formulación recursiva del Método SOLS**

4.1	Introducción	77
4.2	Formulación recursiva	78
4.3	Validación del algoritmo reducido	84

## **Capítulo 5      Formulación híbrida del Método SOLS**

5.1	Introducción	91
5.2	El Principio Residual	92
5.3	Formulación recursiva del residuo	93
5.4	Determinación de la temperatura superficial calculada	95
5.5	Método SOLS Híbrido	99
5.6	Validación numérica del Método Híbrido	101

## **Capítulo 6      Aplicación práctica**

6.1	Introducción	111
6.2	Cálculo del coeficiente de transferencia de calor	113
6.3	Estimación de las propiedades del fluido	115
6.4	Características y propiedades del tubo	118
6.5	Estimación de la desviación estándar $\sigma$ de las medidas	120

6.6	Generalidades sobre combustión	123
6.7	Datos históricos de operación	127
6.8	Parámetros estacionarios del modelo	128
6.9	Estimación del flujo de calor en los tubos de shock	130
6.9.1	Sensibilidad al parámetro de regularización	134
<b>Capítulo 7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>137</b>
<b>Anexos</b>		<b>141</b>
Anexo 1.	Escalón unitario de flujo en coordenadas cartesianas	143
Anexo 2.	Escalón unitario de flujo seguido de perturbación triangular simétrica en coordenadas cartesianas	149
Anexo 3.	Escalón unitario de temperatura en coordenadas cilíndricas	157
Anexo 4.	Artículo publicado	165
<b>Bibliografía</b>		<b>167</b>



# Índice de figuras

## Capítulo 1

1.1	Sección de un horno tubular típico	4
1.2	Parámetros de diseño afectados por el flujo medio de calor	8

## Capítulo 2

2.1	Esquema del IHCP asociado a las ecuaciones (2.1)	22
2.2	Esquema del IHCP resuelto por Burggraf	25
2.3	Esquema del IHCP asociado a las ecuaciones (2.18)	37
2.4	Problemas directos para obtener las respuestas fundamentales	39

## Capítulo 3

3.1	Esquema del problema directo asociado a las ecuaciones (3.1)	48
3.2	Perfil del flujo de calor $q'(t')$	50
3.3	Esquema del problema directo asociado a las ecuaciones (3.2)	51
3.4	Perfil del flujo de calor adimensional $q(t)$	51
3.5	Medidas de temperatura consideradas como sucesión de escalones	53
3.6	Medidas de temperatura consideradas como una función continua	53
3.7	Familia de curvas $u(x, t)$ para instantes de tiempo crecientes	59
3.8	Campo de temperatura para distintos valores de $x$ y flujo de calor	62
3.9	Estimación de la perturbación con algoritmo MS1: $\sigma=0.022$ y $\Delta t=1$	64
3.10	Estimación de la perturbación con algoritmo MS1/2: $\sigma=0.022$ y $\Delta t=1$	65
3.11	Estimación de la perturbación con algoritmo MS1: $\sigma=0.067$ y $\Delta t=1$	65
3.12	Estimación de la perturbación con algoritmo MS1/2: $\sigma=0.067$ y $\Delta t=1$	66
3.13	Estimación completa con algoritmo MS1: $\sigma=0.067$ y $\Delta t=10$	66
3.14	Estimación completa con algoritmo MS1: $\sigma=0.067$ y $\Delta t=5$	67
3.15	Estimación de la perturbación con Método SOLS: $\sigma=0.022$ , $\Delta t=1$ y $r=18$	73
3.16	Estimación de la perturbación con Método SOLS: $\sigma=0.067$ , $\Delta t=1$ y $r=31$	74

3.17	Estimación de la perturbación con Método FSM: $\sigma=0.022$ , $\Delta t=1$ y $r=18$	76
3.18	Estimación de la perturbación con Método FSM: $\sigma=0.067$ , $\Delta t=1$ y $r=28$	76

## Capítulo 4

4.1	Evolución de los veinte primeros factores $F$	80
4.2	Diez primeros factores $F$ para valores de $B_i=0.1$ y $0.5$	84
4.3	Estimación completa con $\sigma=0.022$ , $\Delta t=10$ y $r=3$	85
4.4	Estimación de la perturbación con $\sigma=0.067$ , $\Delta t=10$ y $r=5$	86
4.5	Estimación completa con $\sigma=0.022$ , $\Delta t=1$ y $r=17$	86
4.6	Estimación de la perturbación con $\sigma=0.067$ , $\Delta t=1$ y $r=28$	87
4.7	Estimación sin optimizar con $\sigma=0.067$ , $\Delta t=1$ y $r=4$	87
4.8	Sesgo entre algoritmo reducido y completo ( $M=2400$ )	88
4.9	Sesgo entre algoritmo reducido y completo ( $m=60$ )	89
4.10	Sesgo entre algoritmo reducido y completo durante la perturbación	89

## Capítulo 5

5.1	Algoritmo del Principio Residual para un problema de dominio completo	94
5.2	Algoritmo del Principio Residual para un problema secuencial	102
5.3	Estimación completa para $\sigma=0.022$ , $\eta=10^{-5}$ , $\Delta t=0.3$ y $r_0=61$	105
5.4	Estimación completa para $\sigma=0.022$ , $\eta=10^{-3}$ , $\Delta t=0.3$ y $r_0=3$	105
5.5	Estimación completa para $\sigma=0.067$ , $\eta=10^{-5}$ , $\Delta t=0.3$ y $r_0=97$	106
5.6	Estimación completa para $\sigma=0.067$ , $\eta=10^{-3}$ , $\Delta t=0.3$ y $r_0=3$	106
5.7	Evolución del parámetro $r$ para $\sigma=0.067$ , $\eta=10^{-5}$ , $\Delta t=0.2$ y $r_0=182$	107
5.8	Estimación completa para $\sigma=0.067$ , $\eta=10^{-3}$ , $\Delta t=0.1$ y $r_0=18$	108
5.9	Estimación de la perturbación para $\sigma=0.067$ , $\eta=10^{-3}$ , $\Delta t=0.1$ y $r_0=18$	108
5.10	Estimación de la perturbación para $\sigma=0.067$ , $\eta=10^{-3}$ , $\Delta t=0.1$ y $r_0=188$	109

## Capítulo 6

6.1	Evolución de temperatura de skin y oxígeno en los humos	128
6.2	Evolución del residuo durante la estimación	131
6.3	Estimación completa durante cinco horas con $r_0=15$	132

6.4	Estimación durante la fase de optimización del exceso de aire con $r_0=15$	<b>132</b>
6.5	Máxima perturbación registrada de flujo de calor con $r_0=15$	<b>133</b>
6.6	Máxima perturbación registrada de flujo de calor con $r_0=7$	<b>135</b>
6.7	Máxima perturbación registrada de flujo de calor con $r_0=22$	<b>135</b>

## **Anexos**

A1.1	Esquema del problema escalón unitario de flujo	<b>143</b>
A1.2	Familia de curvas $T(x, t)$ para un escalón unitario de flujo	<b>147</b>
A2.1	Esquema del escalón unitario de flujo con perturbación	<b>149</b>
A2.2	Perfil de la excitación	<b>150</b>
A2.3	Dominio de las funciones $F_i$	<b>152</b>
A2.4	Familia de curvas $T(x, t)$ para escalón unitario de flujo con perturbación	<b>155</b>
A3.1	Esquema del escalón unitario de temperatura en cilíndricas	<b>158</b>
A3.2	Familia de curvas $T(r, t)$ para escalón unitario de temperatura	<b>163</b>



# Índice de tablas

## Capítulo 1

1.1	Consumos energéticos típicos (MW) de una refinería de 100.000 bpd	2
1.2	Valores de diseño admisibles de flujo medio de calor en la zona de radiación	9

## Capítulo 3

3.1	Estimadores de error para algoritmo MS1	63
3.2	Estimadores de error para algoritmo MS1/2	64
3.3	Estimadores de error con el Método SOLS	72
3.4	Estimadores de error con el Método FSM	75

## Capítulo 4

4.1	Estimadores de error con el Método SOLS reducido	85
-----	--	----

## Capítulo 5

5.1	Estimadores de error con el Método Híbrido ( $\eta=10^{-5}$ )	103
5.2	Estimadores de error con el Método Híbrido ( $\eta=10^{-3}$ )	104

## Capítulo 6

6.1	Curva de destilación ASTM D1160 de residuo atmosférico	115
6.2	Calor específico del fluido vs. temperatura	117
6.3	Conductividad térmica del fluido vs. temperatura	117
6.4	Viscosidad absoluta del fluido vs. temperatura	117
6.5	Conductividad térmica y calor específico vs. temperatura del TP316	119
6.6	Condiciones operativas estacionarias en los tubos de shock	128

6.7	Propiedades termofísicas estacionarias del fluido	<b>129</b>
6.8	Números de Reynolds y Prandtl	<b>129</b>
6.9	Estimaciones numéricas de la máxima perturbación del flujo de calor	<b>136</b>

# Nomenclatura

$A_p$	amplitud de la perturbación
$B_i$	número de Biot
$c_p$	calor específico
CFD	Computational Fluid Dynamics
$D$	estimador del sesgo
$D_i$	diámetro interior
$D_o$	diámetro exterior
$F$	factor adimensional (4.7d)
$F_c$	factor de variación circunferencial
$F_L$	factor de variación longitudinal
$F_T$	factor de variación por temperatura de pared
$\mathbf{F}$	vector de factores adimensionales
$\mathbf{F}_{red}$	vector $\mathbf{F}$ reducido
FSM	Function Specification Method
$h$	coeficiente de transferencia de calor
IHCP	Inverse Heat Conduction Problem
$k$	conductividad térmica
$L$	longitud característica
$M$	número total de pasos de tiempo
$n$	número reducido de componentes de la historia
OLS	Ordinary Least Square
$p$	perturbación
$Pr$	número de Prandtl
$q$	flujo de calor
$q_{R,max}$	flujo de calor máximo en zona de radiación
$q_{Rr,ave}$	flujo de calor medio por radiación en zona de radiación
$q_{Rc,ave}$	flujo de calor medio por convección en zona de radiación
$q_n$	flujo nominal
$\mathbf{q}$	vector de componentes del flujo
$\hat{\mathbf{q}}_{past}$	vector estimado de la historia del flujo

$\hat{\mathbf{q}}_{red}^{past}$	vector estimado reducido de la historia del flujo
$r$	parámetro de regularización
$r_0$	valor central del parámetro de regularización
$R$	residuo
$R_0$	residuo inicial
$Re$	número de Reynolds
$S$	estimador del error total
SOLS	Sequential Ordinary Least Square
$t$	tiempo
$t_f$	duración del problema inverso
$T$	temperatura
$T_0$	temperatura inicial
$T_f$	temperatura de película
$T_L$	temperatura impuesta
$T_w$	temperatura de pared
$T_{g,ave}$	temperatura absoluta media del flue-gas
$T_{tm}$	temperatura absoluta de pared del tubo
$T_{tm,ave}$	temperatura absoluta media de pared del tubo
$T_\infty$	temperatura del fluido
$u$	respuesta al escalón unitario de temperatura superficial
$u_i$	números aleatorios
$u'$	derivada espacial de $u$
$x$	coordenada espacial
$Y$	medida de temperatura
$Z$	factor adimensional (3.34)

## Símbolos griegos

$\alpha$	difusividad térmica
$\beta_m$	autovalor m-ésimo
$\Delta t$	paso de tiempo
$\delta$	tolerancia
$\Delta\Phi$	respuesta a un pulso unitario de flujo

$\varepsilon$	error aleatorio
$\eta$	error admisible en la última estimación
$\lambda$	variable muda de integración
$\sigma$	desviación estándar
$\sigma_q$	estimador de amplificación de errores
$\rho$	densidad
$\rho_m$	contribución al residuo en paso de tiempo m-ésimo
$\mu$	viscosidad absoluta
$\mu_w$	viscosidad absoluta a temperatura de pared

## Subíndices

$m$	paso de tiempo actual
-----	-----------------------

## Superíndices

'	variable dimensional
·	derivada temporal
^	estimación
$T$	matriz traspuesta



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

En una refinería de petróleo se emplea una cantidad considerable de energía en transformar el petróleo crudo en una gama de productos que cumplen unas determinadas especificaciones comerciales.

El margen económico de una refinería se obtiene descontando al precio de venta de esos productos los costes de la materia prima (incluido el transporte del crudo) y los costes asociados a su fabricación. Estos últimos se clasifican normalmente en dos grandes grupos: costes fijos y costes variables.

En los costes fijos se incluyen usualmente todos aquellos que están asociados a mantener la disponibilidad operacional de la refinería, como por ejemplo los salarios del personal, el mantenimiento de las instalaciones o la reposición de catalizadores. Estos costes se producen independientemente de que la refinería se encuentre parada o en funcionamiento.

En los costes variables suelen incluirse los que dependen del nivel de utilización de la refinería, como por ejemplo el consumo de combustible o la compra de electricidad. La mayoría de estos costes están asociados al consumo energético. A diferencia de los costes fijos, estos disminuyen enormemente cuando la refinería está parada.

Según la referencia [42], una refinería con una capacidad de destilación de 100.000 barriles/día (bpd) que alcance el nivel de excelencia en eficiencia energética, consume aproximadamente el 5% de la energía disponible en el crudo que destila. Por el contrario, en una refinería de las menos eficientes, ese porcentaje puede llegar a ser del 8%.

Suponiendo un coste medio del combustible de 100 \$/t, lo anterior implica que los costes energéticos de la refinería muy eficiente serán aproximadamente de 25 millones de dólares al año mientras que los de la poco eficiente ascenderán a unos 40 millones, es decir, 15 millones de dólares al año adicionales en costes variables.

La volatilidad actual de los precios del crudo y el exceso de capacidad de refino existente pueden causar que, en determinadas circunstancias, una refinería poco eficiente no pueda conseguir un margen neto positivo, lo cual puede cuestionar seriamente su sostenibilidad.

De acuerdo con [42], una refinería de 100.000 bpd con una eficiencia energética media consume aproximadamente el 6.3% de la energía del crudo que destila, lo que equivale aproximadamente a una potencia de 465 MW. El reparto de su consumo energético se indica en la tabla siguiente:

<b>Hornos de proceso</b>	<b>256</b>
<b>Calderas:</b>	<b>163</b>
Vapor para calentamiento	146
Vapor para accionamiento	17
<b>Electricidad</b>	<b>46</b>
	<b>465</b>

Tabla 1.1. Consumos energéticos típicos (MW) de una refinería de 100.000 bpd

Debido a que la temperatura es una variable fundamental en la mayoría de los procesos de una refinería, el consumo asociado a los procesos de calentamiento supone aproximadamente el 86% del consumo energético total de la refinería.

Según la Tabla 1.1, los hornos de proceso suponen por si solos el 55% del consumo total. Por tanto, una herramienta como la desarrollada en esta tesis, que contribuye a la mejora de la supervisión y optimización de estos equipos, apoyará sin duda a la reducción del consumo energético de la refinería.

Optimizar la operación de un horno consiste básicamente en aportar el calor requerido por el proceso, minimizando al mismo tiempo sus costes energéticos, las emisiones a la atmósfera y operando en todo momento en condiciones seguras y estables.

## 1.2 Hornos tubulares de proceso

Los hornos tubulares de proceso son frecuentemente utilizados en las refinerías para aportar grandes cantidades de calor a los fluidos de proceso. El calor puede ser requerido para realizar una destilación (calor sensible y latente), una determinada reacción química en presencia de catalizador (calor sensible) o bien el craqueo térmico de un fluido (calor sensible, latente y de reacción).

Estos equipos funcionan esencialmente como grandes intercambiadores de calor. El calor lo aporta la combustión de un combustible (líquido o sólido) en unos quemadores ubicados en el interior de una gran cámara de combustión. Posteriormente, ese calor es transferido desde los gases calientes generados en la combustión (*flue gas*), al fluido que circula por el interior de un haz tubular.

Como en un intercambiador de calor, el diseño de un horno implica realizar un balance entre el calor liberado en la combustión y el calor que necesita absorber el fluido. Si bien, a diferencia de un intercambiador, en el que el modo de transferencia predominante es la convección, en un horno una gran parte del calor se transfiere por radiación.

Los gases calientes generados en la combustión transfieren calor a la pared exterior de los tubos por radiación y convección. En el tubo, el calor se transmite por conducción desde la pared exterior a la pared interior. Finalmente, dentro del tubo el calor se transmite por convección desde la pared interior hacia el fluido.

Desde un punto de vista general, en un horno tubular se distinguen tres grandes secciones: la zona de radiación, la zona de convección y la chimenea. En la figura 1.1 se representan estas secciones para un típico horno de proceso de una refinería.

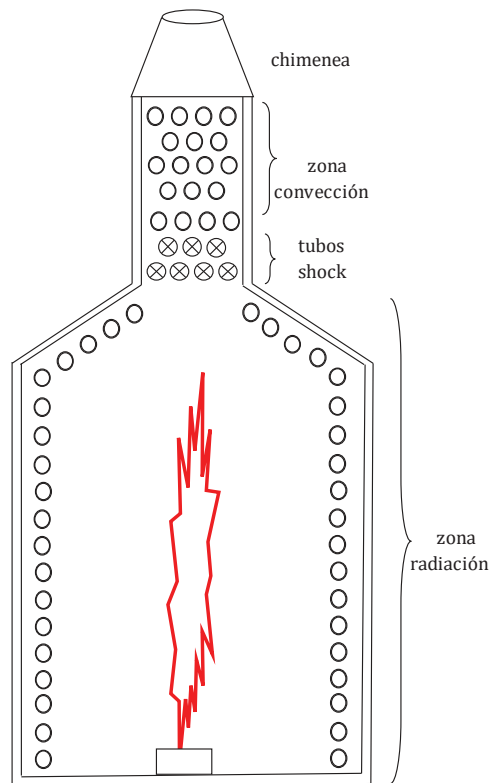


Figura 1.1. Sección de un horno tubular típico

El fluido entra por la parte superior de la zona de convección y circula a través de ella en contracorriente con el *flue gas*. En esta zona el intercambio de calor es casi exclusivamente por convección.

Cuando el fluido entra en los tubos de shock y mientras circula por la zona de radiación, el intercambio de calor se produce mayoritariamente por radiación. Si bien, en el caso de los tubos de shock existe también un intercambio relevante por convección.

La zona de radiación es esencialmente una gran cámara de combustión donde están instalados los quemadores y los tubos por los que circula el fluido. Estos tubos están separados unos de otros y conectados entre sí mediante codos, de forma que parte de la radiación procedente de la llama alcanza también las paredes del horno.

Las paredes del horno, tanto de la zona de radiación como convección, están recubiertas de un material refractario que proporciona un adecuado aislamiento térmico del exterior. Las pérdidas de calor por conducción a través de estas paredes son típicamente entre el 1 y 3% de la energía liberada en la combustión, dependiendo lógicamente del estado de conservación del refractario.

Al nivel de temperatura que tiene el *flue gas* en la zona de radiación, el modo de transferencia predominante es la radiación. Aunque también existe cierta transferencia por convección, esta es bastante menos relevante, a excepción de en los tubos de shock. Por tanto, en esta zona los tubos se disponen de manera que se asegure una absorción lo más uniforme y eficiente posible de la radiación.

En la zona de radiación se encuentran los quemadores, en los que se mezcla el combustible con el aire y se produce la combustión. Normalmente se instalan en el suelo del horno, aunque también hay aplicaciones en las que se instalan en las paredes o en el techo.

Los tubos están montados a una cierta distancia de las paredes, de manera que reciben radiación por toda su circunferencia. En la cara enfrentada al quemador reciben la radiación directa de la llama, mientras que en la cara opuesta reciben la re-radiación procedente del refractario que recubre las paredes.

La magnitud de esta re-radiación depende de la separación entre tubos. Cuanto mayor sea su separación, mayor será la radiación que alcanza al refractario y por tanto la re-radiación que reciben los tubos. De esta manera, se consigue un flujo de calor más homogéneo a lo largo de la circunferencia del tubo. Si bien, esto tiene el inconveniente de que incrementa el tamaño de la envolvente y por tanto el coste del horno.

Lo habitual será que el flujo de calor a lo largo de la circunferencia del tubo no sea uniforme, alcanzándose el valor máximo en la cara expuesta a la llama. Para evitar esto, en algunos servicios críticos se instalan los tubos en el centro con quemadores a ambos lados. De esta manera se asegura un reparto lo más homogéneo posible del flujo de calor a lo largo de la circunferencia del tubo.

Alrededor del 60 al 70% de la energía liberada en la combustión se recupera en la zona de radiación, lo que significa que la temperatura del *flue gas* a la salida de esta zona es todavía bastante alta, típicamente entre 700 y 1000 °C.

Para recuperar la mayor cantidad posible de calor del *flue gas*, a la salida de la zona de radiación se le hace pasar por una zona de convección. En esta zona, la temperatura del *flue gas* es bastante inferior a la que tiene en la zona de radiación, por lo que el calor se transfiere casi exclusivamente por convección.

Por esta razón, los tubos de esta zona se disponen de manera que el *flue gas* tenga una alta velocidad y turbulencia, con el objetivo de maximizar el coeficiente de transferencia de calor  $h$  en la superficie exterior del tubo. Debido a que el lado del *flue gas* es el que tiene mayor resistencia térmica, los tubos suelen incorporar superficie extendida en su pared exterior (aletas o pitones) para aumentar la superficie de intercambio.

La eficiencia de un horno con zona convectiva es obviamente superior a la de uno que no disponga de ella. La eficiencia adicional que se consigue dependerá de la temperatura de entrada del fluido, ya que el *flue gas* no puede enfriarse por debajo de esa temperatura.

En algunos servicios, la temperatura de entrada del fluido es demasiado alta como para poder recuperar una fracción importante del calor sensible del *flue gas*. En ese caso, suele instalarse en la zona de convección un haz tubular de generación de vapor, o bien, si se justifica económicamente, un precalentador estático de aire.

Entre la zona de radiación y convección se encuentran los denominados tubos de shock, cuya función es la de proteger a los tubos de la zona de convección de un excesivo flujo radiante. A diferencia del resto de tubos de la zona de radiación, en los que el flujo por convección es relativamente pequeño, en estos tubos el flujo por convección es bastante significativo. Por tanto, se presta especial atención a su diseño debido al gran flujo de calor que reciben tanto por radiación como por convección.

La chimenea se diseña para evacuar a la atmósfera, con la menor pérdida de carga posible, el *flue gas* frío que sale de la zona de convección.

Por motivos de seguridad, el interior del horno opera siempre a una presión ligeramente inferior a la atmosférica (tiro). Si operase a presión positiva, debido a que no es estanco, habría un flujo continuo de gases calientes al exterior a través de las aberturas, lo que provocaría el sobrecalentamiento y corrosión de la estructura de acero.

Esta depresión la genera la altura de la chimenea, la cual debe generar un tiro suficiente tanto para que entre el aire de combustión a los quemadores, como para que circule el *flue gas* a través de las zonas de radiación y convección.

Los objetivos prioritarios durante la fase de diseño de un horno son los siguientes:

- Aportar el calor requerido por el fluido
- Consumir el mínimo combustible posible
- Minimizar el coste de inversión
- Automatizar lo máximo posible su operación
- Asegurar una vida útil adecuada y con bajos costes de mantenimiento

En el diseño de un horno existen múltiples variantes dependiendo de la geometría de la zona de radiación (cilíndrica o tipo cabina), de las posibles disposiciones de los tubos (horizontal, vertical, helicoidal, en forma de U, etc.) y de la ubicación de los quemadores (suelo, pared, techo). Estas múltiples configuraciones hacen posible que cada horno se diseñe a medida del servicio al que se destina.

El flujo medio de calor en la zona de radiación es esencialmente el primer paso en el diseño de un horno. Este flujo se define como el calor que debe ser absorbido por el fluido en la zona de radiación dividido por la superficie exterior de los tubos de esa zona.

Cuanto mayor sea este flujo, menor será la superficie expuesta y por tanto el coste de inversión del equipo. Si bien, cuando existen elevados flujos de calor en la zona de radiación, pueden originarse una serie de problemas durante la operación del equipo que repercutirán negativamente en la economía del proceso (menor tiempo entre paradas por mantenimiento).

La figura 1.2 extraída de la referencia [48], muestra el impacto del flujo medio de radiación sobre varios parámetros de diseño del horno.

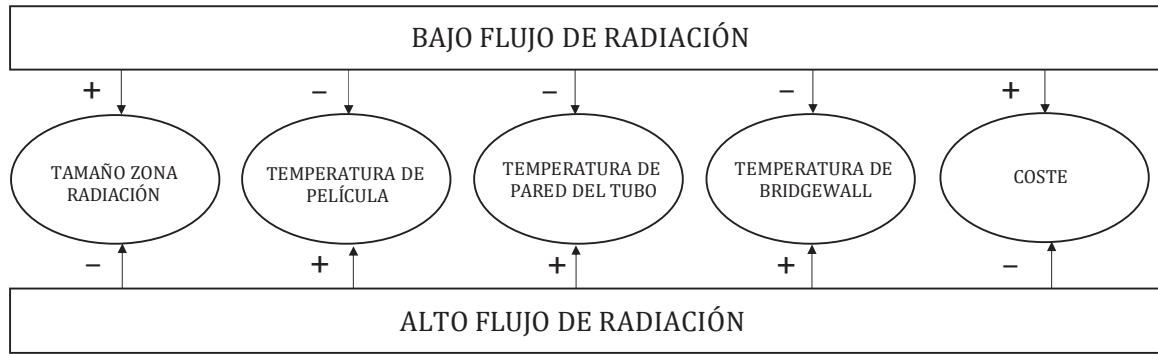


Figura 1.2. Parámetros de diseño afectados por el flujo medio de calor

En los diseños con un mayor flujo medio de calor, las llamas ocupan prácticamente todo el volumen de la zona de radiación, favoreciendo que estas puedan alcanzar eventualmente a algún tubo y provocar su sobrecalentamiento. La exposición prolongada de los tubos a altos flujos de calor, si no se corrige, puede causar su rotura y el consecuente riesgo de incendio.

También estarán afectados los soportes de los tubos y el refractario, que tendrán una vida útil más corta como consecuencia de la exposición a altos flujos de calor.

Aunque la temperatura del tubo es el parámetro fundamental desde el punto de vista del diseño, dado la dificultad que implica estimarla durante la fase inicial del diseño, en su lugar suele especificarse un valor admisible de flujo medio de calor en la zona de radiación.

La selección de este valor máximo depende del tipo de proceso, de las condiciones de operación y de la máxima temperatura de película permitida. Estos valores admisibles de flujo medio son el resultado de la experiencia acumulada a lo largo de años de operación en los diferentes servicios.

En la Tabla 1.2 se exponen los flujos medios (basados en el diámetro exterior del tubo) que se consideran en el diseño de algunos servicios típicos de refinería según la referencia [43].

Si bien, hay que tener en cuenta que debido a que la distribución del flujo de calor no es homogénea, en algunos puntos de la zona de radiación los valores locales del flujo pueden ser bastante superiores a los que se indican en la Tabla 1.2.

SERVICIO	q (kW/m <sup>2</sup> )
Fluido térmico	31,5
Destilación atmosférica	39
Destilación a vacío	29
Reboiler	39
Hidrotratamiento	35
Reformado catalítico	35
Hidrosulfuración	35
Visbreaking	25
Cracking térmico	25
Recalentamiento vapor	39
Lubricantes	25

Tabla 1.2. Valores de diseño admisibles de flujo medio de calor en la zona de radiación

La distribución del flujo de calor en la zona de radiación depende de varios factores:

- 1) La temperatura del fluido no es uniforme, siendo mayor a la salida de la zona de radiación que a la entrada. Esto afecta a la capacidad con la que el fluido refrigera el tubo y por tanto a su temperatura, que es la que en última instancia determina el flujo de calor que recibe.
- 2) El coeficiente de transferencia  $h$  del fluido también varía a lo largo de la zona de radiación debido a su dependencia con la temperatura, presión, velocidad y grado de vaporización del fluido. Como en el caso anterior, el coeficiente  $h$  afecta a la capacidad de refrigeración del fluido y por tanto a la temperatura del tubo.
- 3) La temperatura del *flue gas* no es homogénea a lo largo de la zona de radiación. Esta varía desde valores máximos en la proximidad de la llama hasta un valor mínimo a la salida de la zona de radiación (temperatura de *bridgewall*).
- 4) El ángulo con el que los tubos reciben la radiación depende de la orientación del tubo respecto a los quemadores, siendo el flujo máximo cuando la incidencia es normal (ley de Lambert).

- 5) La forma de la llama, especialmente su altura, influye considerablemente en la distribución del flujo de calor. La forma depende de factores tales como el tipo de combustible, la tecnología del quemador, el exceso de aire o el movimiento de recirculación del *flue gas* en la zona de radiación (convección natural).
- 6) La emisividad de la llama también depende del tipo de combustible, siendo más alta en los combustibles líquidos que en los gaseosos. Normalmente, con combustibles gaseosos se obtiene un reparto más homogéneo del flujo que con líquidos.

Parámetros del horno tales como la esbeltez (relación entre altura y anchura), la distancia de los tubos a los quemadores o la disposición de los tubos en la zona de radiación, son optimizados durante la fase de diseño para obtener una distribución del flujo lo más homogénea posible.

### 1.3 Flujo de calor local en hornos

En algunos hornos de destilación a vacío se dan problemas severos de coquización a pesar de que estos operan a temperaturas de salida moderadas (400-405 °C) y flujos medios de calor relativamente bajos (25 kW/m<sup>2</sup>). En esos hornos es necesario interrumpir el proceso cada dos años para limpiar el carbón (coque) depositado en las paredes interiores de los tubos [51]. Esta operación de limpieza se denomina decoquizado.

El coque se genera debido a la existencia de puntos calientes (*hot spots*) en los tubos del horno que provocan el sobrecalentamiento local del fluido, causando que este se descomponga térmicamente en carbón y gas. En la referencia [63] se hace un exhaustivo análisis de este fenómeno.

Por el contrario, existen hornos de destilación a vacío que operan a temperaturas de salida de hasta 420 °C y flujos medios de 35 kW/m<sup>2</sup>, a los cuales es suficiente decoquizarlos cada cuatro años [51].

Por tanto, de las experiencias anteriores se deduce que parámetros tales como la temperatura de salida o el flujo medio de calor, no aportan la suficiente información como para predecir la existencia de *hot spots* en el horno.

Esto se debe a que estos puntos (apreciables visualmente por una tonalidad más rojiza del tubo) son fenómenos locales y por tanto imposibles de predecir a partir de parámetros globales.

El coque va depositándose en forma de capa sobre la cara interior del tubo, añadiendo una resistencia térmica adicional a la conducción de calor y disminuyendo la capacidad de refrigeración del tubo por el fluido. Este fenómeno provoca el incremento de la temperatura del metal (Tube Metal Temperature: TMT).

En un horno, en el que en algunos de sus tubos de la zona de radiación existan deposiciones de coque en su interior, para poder seguir entregando la misma potencia térmica al fluido, será necesario incrementar el flujo de calor, lo que incrementará aún más la TMT. Se produce por tanto un efecto de realimentación positiva, ya que al aumentar la temperatura del metal se acelera también la coquización del fluido.

La TMT irá incrementándose progresivamente hasta que se alcance la máxima temperatura permitida por la metalurgia del tubo, momento en el que se deberá parar el horno para realizar su decoquizado. Al tiempo entre estas paradas periódicas se le denomina *run length*.

Salvo aquellos procesos concebidos específicamente para craquear térmicamente el fluido, en los que puede ser más interesante reducir el *run length* a costa de una mayor severidad de operación, en el resto de procesos de una refinería lo que habitualmente interesa es que el *run length* sea lo mayor posible.

Cuando los tubos de un horno operan durante un tiempo prolongado a altas temperaturas puede producirse su rotura [58]. Esta circunstancia, además de la necesaria parada del proceso, supone un riesgo potencial tanto para las personas como la instalación, motivo por el que las temperaturas de metal (también denominadas temperaturas de *skin*) son monitorizadas rutinariamente durante la operación de un horno.

Un efecto importante derivado de la deposición de coque es la disminución de la eficiencia del horno. Ya que para incrementar el flujo de calor en la zona de radiación es necesario aportar más combustible.

A medida que va coquizándose progresivamente el horno, irá aumentando la temperatura con la que el *flue gas* abandona la zona de radiación. Inicialmente, esa mayor energía del *flue gas* puede ser recuperada en la zona de convección, si bien, a partir de un determinado grado de coquización, la zona de convección ya no es capaz de recuperar totalmente ese exceso, haciendo que los humos salgan por la chimenea a una mayor temperatura, con la consecuente disminución de la eficiencia del horno.

En un horno tubular, el fluido es calentado por convección al contacto con la superficie interior del tubo, lo que implica que su temperatura de película  $T_f$  es siempre superior a la del fluido  $T_\infty$ . Como consecuencia de ello, el coque siempre se genera primero en la película de fluido, motivo por el que en algunos servicios se fija esta temperatura como un parámetro de diseño. En estos hornos, el perfil del flujo de calor es especialmente importante, debido a que si el calor no se aplica uniformemente pueden aparecer *hot spots* donde el flujo sea localmente mayor.

Si en punto del tubo se conoce la temperatura del fluido  $T_\infty$ , el coeficiente de transferencia de calor  $h$  (referido a la superficie interior) y el flujo de calor en la cara exterior  $q'$ , entonces la temperatura de película  $T_f$  viene dada por la siguiente expresión:

$$T_f = T_\infty + \frac{q' D_o}{h D_i} \quad (1.1)$$

Donde  $D_i$  y  $D_o$  son respectivamente los diámetros interior y exterior del tubo.

En un determinado punto del horno, el flujo es función de la temperatura local de metal del tubo y de la temperatura local del *flue gas*. El flujo por radiación depende de la diferencia de la cuarta potencia de ambas temperaturas (Ley de Stefan-Boltzman), mientras que el flujo por convección lo hace de la diferencia de temperaturas (Ley de enfriamiento de Newton).

En muchos hornos se mide la temperatura del *flue gas* a la salida de la zona de radiación (denominada temperatura de *bridgewall*), al objeto de servir de guía del grado de ensuciamiento de los tubos de esta zona. Este ensuciamiento puede ser debido tanto a coquizaciones en el interior de los tubos como a deposiciones de productos de combustión en su cara exterior, esto último normalmente solo en el caso de combustibles líquidos.

A lo largo del *run length*, esta temperatura de *bridgewall* aumenta progresivamente debido a este ensuciamiento. Si bien, el valor absoluto de esta medición no se considera muy fiable debido a la re-radiación de las superficies próximas, aceptándose errores típicos entre 65 y 95 °C [87].

Aunque el valor medio del flujo en la zona de radiación es un parámetro clave en el diseño de un horno, se ha visto que no aporta suficiente información para predecir la existencia de puntos en los que el flujo local puede ser bastante mayor.

Por ello, para los hornos construidos según el Standard 560 del API (American Petroleum Institute), se establece en el Standard 530 un método empírico que permite estimar el máximo valor del flujo de calor a partir del valor medio.

Para estimar el flujo de calor máximo  $q_{R,max}$  en la zona de radiación, API-530 utiliza la siguiente expresión:

$$q_{R,max} = F_c F_L F_T q_{Rr,ave} + q_{Rc,ave} \quad (1.2)$$

Siendo:

$F_c$  el factor que tiene en cuenta la variación circunferencial del flujo.

$F_L$  el factor de variación longitudinal del flujo (con la altura).

$F_T$  el factor de variación de temperatura del tubo.

$q_{Rr,ave}$  el flujo de calor medio por radiación basado en la superficie exterior.

$q_{Rc,ave}$  el flujo de calor medio por convección basado en la superficie exterior.

El factor de variación circunferencial  $F_c$  depende del espaciado de los tubos y de la disposición de estos. La expresión (1.2) considera implícitamente que el flujo medio de calor por convección es uniforme alrededor de la circunferencia del tubo, aunque en la realidad será mayor en la cara del tubo enfrentada al refractario, lo cual contribuirá a disminuir la variación circunferencial del flujo.

El factor de variación longitudinal  $F_L$  varía habitualmente entre 1 y 1.5. En hornos con una distribución homogénea del flujo tiene un valor próximo a la unidad, mientras que en los que existen grandes variaciones puede llegar a 1.5.

El factor de temperatura de metal  $F_T$  es inferior a la unidad en aquellos tubos con altas temperaturas de metal y superior en el caso contrario. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$F_T = \frac{T_{g,ave}^4 - T_{tm}^4}{T_{g,ave}^4 - T_{tm,ave}^4} \quad (1.3)$$

Siendo:

$T_{g,ave}$  temperatura absoluta media del *flue gas*.

$T_{tm}$  temperatura absoluta del tubo.

$T_{tm,ave}$  temperatura absoluta media de los tubos de la zona de radiación.

En los hornos diseñados según API, el valor máximo del flujo en la zona de radiación excede típicamente al valor medio en un factor de 1.8. El punto de máximo flujo se localiza normalmente a un 1/3 de la altura total de la zona de radiación (medida desde el nivel de los quemadores).

El método estándar para simular un horno y habitualmente implementado en la mayoría de los simuladores comerciales, es el método multizona de Hottel, denominado así porque la zona de radiación se divide verticalmente en varias subzonas de igual altura, lo suficientemente pequeñas para considerar homogéneas la temperatura y propiedades del *flue gas*.

El método multizona es bastante fiable para el cálculo de flujos medios de calor, por lo que puede utilizarse en combinación con la expresión (1.2) de API-530 para estimar valores máximos de flujo en los tubos de cada subzona.

En la referencia [56] se comparan los flujos máximos de calor que se obtienen con el método multizona frente a los calculados mediante un análisis CFD (Computational Fluid Dynamic). Se concluye que, aunque ambos métodos obtienen valores medios de flujo similares, existe sin embargo bastante discrepancia a la hora de estimar valores máximos locales.

En concreto, para el caso de los tubos de shock de uno de los hornos estudiados (H2001), el método multizona en conjunción con API-530 proporciona un valor considerablemente inferior al que proporciona el análisis CFD (48.9 vs. 67.8 kW/m<sup>2</sup> respectivamente).

La explicación que se da a esta diferencia de valores es que los tubos de shock de este horno reciben un gran flujo de calor como consecuencia de la altura de las llamas, por lo que en estas circunstancias, el método multizona es incapaz de estimar con fiabilidad el flujo máximo, a diferencia, según los autores, de un análisis CFD.

## 1.4 Objetivo de la tesis

En esta tesis se estudia la estimación a lo largo del tiempo del flujo de calor local en la zona de radiación de un horno tubular mediante la metodología del Problema Inverso de Conducción de Calor (Inverse Heat Conduction Problem: IHCP).

Como se vio en el apartado anterior, en el caso de los tubos de shock, los valores de flujo obtenidos a partir de un análisis CFD pueden ser bastante superiores a los que se obtienen con el método multizona.

Por tanto, el método desarrollado en esta tesis proporciona otro método adicional con el que poder estimar el flujo de calor en esos tubos.

Cuando se simula un horno, independientemente del método utilizado, se mantienen fijas todas las variables, por lo que se obtienen resultados en estado estacionario. A diferencia de

esto, el método desarrollado en esta tesis utiliza lecturas procedentes de la instrumentación del horno, lo que le permite estimar de forma dinámica el flujo de calor y por tanto sus perturbaciones.

Puesto que el método utiliza mediciones procedentes de instrumentos, solo es posible aplicarlo en aquellos puntos del horno donde haya la suficiente instrumentación. En concreto se requiere:

- 1) Haya instalado un sensor de temperatura para medir localmente la temperatura del metal. A esta temperatura se la denomina temperatura de *skin*.
- 2) En la proximidad del termopar de *skin* se encuentre instalado otro sensor que mida la temperatura del fluido.
- 3) Conocer el caudal del fluido que circula por el tubo.

De acuerdo con la forma en la que se opera normalmente un horno, algunas de estas variables tales como la temperatura y el caudal del fluido serán promediadas, mientras que en el caso de la temperatura de *skin* será refrescada continuamente a la misma frecuencia de lectura que la del sistema de control del proceso.

La mayoría de los hornos tubulares incorporan esta instrumentación como mínimo en dos puntos: los tubos de salida y los de shock. Por ello, una vez obtenido el coeficiente local de transferencia  $h$ , el tratamiento es totalmente idéntico en ambos casos. Como se explicará en detalle en el Capítulo 6, se utilizará la correlación de API-530 para el cálculo de  $h$ .

En el Capítulo 6 se aplica el método a un horno real de destilación a vacío. En este servicio, debido a que el fluido vaporiza en algún punto de la zona de radiación, es mucho más fiable el cálculo de  $h$  a nivel de los tubos de shock (donde solo existe fase líquida) que a la salida del horno (donde coexisten ambas fases). Por este motivo, el método será aplicado exclusivamente a los tubos de shock.

La estimación local del flujo de calor en los tubos de shock de un horno tiene las siguientes aplicaciones prácticas:

- 1) Supervisar, mientras se optimiza el exceso de aire, que no se alcanzan valores excesivos del flujo de calor en los tubos de shock.
- 2) Mejorar la supervisión del horno durante la operación normal y en los cambios de carga o de condiciones operativas.
- 3) En hornos que puedan consumir varios combustibles, evaluar el impacto sobre la distribución del flujo de calor en función del tipo de combustible.
- 4) De acuerdo con la referencia [57], determinando la altura a la que se produce el máximo flujo de calor y conociendo el flujo local en un determinado punto (como por ejemplo en los tubos de shock) es posible determinar la curva de perfil de flujo longitudinal en la zona de radiación.

De las aplicaciones anteriores, la primera es sin duda la más interesante, ya que proporciona una nueva herramienta con la que supervisar que al reducir el exceso de aire en ningún momento se sobrepasa en los tubos de shock el valor máximo de flujo de calor establecidos en el diseño del horno.

Como se verá en el Capítulo 6, la reducción del exceso de aire de un horno está directamente relacionada con la mejora de su eficiencia y por tanto con la disminución del consumo de combustible.

Sin embargo, una mejora de eficiencia no será tal, si al hacerlo se está produciendo un exceso de flujo de calor en los tubos de shock que desembocará al cabo de un determinado tiempo en la coquización de esos tubos.

Coquización, que como se ha visto en el apartado interior, no solo requerirá interrumpir el proceso para la limpieza del horno, sino que además provocará una pérdida de eficiencia.

En el Capítulo 6 será estudiado en detalle un caso real de esta primera aplicación.



## Capítulo 2

### Antecedentes

#### 2.1 Introducción

Como se ha explicado en el capítulo anterior, el objetivo de esta tesis es estimar a lo largo del tiempo el flujo de calor local en la zona de radiación de un horno tubular a partir de medidas transitorias de la temperatura superficial de sus tubos.

Este problema puede considerarse como un caso “limite” del IHCP en el sentido de que el sensor se ubica en la superficie del sólido, en lugar de hacerlo en el interior como ocurre en el problema clásico.

Desde un punto de vista general, los problemas inversos de conducción de calor se clasifican en dos tipos:

- Estimación de parámetros
- Estimación de funciones

En los problemas inversos de estimación de parámetros, el problema se enfoca a la estimación de un número reducido de parámetros tales como: propiedades termofísicas o geométricas, generación interna de energía, condiciones iniciales, etc. En este caso, el sistema es sometido a una excitación controlada y en función de su respuesta se estiman estos parámetros.

En el caso de los problemas inversos de estimación de funciones, el ejemplo clásico lo constituye el denominado IHCP (Inverse Heat Conduction Problem), cuya aplicación típica es la estimación de la evolución del flujo de calor o de la temperatura en la superficie de un sólido, utilizando medidas transitorias de temperatura tomadas en su interior.

Formalmente, el problema inverso que se aborda en esta tesis no se cataloga exactamente en ninguno de estos dos tipos.

Claramente, la estimación del flujo de calor en los tubos de un horno no es un problema de estimación de parámetros, ya que implica estimar el comportamiento de una función a lo largo del tiempo y por tanto de un considerable número de parámetros.

Por otro lado, aunque existen muchas similitudes con el clásico IHCP, tampoco se identifica exactamente con él, ya que en nuestro caso el sensor no se encuentra en el interior del sólido, sino que se ubica en una de sus superficies (la cara del tubo enfrentada a la llama).

## **2.2 Definición del IHCP**

Cuando se conocen las condiciones iniciales, las condiciones de contorno (variables en el tiempo) y las propiedades termofísicas, mediante técnicas analíticas de la física-matemática o mediante métodos numéricos, puede determinarse el campo de temperatura en el interior del sólido en cualquier instante. Este problema clásico se denomina problema directo de conducción de calor.

En el problema directo lo que se pretende es determinar el campo de temperatura en el interior del sólido a partir de una determinada información: condiciones de contorno, temperatura inicial, propiedades termofísicas y generación interna de energía cuando la haya.

Sin embargo, en otras situaciones lo que interesa conocer es la evolución de la temperatura en la superficie de un sólido a partir de una serie de medidas de temperatura tomadas en una o más posiciones del interior del sólido. A este problema diferente se le denomina Problema Inverso de Conducción de Calor.

A diferencia del problema directo en el cual se conocen las causas (flujos de calor o temperaturas superficiales) y se trata de calcular el efecto (campo de temperatura en el interior del sólido), en el problema inverso lo que se pretende es estimar las causas a partir del conocimiento del efecto.

Es importante reseñar que en un problema directo se obtiene una solución cuya exactitud depende de la técnica de resolución empleada (analítica o numérica), mientras que en el problema inverso lo que se obtiene siempre es una estimación por muy depurada que sea la técnica utilizada.

La razón de ello se debe a la inevitable existencia de errores de medición, que en conjunción con la inercia térmica y la ubicación del sensor (más o menos cercana al contorno), pueden llegar a enmascarar totalmente los valores “reales” de temperatura.

Por tanto, un factor que influirá decisivamente en la bondad de la estimación es la mayor o menor sensibilidad que presente la respuesta que mide el sensor respecto a la excitación que se pretende estimar.

Para ilustrar un caso típico de IHCP, consideremos por simplicidad el siguiente problema directo de conducción de calor unidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( k \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) = \rho c_p \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad 0 < x' < L \quad t > 0 \quad (2.1a)$$

$$-k \frac{\partial T'}{\partial x'} = f(t') \quad x' = 0 \quad t > 0 \quad (2.1b)$$

$$T' = T_L \quad x' = L \quad t' > 0 \quad (2.1c)$$

$$T' = F(x') \quad t' = 0 \quad 0 \leq x' \leq L \quad (2.1d)$$

Donde son conocidas:  $k$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $f(t')$ ,  $T_L$  y  $F(x')$ .

El problema consiste en determinar el campo de temperatura  $T'(x', t')$  en el interior del sólido en función de la posición y el tiempo.

Si se considera ahora un problema similar al planteado en las ecuaciones (2.1) pero en el que la condición de contorno  $f(t')$  es desconocida, entonces se plantea un problema diferente.

En la figura 2.1 se representa este nuevo problema.

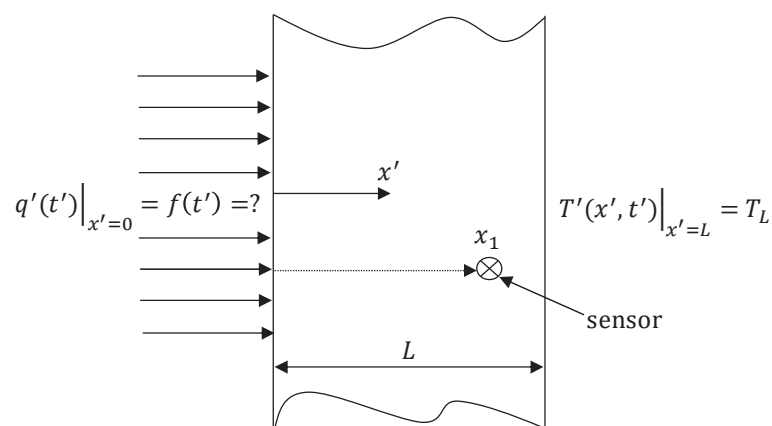


Figura 2.1. Esquema del IHCP asociado a las ecuaciones (2.1)

El nuevo problema, que es inverso, se describe formalmente mediante las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( k \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) = \rho c_p \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad 0 < x' < L \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.2a)$$

$$-k \frac{\partial T'}{\partial x'} = f(t') =? \quad x' = 0 \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.2b)$$

$$T' = T_L \quad x' = L \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.2c)$$

$$T' = F(x') \quad t' = 0 \quad 0 \leq x' \leq L \quad (2.2d)$$

En este problema, para compensar la pérdida de información en el contorno  $x'=0$ , se dispone adicionalmente de una serie discreta de medidas de temperatura  $T'(x_1, t_i) \equiv Y_i$  tomadas en la posición interior del sólido  $x_1$  para diferentes instantes de tiempo  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ), a lo largo del intervalo temporal  $[0, t_f]$ .

Matemáticamente:

$$T'(x_1, t_i) \equiv Y_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.2e)$$

Las ecuaciones (2.2) definen un IHCP de condición de contorno desconocida que en este caso es el flujo de calor  $q'(t')$  en la superficie  $x'=0$ .

Desde un punto de vista general, el IHCP se clasifica matemáticamente dentro de los problemas denominados mal-condicionados (*ill-posed problems*), debido a que su solución puede volverse inestable como consecuencia de los errores inherentes a la medición.

Esta circunstancia hizo que cuando se plantearon inicialmente este tipo de problemas no se les considerase de interés físico. A pesar de ello, en la década de los cincuenta del pasado siglo se desarrollaron algunos métodos heurísticos de solución que estaban más basados en la intuición que en un formalismo matemático.

Posteriormente, en la década de los sesenta y setenta, algunos de los métodos que a día de hoy siguen siendo vigentes, fueron formalizados matemáticamente en el sentido de dotarles de capacidad para tratar problemas mal-condicionados.

### 2.3 Dificultad del IHCP

Las dificultades asociadas a la resolución del IHCP radican en su pertenencia a la clase de problemas matemáticos denominados mal-condicionados (*ill-posed problems*), a diferencia del problema directo de conducción de calor que pertenece al tipo de problemas bien-condicionados (*well-posed problems*).

El concepto de problema bien-condicionado (debido originalmente a Hadamard), establece que la solución de este tipo de problemas debe satisfacer las tres condiciones siguientes:

- La solución debe existir
- La solución debe ser única
- La solución debe ser estable bajo pequeños cambios en los datos de entrada

La existencia de solución para el IHCP puede probarse mediante razonamientos físicos. Por ejemplo, si se produce un cambio en la temperatura medida por un sensor en un determinado punto del interior del sólido, debe existir una causa, que puede ser por ejemplo un flujo de calor en la superficie, que en principio se debe poder estimar.

Respecto a la segunda condición, puesto que el IHCP es mucho más difícil de resolver que el problema directo, solo en algunos casos particulares ha sido posible obtener una solución analítica y probar matemáticamente su unicidad.

Burggraf (1964) obtuvo una de las primeras soluciones exactas (para un problema unidimensional y en coordenadas cartesianas) suponiendo que la temperatura  $Y(t')$  es conocida de manera continua en la posición del sensor. Obviamente, para obtener la función continua  $Y(t')$  a partir de las medidas discretas  $Y_i$  es necesario hacer algún tipo de interpolación.

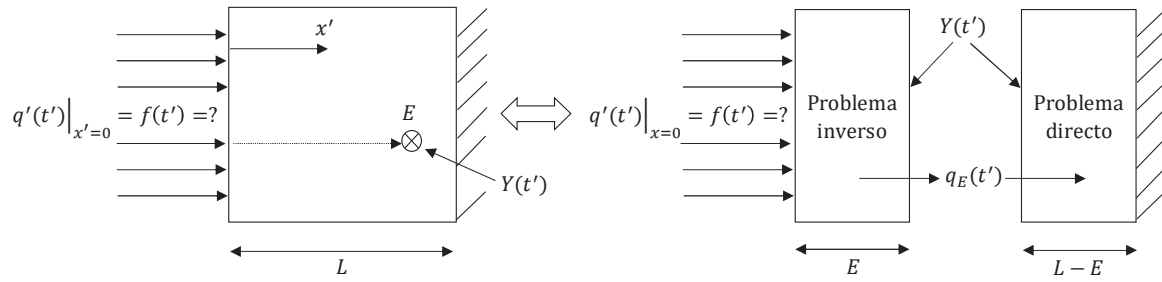


Figura 2.2. Esquema del IHCP resuelto por Burggraf

Para obtener la solución, Burggraf divide el sólido en dos regiones (figura 2.2). En la región de la derecha, puesto que se conoce  $Y(t')$ , están determinadas las dos condiciones de contorno. Por tanto, en esta región se plantea un problema directo cuya solución, una vez aplicada la ley de Fourier, permite obtener el flujo de calor  $q_E(t')$  en la posición del sensor.

En la región de la izquierda se plantea un problema inverso, pero con mayor información de la habitual, ya que en el contorno derecho se conoce simultáneamente tanto la temperatura  $Y(t')$  como el flujo de calor  $q_E(t')$ .

Con este enfoque, se obtiene la solución exacta del campo de temperatura como una serie infinita de derivadas de cualquier orden de  $Y(t')$  y  $q_E(t')$  :

$$T'(x', t') = Y(t') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(E - x')^{2n}}{\alpha^n} \frac{d^n Y}{dt'^n} + \frac{(E - x')}{k} \left[ q_E(t') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)!} \frac{(E - x')^{2n}}{\alpha^n} \frac{d^n q_E}{dt'^n} \right] \quad (2.3a)$$

Siendo  $E$  la coordenada  $x'$  del sensor.

Aplicando la ley de Fourier a la expresión (2.3a) y particularizando para  $x'=0$ , se obtiene el flujo de calor  $q'(t')$  en la superficie:

$$-k \frac{\partial T'(x', t')}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = q'(t') = q_E(t') + k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n-1}}{(2n - 1)!} \frac{1}{\alpha^n} \frac{d^n Y}{dt'^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n q_E}{dt'^n} \quad (2.3b)$$

De acuerdo con la expresión anterior, el flujo de calor en la superficie depende de las derivadas de cualquier orden de la temperatura  $Y(t')$  y del flujo  $q_E(t')$  en la posición del sensor.

Aunque esta solución tiene poca utilidad práctica, permite apreciar la principal dificultad cuando se aborda un IHCP, que no es otra que la estabilidad de la solución. En efecto, si por simplicidad suponemos que el sensor se ubica en el contorno aislado  $x'=L$ , entonces se tiene  $q_E(t')=0$ , por lo que la expresión (2.3b) queda:

$$q'(t') = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{\alpha^n} \frac{d^n Y}{dt'^n} \quad (2.3c)$$

A priori, lo lógico sería obtener los valores de  $Y_i$  con la menor separación temporal posible para de esta manera construir la función  $Y(t')$  de la forma más exacta posible. Sin embargo, al disminuir el paso de tiempo  $\Delta t$  entre medidas, en la expresión (2.3c) adquieren más peso las derivadas de orden superior.

Lo anterior se aprecia fácilmente comparando por ejemplo las expresiones de la primera y quinta derivada numéricas en un instante cualquiera  $j$ :

$$\frac{dY}{dt} \approx \frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2\Delta t} \quad (2.4a)$$

$$\frac{d^5 Y}{dt^5} \approx \frac{-Y_{j-3} + 4Y_{j-2} - 5Y_{j-1} + 5Y_{j+1} - 4Y_{j+2} + Y_{j+3}}{2\Delta t^5} \quad (2.4b)$$

En la expresión (2.3c) también se observa que el peso de las derivadas de orden superior, al estar multiplicadas por  $\alpha^{-n}$ , aumenta al disminuir la difusividad térmica del material (mayor inercia térmica).

Por tanto, el grado de amplificación de los errores asociados a las medidas aumentará al disminuir el intervalo de tiempo entre mediciones, lo que provoca que la solución se vuelva inestable. Este efecto es superior en los materiales con mayor inercia térmica.

A partir de la solución exacta de Burggraf se ha comprobado matemáticamente que el IHCP se vuelve inestable para pequeños cambios en los datos de entrada (como por ejemplo al aumentar la frecuencia de lectura del sensor). A continuación, se hace un razonamiento basado en el punto de vista físico que lleva a la misma conclusión sobre el IHCP.

En un problema típico de conducción, la respuesta transitoria de temperatura en un punto interior del sólido difiere considerablemente de la respuesta en un punto sobre su superficie. De hecho, las excursiones de temperatura en el interior del sólido están muy amortiguadas en comparación con los cambios de temperatura que se producen en su superficie. A ello se suma también el efecto de retraso respecto a la excitación en la superficie.

Estos efectos de amortiguamiento y retraso que se observan claramente en la solución del problema directo, permiten apreciar desde un punto de vista físico las dificultades que se encuentran al resolver el IHCP.

Para ilustrar la sensibilidad de la solución inversa a pequeños cambios en los datos de entrada, consideremos el caso particular de un sólido semiinfinito sujeto a un flujo de calor periódico en la superficie de contorno  $x'=0$ .

El problema se formula de la siguiente manera: Sea un sólido semiinfinito unidimensional cuyo dominio viene definido por  $0 < x' < \infty$  y que se encuentra inicialmente a una temperatura  $T_0$ . En un instante  $t' > 0$ , la superficie del contorno  $x'=0$  es expuesta a un flujo de calor periódico de la forma  $q_0 \cos wt'$ , siendo  $q_0$  el valor máximo del flujo y  $w$  la frecuencia de oscilación.

Después de un tiempo suficientemente grande como para que transcurra el transitorio, la solución del campo de temperatura cuasi estacionario en el interior del sólido para una determinada posición  $x'$  y un instante cualquiera  $t'$  viene dada por:

$$T'(x', t') = T_0 + \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{w}} \exp\left(-x' \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \cos\left(wt' - x' \sqrt{\frac{w}{2\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.5a)$$

La envolvente de la expresión anterior viene dada por:

$$(T'(x', t') - T_0)_{env} = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{w}} \exp\left(-x' \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \quad (2.5b)$$

La expresión anterior demuestra que la envolvente decrece al aumentar la frecuencia y que la máxima desviación respecto a la temperatura inicial se produce en  $x'=0$ .

En un punto interior del sólido se tiene:

$$\frac{(T'(x', t') - T_0)_{env}}{(T'(x', t') - T_0)_{env, x'=0}} = \exp\left(-x' \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \quad (2.5c)$$

La expresión (2.5c) muestra como la envolvente de las temperaturas interiores decrece exponencialmente con la distancia  $x'$  a la superficie y con la frecuencia  $w^{1/2}$ .

Para sacar conclusiones a partir de la expresión (2.5c), supongamos que el término de la derecha es aproximadamente igual a 0.01, lo que implica:

$$x' \sqrt{\left(\frac{w}{2\alpha}\right)} > 4.6 \quad (2.5d)$$

Esto supone que para un acero típico con  $\alpha=10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s y una frecuencia  $w=2\pi$  rad/s, la respuesta es prácticamente despreciable a partir de una distancia  $x'>0.82$  cm. Este amortiguamiento es aún mayor si, por ejemplo, la frecuencia  $w$  se incrementa en un factor de 100, en cuyo caso la respuesta es prácticamente despreciable a partir de  $x'>0.08$  cm.

Respecto al efecto del retraso, de acuerdo con la expresión (2.5a), la temperatura en la superficie está retrasada  $\pi/4$  rad respecto al flujo y este retraso es superior para posiciones interiores del sólido. Por ejemplo, para valores de  $\alpha=10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s,  $w=2\pi$  rad/s y  $x'=0.82$  cm existe un retraso de 264°, o equivalentemente de 0.73 s respecto a la temperatura en la superficie.

En las posiciones interiores del sólido, como consecuencia de los inevitables errores aleatorios asociados al proceso de medición, aparecen fluctuaciones que se superponen al valor “real” de temperatura. Como se deduce del ejemplo anterior, debido a los efectos de amortiguamiento y retraso inherentes al proceso de conducción de calor, estos errores tienen un impacto relativo mayor cuanto más alejado de la superficie esté el sensor.

Por tanto, para un sensor con una posición y prestaciones determinadas, ocurrirá que, como consecuencia de los errores de medida, proporcionará diferentes lecturas para una misma excitación, lo que llevará a obtener diferentes estimaciones de la excitación. En conclusión, lo anterior equivale a afirmar que el IHCP no siempre cumple la condición de unicidad.

De manera general, el IHCP tampoco cumple la tercera condición de estabilidad requerida para los problemas bien-condicionados. La falta de estabilidad intrínseca a este tipo de problemas es la razón por la que es necesario utilizar técnicas específicas de resolución que transformen el IHCP de un problema mal-condicionado a uno bien-condicionado.

Durante mucho tiempo se pensó que, si alguna de las condiciones requeridas para los problemas bien-condicionados eran violadas, el problema o era irresoluble o bien los resultados obtenidos no tenían sentido físico, careciendo por tanto de interés práctico. Esta circunstancia causó que la comunidad científica considerase a este tipo de problemas sin utilidad práctica y que no se les prestase atención.

Trabajos pioneros como el procedimiento de regularización de A.N. Tikhonov [3], los métodos iterativos de regularización de O.M. Alifanov [4] y el método de especificación de función de J.V. Beck [1], fueron los que avivaron el interés en los problemas inversos de conducción de calor.

La base de estos métodos formales consiste en la idea de reformular el problema inverso inicial en términos de un problema inverso aproximado bien-condicionado, utilizando para ello alguna técnica de estabilización.

### 2.3.1 Hipótesis estadísticas de los errores de medida

Respecto a la descripción estadística de los errores asociados a las mediciones de temperatura, Beck propone ocho hipótesis:

1) Los errores son aditivos, esto es:

$$Y_i = T_i + \varepsilon_i \quad (2.6a)$$

Donde  $Y_i$  es la temperatura medida,  $T_i$  la temperatura "real" y  $\varepsilon_i$  el error aleatorio.

2) Los errores de temperatura  $\varepsilon_i$  tienen media cero, esto es:

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad (2.6b)$$

Donde  $E(\cdot)$  es el operador valor esperado. Esto equivale a decir que los errores no tienen *bias*.

3) Los errores tienen una varianza constante, esto es:

$$\sigma_i^2 = E\{[Y_i - E(Y_i)]^2\} = \sigma^2 = \text{constante} \quad (2.6c)$$

Lo que significa que la varianza de las  $Y_i$  no depende de la medida.

4) Los errores asociados a diferentes medidas no están correlacionados.

Dos errores  $\varepsilon_i$  y  $\varepsilon_j$  con  $i \neq j$  no están correlacionados si su covarianza es cero, esto es:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \equiv E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = 0 \quad i \neq j \quad (2.6d)$$

Lo que significa que entre los errores  $\varepsilon_i$  y  $\varepsilon_j$  no existe ningún tipo de efecto o relación.

5) Los errores de medida tienen una distribución normal (Gaussiana), por lo que de acuerdo con los anteriores criterios, su función de distribución de probabilidad viene dada por:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.6e)$$

6) Los parámetros estadísticos que describen los errores  $\varepsilon_i$ , tal como  $\sigma$ , son conocidos.

7) Las únicas variables que contienen errores aleatorios son las medidas de temperatura. Las mediciones asociadas a los tiempos, posiciones, dimensiones del cuerpo y cualquier otra magnitud que intervenga en el problema inverso se suponen conocidas con total exactitud.

8) No existe información previa respecto al parámetro o función que se pretende estimar. Si existiera tal información, puede ser utilizada para mejorar la estimación.

## 2.4 Generalidades sobre los métodos de resolución

De manera general, la técnica de resolución de problemas inversos consiste en minimizar una función objetivo empleando alguna técnica de estabilización. La función objetivo que habitualmente se utiliza es la norma ordinaria de mínimos cuadrados  $S_{OLS}$ :

$$S_{OLS} = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}) \quad (2.7)$$

Donde  $\mathbf{Y}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  son los vectores que contienen las temperaturas medidas y calculadas respectivamente. Al vector  $\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}$  se le denomina vector de residuos.

Las temperaturas calculadas  $\hat{\mathbf{T}}$  se obtienen como solución de un problema directo en el que previamente se sustituyen las magnitudes desconocidas por las estimaciones obtenidas a partir del problema inverso.

Normalmente se presentan tres casos:

1) Cuando las temperaturas medidas  $Y_i$  tomadas en los instantes  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ) proceden de un único sensor, en cuyo caso la traspuesta del vector de residuos viene dada por:

$$(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T = (Y_1 - T_1, Y_2 - T_2, \dots, Y_M - T_M) \quad (2.8)$$

Y la norma  $S_{OLS}$  por:

$$S_{OLS} = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}) = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_i)^2 \quad (2.9)$$

2) En el caso de que se utilicen  $k$  sensores, la traspuesta del vector de los residuos viene dada por:

$$(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T = (\bar{Y}_1 - \bar{T}_1, \bar{Y}_2 - \bar{T}_2, \dots, \bar{Y}_M - \bar{T}_M) \quad (2.10)$$

Donde para cada instante  $t_i$  :

$$(\bar{Y}_i - \bar{T}_i) = (Y_{i1} - T_{i1}, Y_{i2} - T_{i2}, \dots, Y_{ik} - T_{ik}) \quad (2.11)$$

Por lo que la norma  $S_{OLS}$  se expresa:

$$S_{OLS} = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^M (Y_{ij} - T_{ij})^2 \quad (2.12)$$

3) Cuando la desviación estándar de cada medida es diferente, es decir, si no se cumple la tercera hipótesis estadística de Beck, la función objetivo se expresa mediante una norma de mínimos cuadrados con pesos, la cual viene dada por:

$$S_W = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T \mathbf{W} (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}) \quad (2.13)$$

Siendo  $\mathbf{W}$  la matriz diagonal de pesos, que para el caso de un único sensor viene dada por:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_M^2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Donde  $\sigma_i$  es la desviación estándar asociada a la medida  $Y_i$ .

Teniendo en cuenta (2.14), la expresión (2.13) queda:

$$S_W = \sum_{i=1}^M \frac{(Y_i - T_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (2.15)$$

En el caso de  $k$  sensores, la expresión (2.13) vendría dada por:

$$S_W = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^M \frac{(Y_{ij} - T_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2} \quad (2.16)$$

Siendo  $\sigma_{ij}$  la desviación estándar asociada a la medida  $Y_{ij}$  del sensor  $j$ .

Cuando el problema inverso consiste en estimar algún parámetro, como por ejemplo la conductividad térmica de un sólido a partir de medidas de temperatura tomadas en su interior, las expresiones (2.9) y (2.12) suelen ser estables.

Sin embargo, cuando el problema inverso es un IHCP enfocado a la estimación de una función temporal arbitraria, como pueden ser las componentes del flujo de calor  $f(t_i)$  para diferentes instantes de tiempo  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ), ello implica estimar un gran número de parámetros. En ese caso, los errores de medida tienden a amplificarse provocando que la estimación sea muy deficiente o incluso inestable.

Una técnica para reducir las inestabilidades derivadas de la amplificación de los errores de medida consiste en emplear el procedimiento de regularización de Tikhonov, el cual modifica la norma ordinaria de mínimos cuadrados añadiendo una penalización a la función objetivo que reduce las fluctuaciones de la función que se pretende estimar.

En el caso de un único sensor, esta norma modificada viene dada por:

$$S[f(t)] = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_i)^2 + \alpha^* \sum_{i=1}^M f_i^2 \quad (2.17)$$

Donde  $\alpha^*$  ( $>0$ ) es el parámetro de regularización.

Al segundo sumatorio se le denomina término de regularización de dominio completo de orden cero. El flujo de calor  $f_i$  estimado en el instante  $t_i$  se supone constante en el intervalo  $t_i - \Delta t/2 < t < t_i + \Delta t/2$ , siendo  $\Delta t$  el intervalo de tiempo entre dos medidas consecutivas.

El valor del parámetro de regularización  $\alpha^*$  controla la estabilidad y exactitud de la estimación. Cuando se usa un  $\alpha^* \rightarrow 0$ , la solución presenta un comportamiento oscilante y se vuelve inestable. Por el contrario, cuando se utilizan valores grandes de  $\alpha^*$ , la solución se desvía respecto al valor exacto (error de sesgo).

En lugar de un término de regularización de orden cero puede considerarse también un término de regularización de orden uno, en cuyo caso la expresión (2.17) se transforma en:

$$S[f(t)] = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_i)^2 + \alpha^* \sum_{i=1}^M (f_{i+1} - f_i)^2 \quad (2.18)$$

Como en el caso anterior, cuando  $\alpha^* \rightarrow 0$  la solución se vuelve inestable. Si se utilizan valores grandes de  $\alpha^*$ , el segundo sumatorio se vuelve dominante y las componentes del flujo  $f_i$  tienden a volverse contantes, haciendo que la primera derivada de  $f(t)$  tienda a cero.

Las inestabilidades pueden evitarse seleccionando un valor adecuado del parámetro  $\alpha^*$ . Tikhonov propuso que  $\alpha^*$  debe escogerse de manera que el mínimo valor de la función objetivo sea igual a la suma de los cuadrados de los errores de las medidas.

Una técnica alternativa al procedimiento de regularización descrito anteriormente, es el método iterativo de regularización de O.M. Alifanov. En este método, el número de iteraciones hace la función del parámetro  $\alpha^*$  y el criterio de parada se establece cuando se obtiene una solución razonablemente estable. Por tanto, a diferencia del método de Tikhonov, no se añade ningún término adicional a la norma ordinaria de mínimos cuadrados.

En función del número de datos que se manejan simultáneamente en un problema inverso, los métodos se clasifican en secuenciales o de dominio completo.

Cuando el periodo de tiempo de excitación del sistema no es muy largo, como podría ser el caso que se plantea en la re-entrada de los vehículos espaciales a la atmósfera, la historia del flujo de calor puede estimarse analizando la serie completa de registros. Este procedimiento conduce a los métodos de dominio completo en los que se manejan grandes matrices y todos los parámetros necesarios se estiman simultáneamente.

Cuando se consideran aplicaciones en las que el flujo actúa durante largos periodos de tiempo, es preferible usar métodos secuenciales, los cuales avanzan en la estimación usando solo los datos más recientes. Estos métodos, al manejar pocos datos, son más eficientes desde un punto de vista computacional.

Los métodos de regularización como el de Tikhonov y Alifanov fueron concebidos inicialmente como métodos de dominio completo, lo que supone que todos los registros de las medidas se utilizan a la vez y que se estimen todas las componentes de la excitación de forma simultánea.

A diferencia de los métodos de regularización, el método de especificación de función de Beck se planteó inicialmente como un método secuencial. Lo que significa que las componentes van estimándose paso a paso, de modo que en cada paso no solo se utiliza la medida correspondiente (en cuyo caso sería inestable), sino también unas cuantas posteriores a la de la componente que se pretende estimar.

Para estabilizar la estimación, la técnica de este método consiste en especificar la dependencia temporal de la función que se pretende estimar durante un pequeño intervalo de tiempo, de ahí su denominación.

El método de Beck, al ser secuencial, es más eficiente desde un punto de vista computacional. Además, mantiene un vínculo más directo con el sentido físico del problema, a diferencia de las técnicas de regularización que tienen un enfoque más matemático.

#### **2.4.1 Ejemplo de dominio completo**

A continuación, se resuelve un IHCP de dominio completo utilizando el Método de Especificación de Función (Function Specification Method: FSM). Aunque el FSM es fundamentalmente un método secuencial, dado que lo que se pretende es ilustrar la filosofía de la técnica, por simplicidad se aplicará a un problema de dominio completo.

El problema se supone unidimensional, sin generación interna de calor y con una temperatura inicial homogénea. En una de las superficies, la condición de contorno conocida es de segunda clase o de Neumann.

En la otra superficie existe un flujo de calor desconocido, que se pretende estimar a partir de una serie de medidas tomadas en un punto interior del sólido, tal como representa la figura siguiente.

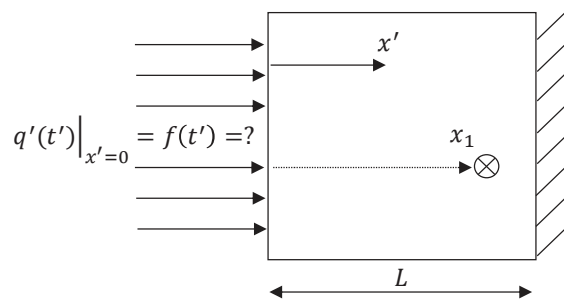


Figura 2.3. Esquema del IHCP asociado a las ecuaciones (2.18)

El problema se considera lineal, lo que equivale a suponer que las propiedades termofísicas del sólido son conocidas e independientes de la temperatura. La distribución inicial de temperatura  $T_0$  se supone también conocida.

La formulación matemática de este IHCP de dominio completo viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( k \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) = \rho c_p \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad 0 < x' < L \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.19a)$$

$$-k \frac{\partial T'}{\partial x'} = q'(t') = ? \quad x' = 0 \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.19b)$$

$$-k \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad x' = L \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.19c)$$

$$T' = T_0 \quad t = 0 \quad 0 \leq x' \leq L \quad (2.19d)$$

$$T'(x_1, t_i) \equiv Y_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad 0 < t' \leq t_f \quad (2.19e)$$

El signo negativo de (2.19b) indica que el flujo de calor aplicado  $q'(t')$  que se pretende estimar entra en la superficie y por tanto tiene signo positivo.

La expresión (2.19e) representa las  $M$  medidas de temperatura  $Y_i$  tomadas por un sensor ubicado en la posición  $x'=x_1$  a intervalos de tiempo constantes  $\Delta t$ . En el instante  $t_1$  se toma la medida  $Y_1$ , en el instante  $t_2=2\cdot\Delta t$  se toma la  $Y_2$  y así sucesivamente hasta  $t_M=M\cdot\Delta t$  en el que se toma la última medida  $Y_M$ . Obviamente se tiene  $t_M = M\cdot\Delta t \leq t_f$ .

El problema inverso consiste en estimar a partir de las  $M$  medidas de temperatura, la función  $q'(t')$  en forma discreta, es decir, las  $M$  componentes del flujo de calor  $q_i$  desde  $i=1$  hasta  $i=M$ .

La limitación del método de especificación de función en los problemas de dominio completo, es que es necesario suponer una determinada dependencia de la entrada a estimar respecto del tiempo. Esto implica que para especificar la función se necesita algún conocimiento previo de la entrada a estimar.

Por simplicidad se considera una dependencia lineal, lo que implica que el problema inverso se transforme en un problema de estimación de dos parámetros:  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

De acuerdo con esto, la dependencia temporal de  $q'(t')$  viene dada por:

$$q'(t') = \beta_1 + \beta_2 t' \quad (2.20)$$

Como lo que se pretende es encontrar un modelo matemático que relacione la temperatura calculada en la posición del sensor con la entrada a estimar y por tanto con los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , la forma más simple de hacerlo es mediante el principio de superposición.

Si denominamos por  $\Phi(x', t')$  y  $\Phi^{(1)}(x', t')$  a las respuestas a las excitaciones de flujo escalón unitario unidad y rampa pendiente unidad respectivamente, entonces el principio de superposición se expresa:

$$T'(x_1, t') = T_0 + \beta_1 \Phi(x_1, t') + \beta_2 \Phi^{(1)}(x_1, t') \quad (2.21)$$

La expresión (2.21) indica que las respuestas fundamentales  $\Phi$  y  $\Phi^{(1)}$  se corresponden con los coeficientes de sensibilidad de la temperatura en la posición del sensor, respecto a cada uno de los parámetros que se pretende estimar.

Para obtener las respuestas fundamentales  $\Phi$  y  $\Phi^{(1)}$  es necesario resolver dos problemas directos como el que se deriva de las ecuaciones (2.19a-d), pero en el que la entrada  $q'(t')$  es conocida, tal como se representa en la figura siguiente.

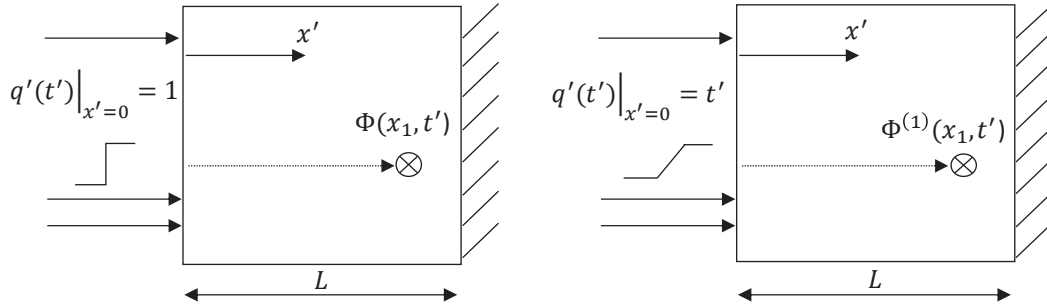


Figura 2.4. Problemas directos para obtener las respuestas fundamentales

Para estimar los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$  se minimiza la norma ordinaria de mínimos cuadrados  $S_{OLS}$  respecto a cada parámetro:

$$S_{OLS} = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_i)^2 = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_0 - \beta_1 \Phi_i - \beta_2 \Phi_i^{(1)})^2 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial S_{OLS}}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_0 - \beta_1 \Phi_i - \beta_2 \Phi_i^{(1)}) \Phi_i = 0 \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial S_{OLS}}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^M (Y_i - T_0 - \beta_1 \Phi_i - \beta_2 \Phi_i^{(1)}) \Phi_i^{(1)} = 0 \quad (2.23b)$$

Las ecuaciones (2.23a-b) representan un sistema de ecuaciones lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas cuya solución trivial viene dada por:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(\sum \Phi_i^{(1)2}) (\sum (Y_i - T_0) \Phi_i) - (\sum \Phi_i \Phi_i^{(1)}) (\sum (Y_i - T_0) \Phi_i^{(1)})}{(\sum \Phi_i^2) (\sum \Phi_i^{(1)2}) - (\sum \Phi_i \Phi_i^{(1)})^2} \quad (2.24a)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum \Phi_i^2)(\sum (Y_i - T_0) \Phi_i^{(1)}) - (\sum \Phi_i \Phi_i^{(1)})(\sum (Y_i - T_0) \Phi_i)}{(\sum \Phi_i^2)(\sum \Phi_i^{(1)2}) - (\sum \Phi_i \Phi_i^{(1)})^2} \quad (2.24b)$$

Donde  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  son las correspondientes estimaciones de los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . A partir de ellos, el flujo de calor se estima mediante la expresión (2.20)

En el problema de dominio completo como el que se acaba de estudiar, el Método FSM especifica una única forma funcional en todo el intervalo temporal.

A diferencia de ello, el concepto básico del método secuencial de especificación de función consiste en especificar la función desconocida mediante una forma funcional supuesta, pero solamente de manera temporal y durante los  $r$  saltos de tiempo posteriores al instante en el que se ha estimado el último parámetro.

Si por ejemplo se han estimado las componentes del flujo de calor  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{m-1}$  y lo que se pretende a continuación es estimar  $q_m$ , desde un punto de vista causal, solo la medida en  $t_m$  y varios saltos de tiempo posteriores  $r$  tienen información del parámetro a estimar, por lo que solo se tienen en cuenta esas medidas para obtener la estimación.

La manera más simple de especificar la función consiste en suponer que durante esos  $r$  pasos de tiempo posteriores el flujo de calor es constante.

Si  $r$  es el número de medidas de temperatura a considerar, como los parámetros desde el instante  $t_m$  hasta el instante  $t_{m+r-1}$  son desconocidos, entonces se calculan las temperaturas suponiendo que esos parámetros son temporalmente constantes, es decir:

$$q_m = q_{m+1} = \dots = q_{m+r-1} \quad (2.25)$$

El método puede usar otras formas funcionales para especificar el flujo en los saltos de tiempo futuros. Por ejemplo, puede suponerse que varía de forma lineal, parabólica o cúbica o incluso en un caso más general se podría utilizar una función polinómica o una exponencial.

La experiencia indica que las especificaciones más sencillas, como la que se expresa en la ecuación (2.25), suelen ser más eficaces para evitar la amplificación de errores.

## 2.5 Aplicaciones prácticas

En los últimos años se ha generado un interés creciente por la teoría y aplicaciones del Problema Inverso de Conducción de Calor, existiendo aplicaciones en casi cualquier rama de la ciencia o la ingeniería.

En los inicios, hacia finales de los cincuenta y principios de los sesenta del pasado siglo, el programa espacial tuvo un importante papel en el desarrollo de nuevas técnicas de solución.

Debido al elevado calentamiento por fricción de los vehículos espaciales durante su reentrada a la atmósfera, la temperatura del escudo térmico no se puede medir directamente mediante sensores de temperatura, ya que estos se destruirían.

Por tanto, los sensores se colocan a una cierta distancia de la superficie del escudo y la temperatura de la superficie se estima mediante un problema inverso.

En esta aplicación, se puede plantear también un problema de estimación de parámetros consistente en estimar las propiedades termofísicas del escudo térmico cuando este se encuentra a elevadas temperaturas.

Como en el ejemplo del escudo térmico, los métodos convencionales se muestran también incapaces de medir el flujo de calor sobre una superficie expuesta al fuego. Sin embargo, mediante el problema inverso se puede estimar dicho flujo a partir de las medidas de temperatura tomadas a una cierta distancia bajo la superficie.

De hecho, cuando los métodos clásicos de estimación de propiedades no son capaces de proporcionar la exactitud adecuada o bien no son aplicables, es cuando mayor sentido adquiere el uso de la técnica del problema inverso de estimación de parámetros.

Uno de los primeros estudios sobre problemas inversos térmicos se debe a Giedt, quien investigó la transferencia de calor en la superficie interior de un cañón (1955).

Stolz propuso un procedimiento para estimar la temperatura superficial y el flujo de calor a partir de medidas de temperatura tomadas en el interior de un cuerpo enfriándose (1960).

Desde entonces, el desarrollo de nuevos métodos de resolución y la disponibilidad creciente de capacidad de computación, ha hecho posible que se planteen multitud de problemas inversos en el ámbito de la disciplina general de transferencia de calor.

Aunque en sus inicios la técnica del problema inverso fue aplicada exclusivamente a problemas de conducción de calor unidimensionales. Posteriormente ha sido empleada con éxito a problemas multidimensionales (dos y tres dimensiones) y a problemas de convección y radiación.

Es por ello, por lo que actualment a este tipo de problemas (tanto de estimación de parámetros como de funciones), se les denomina genéricamente como Problemas Inversos de Transferencia de Calor (Inverse Heat Transfer Problems: IHTP).

De acuerdo con la referencia [30], los IHTP se clasifican en función del proceso de transferencia de calor:

- IHTP de conducción o equivalentemente IHCP
- IHTP de convección (forzada o natural)
- IHTP de radiación
- IHTP de radiación con medio participante
- IHTP de conducción y radiación simultáneamente
- IHTP de conducción y convección simultáneamente
- IHTP de cambio de fase (fusión o solidificación)

Respecto a los IHTP de estimación de parámetros, estos suelen clasificarse respecto a la característica que se pretende estimar:

- IHTP de condiciones de contorno
- IHTP de propiedades termofísicas
- IHTP de condiciones iniciales
- IHTP de generación interna de energía
- IHTP de características geométricas de un cuerpo calentado

La aparición de nuevos materiales cuyas propiedades termofísicas varían fuertemente con la temperatura y posición, ha puesto en evidencia las limitaciones de los métodos convencionales para determinar sus propiedades. Por otro lado, a medida que las técnicas industriales se han ido sofisticando, se ha hecho cada vez más necesario disponer de las propiedades termofísicas de los materiales en las condiciones reales de operación.

El IHTP de estimación de parámetros ha demostrado ser una técnica muy eficaz para abordar estas situaciones, ya que tiene la ventaja de que permite realizar experimentos en condiciones muy parecidas a las reales. De la referencia [29] se han extraído algunas de las áreas actuales de aplicación del IHTP:

- Estimación de propiedades termofísicas de los materiales. Por ejemplo; las propiedades del material del escudo térmico de un vehículo espacial durante su reentrada en la atmósfera, la dependencia de la conductividad térmica con la temperatura en un lingote de acero durante su templado, el coeficiente interno de intercambio de calor y la conductividad térmica efectiva de un sólido poroso, la conductividad térmica de termoplásticos durante su moldeo o la conductividad térmica de sólidos ortotrópicos.
- Estimación de las propiedades de la radiación y de las condiciones de contorno en problemas de absorción, emisión y dispersión en materiales semitransparentes. Por ejemplo; la estimación simultánea de la función de fase, el albedo y el espesor óptico, el perfil de temperatura en medios absorbentes, emisores y dispersores isótropos, la estimación simultánea del perfil de temperatura y la reflectancia superficial, o la estimación de la fuente de radiación térmica en una esfera.

- 
- Control de la posición de la interfase sólido-líquido durante la solidificación. Por ejemplo; el control de la morfología de la interfase en los procesos de solidificación con convección natural.
  - Estimación de las condiciones de entrada y flujo de calor en problemas de convección forzada en el interior de conductos plano paralelos. Por ejemplo; la estimación del flujo de calor en pared en régimen laminar, la evolución temporal y espacial del flujo de calor en pared para un fluido no newtoniano, o la evolución temporal de temperatura en el interior con régimen laminar.
  - Estimación de la variación con el tiempo de la conductancia de interfase entre un metal solidificándose y su molde o de la conductancia de interfase entre superficies que entran en contacto periódicamente.
  - Monitorización de las propiedades de la radiación de las superficies reflectantes de hornos y paneles criogénicos.
  - Estimación de la liberación de calor durante la fricción de dos sólidos.
  - Estimación de la función de reacción. Por ejemplo; la función de reacción en problemas parabólicos de reacción-difusión, o la cinética de vulcanización del caucho.
  - Estimación de la geometría del contorno de cuerpos.
  - Estimación de la temperatura superficial en el interior de cucharas de trasvase de acero líquido en acerías [33].

Estimar algunas de estas magnitudes con técnicas convencionales es extremadamente difícil o en algunos casos imposible. Sin embargo, la técnica del IHTP permite abordar este tipo de problemas y al mismo tiempo mejorar los experimentos involucrados.

## Capítulo 3

### Metodología

#### 3.1 Introducción

En el apartado 2.4 del segundo capítulo del libro de Beck [1], se trata la estimación secuencial del flujo de calor en la superficie de un sólido a partir de medidas de temperatura superficial. La metodología consiste en aplicar primero el teorema de Duhamel (en su formulación basada en temperatura) y a continuación la ley de Fourier.

Para aplicar esta metodología, es necesario disponer de la solución analítica del campo de temperatura cuando el sólido se somete a una entrada tipo escalón unitario de temperatura en el contorno donde se pretende estimar el flujo.

A partir de esta metodología y en función de si las medidas de temperatura se consideran como saltos discontinuos o como una función lineal definida a trozos, se han desarrollado dos métodos que resuelven el problema inverso que se trata en esta tesis.

El primer método considera las medidas de temperatura como saltos discontinuos. Es totalmente analítico y lo denominamos “Método Simple”.

El segundo método considera las medidas de temperatura como una función lineal a trozos. Este método es semianalítico y lo denominamos “Método SOLS” (SOLS: Sequential Ordinary Least Square Method).

El hecho de considerar las medidas como una función lineal a trozos conduce a un problema mal-condicionado, debido a que el Método SOLS requiere evaluar numéricamente la derivada temporal de la temperatura superficial a partir de medidas discretas y afectadas por errores de medición. Esta circunstancia origina que pequeñas fluctuaciones en los datos causen grandes errores en la estimación de la derivada y por tanto en la estimación del flujo de calor.

Por tanto, el Método SOLS puede considerarse semianalítico en el sentido de que utiliza tanto técnicas analíticas como numéricas. Por un lado, para resolver la integral de Duhamel se necesita conocer la solución analítica a la entrada tipo escalón unitario de temperatura. Por otro, incorpora una técnica numérica de regularización para estimar la derivada temporal de la temperatura superficial.

Esta técnica de regularización es necesaria para transformar el problema de mal-condicionado a bien-condicionado. La técnica se basa en un ajuste por mínimos cuadrados de un conjunto reducido de medidas de temperatura superficial. Como el SOLS es un método secuencial, el ajuste se hace sobre  $r$ -futuras y  $r$ -pasadas medidas de temperatura.

A diferencia de un IHCP clásico, en el que el sensor siempre se localiza en el interior del sólido, nuestro problema inverso se caracteriza por que el sensor se ubica en el punto de máxima sensibilidad posible (la superficie del sólido), por lo que puede considerarse como un IHCP “límite” en el sentido geométrico.

Así, mientras que el IHCP clásico adquiere su carácter de problema mal-condicionado debido a la baja sensibilidad del sensor a la excitación y el consecuente impacto de los errores de medida, en el caso de nuestro problema inverso este carácter lo adquiere como consecuencia de la inestabilidad inherente a la evaluación numérica de la derivada temporal de la temperatura superficial.

Para manejar el problema de inestabilidad asociado a la derivación temporal se han propuesto varias técnicas de regularización. En la referencia [20], Murio expone las dificultades matemáticas asociadas a la diferenciación numérica y propone una técnica de estabilización basada en el método de molificación.

En cada paso de tiempo, el Método SOLS calcula la derivada temporal de la temperatura superficial a partir de un ajuste por mínimos cuadrados de un conjunto reducido de medidas de temperatura superficial ( $r$ -pasadas y  $r$ -futuras). Esto posibilita que sus estimaciones puedan compararse directamente con las de otros métodos secuenciales que utilizan  $r$ -futuras temperaturas como el Método FSM.

El problema inverso que se aborda en esta tesis puede ser resuelto tanto con el Método Simple como con el Método SOLS. Sin embargo, como se verá en el apartado 3.5.1, en los casos de alta resolución temporal el Método Simple no es suficientemente potente como para manejar el efecto de amplificación de errores.

Es importante destacar que estos dos métodos solo pueden aplicarse cuando el sensor se ubica en la superficie del sólido. A diferencia de ello, el FSM es un método más general en el sentido que puede manejar cualquier distancia del sensor a la superficie, incluido el caso particular de que el sensor se encuentre sobre ella.

Si bien, como se verificará en el apartado 3.6, en el caso de nuestro problema inverso particular, el Método SOLS proporciona mejores estimaciones que las del Método FSM.

## 3.2 Formulación matemática

Para exponer el formalismo matemático de la metodología, por simplicidad se considera una geometría unidimensional descrita en coordenadas cartesianas, lo que en la práctica equivaldría a un sólido con forma rectangular o cuadrada. El dominio espacial del problema es  $0 \leq x' \leq L$ .

La formulación matemática del problema directo viene dada por:

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad 0 \leq x' \leq L \quad (3.1a)$$

$$-K \frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_{x'=0} = q'(t') \quad (3.1b)$$

$$-K \frac{\partial T'}{\partial x'} \Big|_{x'=L} = h(T'(L, t') - T_\infty) \quad (3.1c)$$

$$T'(x', 0) = T_\infty \quad 0 \leq x' \leq L \quad (3.1d)$$

La distancia ( $L$ ), las propiedades del sólido ( $k, \rho, c_p$ ) y las propiedades del fluido ( $h, T_\infty$ ), se consideran conocidas con total exactitud y por tanto sin errores de medición. En la figura siguiente se representa esquemáticamente el problema.

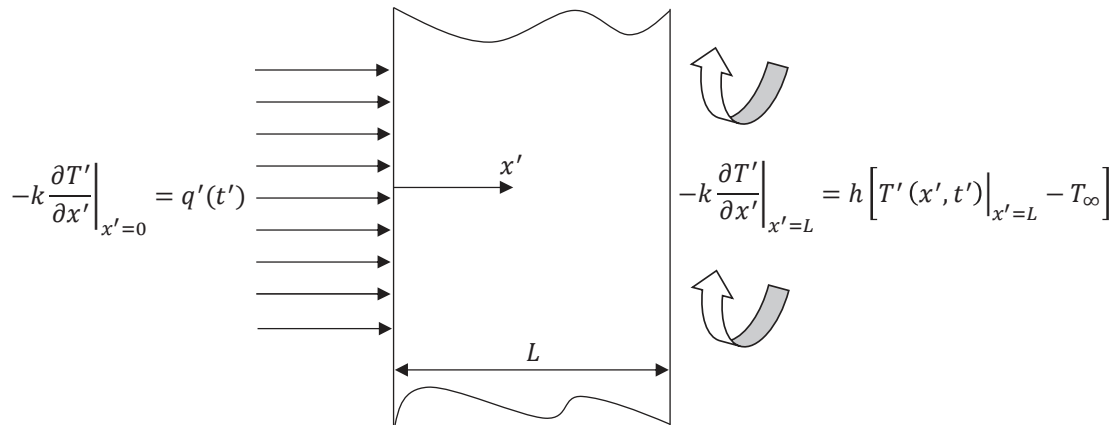


Figura 3.1. Esquema del problema directo asociado a las ecuaciones (3.1)

De acuerdo con la ecuación (3.1d), el sólido se encuentra inicialmente en equilibrio térmico con el fluido y por tanto a una temperatura uniforme igual a  $T_\infty$ . Esta condición es necesaria para poder aplicar el teorema de Duhamel, ya que requiere que el sólido se encuentre inicialmente en equilibrio térmico (gradiente nulo de temperatura).

En el problema directo, el flujo de calor  $q'(t')$  de la ecuación (3.1b) representa un flujo impuesto conocido en la superficie  $x'=0$  (condición de contorno de segunda clase). Mientras que en el problema inverso,  $q'(t')$  representa una función desconocida del tiempo que se pretende estimar a partir de una serie temporal de medidas discretas de temperatura superficial.

Se supone que la función  $q'(t')$  parte inicialmente desde un valor nulo y que transcurrido un cierto tiempo el flujo de calor se estabiliza en un valor nominal  $q_n$ . A partir de ese momento se supone que el flujo de calor sufre perturbaciones que lo desvían respecto a su valor nominal. El problema consiste por tanto en estimar la magnitud y forma de esas fluctuaciones.

En el caso concreto de un horno tubular, existen varias causas que pueden provocar perturbaciones en el flujo que reciben los tubos. En el Capítulo 6 se verán las principales causas de estas perturbaciones.

La función  $q'(t')$  se define formalmente como sigue; inicialmente parte de un valor nulo y a continuación, mediante un escalón de magnitud  $q_n$ , alcanza el valor nominal. Finalmente, transcurrido un tiempo suficiente para que se estabilice el flujo, se produce una perturbación que se nota por  $p'(t')$  de tal manera que  $q'(t') = q_n + p'(t')$ .

Dado que el periodo transitorio desde que  $q'(t')$  pasa de un valor nulo a estabilizarse en el valor nominal  $q_n$  no es relevante (en la práctica equivaldría a la fase de puesta en marcha del horno), en nuestro estudio se supone por simplicidad que el flujo pasa de 0 a  $q_n$  según una función escalón.

Por otro lado, como lo esencial es estimar las perturbaciones, a efectos de evaluar la bondad de las estimaciones solo se consideran las que corresponden temporalmente a la perturbación.

Como representa la figura 3.2, la perturbación se modela mediante un pulso triangular (equilátero).

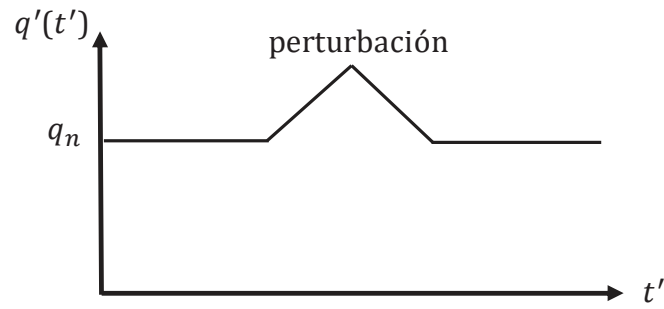


Figura 3.2. Perfil del flujo de calor  $q'(t')$

A continuación, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$T = \frac{T' - T_\infty}{q_n \frac{L}{k}} \quad x = \frac{x'}{L} \quad t = \frac{\alpha t'}{L^2} \quad B_i = \frac{hL}{k} \quad (3.2)$$

Las variables adimensionales  $t$  y  $B_i$  se corresponden con los números de Fourier y Biot respectivamente.

La formulación adimensional del problema directo viene dada ahora por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3a)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t) \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = B_i T(1, t) \quad (3.3c)$$

$$T(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.3d)$$

En la figura siguiente se representa el problema adimensional equivalente.

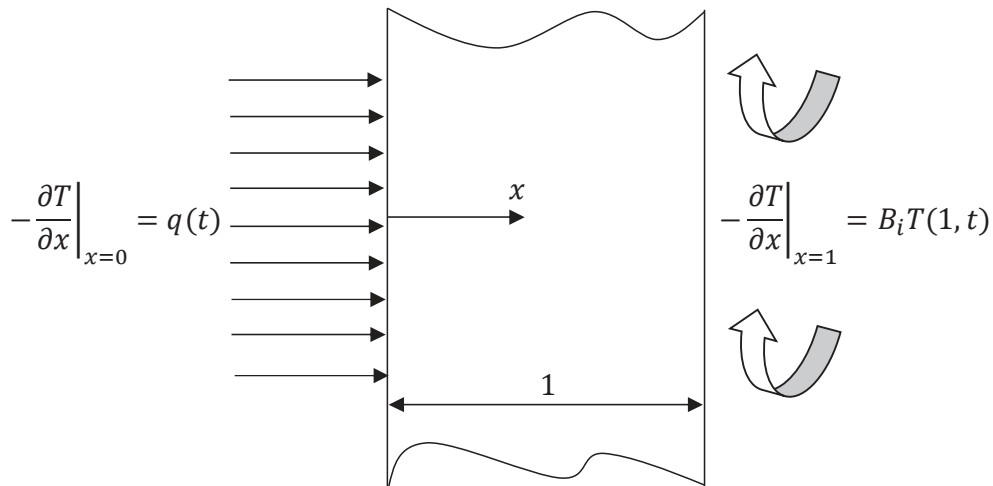


Figura 3.3. Esquema del problema directo asociado a las ecuaciones (3.2)

Si se comparan las ecuaciones (3.3) con las (3.1) se aprecia claramente la ventaja que implica la formulación adimensional. En el problema directo sin adimensionalizar, la temperatura  $T'$  es tal que  $T' = T'(x', t', L, k, \rho, c_p, q_n, h, T_\infty)$ , mientras que en el problema adimensional  $T$  depende solamente de tres variables  $T = T(x, t, Bi)$ .

La perturbación adimensional se nota por  $p(t)$ , con  $p(t) \equiv p'(t')/q_n$  y  $q(t) = 1 + p(t)$ , como representa la figura siguiente.

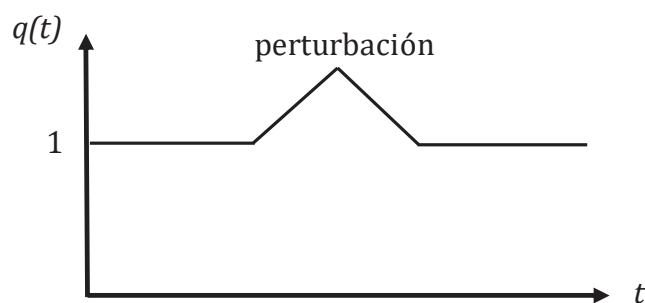


Figura 3.4. Perfil del flujo de calor adimensional  $q(t)$

A partir de la solución del problema directo se generan las medidas simuladas de temperatura superficial  $Y_i = Y(x = 0, t_i)$  para diferentes instantes de tiempo  $t_i = i \cdot \Delta t$ .

Las  $Y_i$  se obtienen sumando al valor de temperatura que se obtiene a partir de la solución del problema directo  $T_i = T(x = 0, t_i)$ , los errores aleatorios  $\varepsilon_i$  asociados al proceso de medición, es decir,  $Y_i = T_i + \varepsilon_i$ .

A su vez, los errores aleatorios  $\varepsilon_i$  se obtienen multiplicando la desviación estándar  $\sigma$  asociada a la medida de temperatura por un conjunto de números aleatorios  $u_i$  generados conforme a una distribución normal de media cero y desviación estándar unidad, es decir  $\varepsilon_i = \sigma u_i$ .

### 3.3 Problema inverso

El teorema de Duhamel y la posterior aplicación de la ley de Fourier proporciona una relación adecuada entre la respuesta del sensor (la evolución temporal de la temperatura superficial) y la excitación desconocida que se pretende estimar (la evolución temporal del flujo de calor).

El teorema de Duhamel [21,22,29] equivale conceptualmente al principio de superposición, de forma que la respuesta  $T(x, t)$  del sistema se obtiene mediante la convolución de la excitación (una función  $Y(t)$  de la temperatura superficial) y la solución fundamental  $u(x, t)$  correspondiente a la solución analítica del mismo problema para el caso en el que la excitación sea un escalón unitario de temperatura superficial.

En su formulación basada en temperatura, la forma más general del teorema de Duhamel tiene en cuenta la posibilidad de que la excitación pueda ser una función continua o discontinua:

$$T(x, t) = T_0 + \int_{\lambda=t_0}^{\lambda=t} u(x, t - \lambda) \frac{dY(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + \sum_{i=0}^{M-1} u(x, t - \lambda_i) \Delta Y_i \quad (3.4)$$

Siendo  $T_0$  la temperatura inicial uniforme y  $t$  un tiempo tal que  $t_{M-1} < t < t_M$ .

El término del sumatorio aplica al caso en el que las medidas de temperatura se consideran como una sucesión temporal de escalones  $\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$  desde  $Y_0$  hasta  $Y_{M-1}$ , tal como representa la figura 3.5. Mientras que el término integral se utiliza cuando las medidas de temperatura se consideran como una función continua lineal a trozos, como se ha representado en la figura 3.6.

Estas dos formas de tratar las medidas de temperatura originan dos posibles métodos de resolución de nuestro problema inverso: el Método Simple, que considera las medidas como saltos discontinuos y el Método SOLS que lo hace como una función continua.

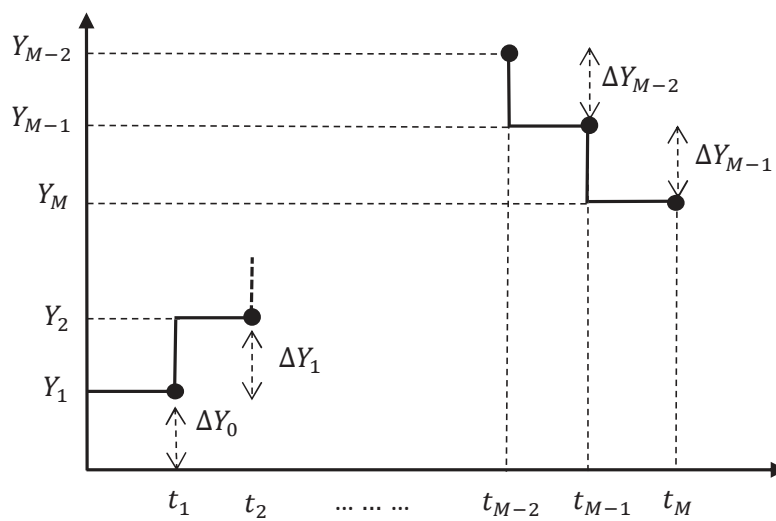


Figura 3.5. Medidas de temperatura consideradas como sucesión de escalones

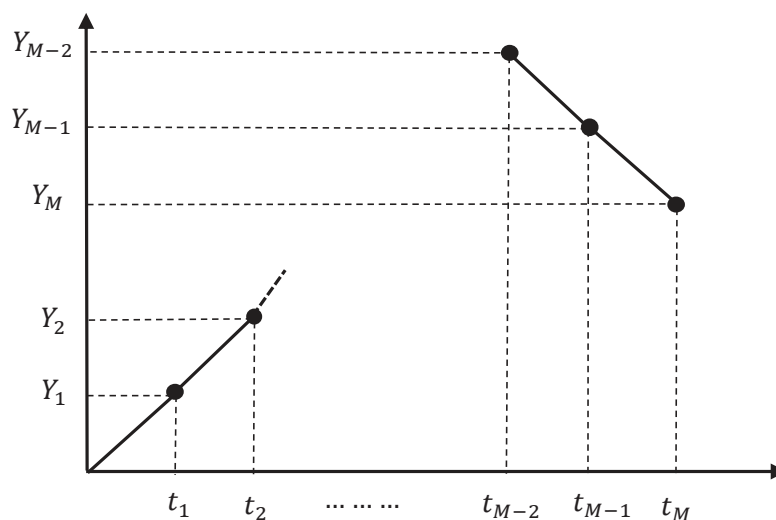


Figura 3.6. Medidas de temperatura consideradas como una función continua

El flujo de calor en la superficie del sólido se obtiene aplicando la ley de Fourier a la expresión (3.4) y particularizando el resultado para  $x=0$ .

$$-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q(t) = \int_{\lambda=t_0}^{\lambda=t} -u'(x, t - \lambda)\Big|_{x=0} \frac{dY(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + \sum_{i=0}^{M-1} -u'(x, t - \lambda_i)\Big|_{x=0} \Delta Y_i \quad (3.5)$$

Donde  $u'$  representa la derivada parcial espacial de la solución fundamental  $u(x, t)$ .

De (3.5) se deduce la necesidad de conocer la expresión analítica de  $u'(x, t)$  para poder aplicar esta metodología.

### 3.3.1 Solución fundamental $u(x, t)$

La solución fundamental adimensional  $u(x, t)$  es la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.6a)$$

$$u(0, t) = 1 \quad (3.6b)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = B_i u(1, t) \quad (3.6c)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.6d)$$

Donde  $B_i$  es el número de Biot.

Al existir una condición de contorno convectiva (ecuación 3.6c), puede concluirse desde un punto de vista físico que el sistema alcanzará un estado estacionario.

Por tanto, la solución del problema se puede expresar como superposición de una solución estacionaria y otra transitoria.

$$u(x, t) = s(x) + w(x, t) \quad (3.7)$$

Con la condición de que:

$$u(x, t \rightarrow \infty) = s(x) \quad (3.8)$$

La parte estacionaria  $s(x)$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = 0 \quad (3.9a)$$

$$s(0) = 1 \quad (3.9b)$$

$$-\left. \frac{ds}{dx} \right|_{x=1} = B_i s(1) \quad (3.9c)$$

Cuya solución trivial viene dada por:

$$s(x) = 1 - \frac{x}{1 + 1/B_i} \quad (3.10)$$

Por otro lado, la parte transitoria  $w(x, t)$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.11a)$$

$$w(0, t) = 1 \quad (3.11b)$$

$$-\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=1} = B_i w(1, t) \quad (3.11c)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.11d)$$

Ecuación que se resuelve por el método de separación de variables ensayando una solución del tipo:

$$w(x, t) = X(x) \cdot \Gamma(t) \quad \text{con} \quad \Gamma(t) = C \cdot e^{-\beta^2 t} \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11a), se obtiene que  $X(x)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \quad (3.13a)$$

$$X(0) = 1 \quad (3.13b)$$

$$-\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=1} = B_i \cdot X(1) \quad (3.13c)$$

Cuya solución fundamental viene dada por:

$$X(x) = \text{sen}(\beta_m x) \quad (3.14)$$

Siendo  $\beta_m$  las raíces de la ecuación trascendente:

$$\beta_m \cotg \beta_m = -B_i \quad (3.15)$$

Por tanto, la solución transitoria  $w(x, t)$  viene dada por:

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \text{sen}(\beta_m x) \cdot e^{-\beta_m^2 t} \quad (3.16)$$

Para obtener los coeficientes  $c_m$  se aplica la condición inicial (3.11d).

$$w(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \text{sen}(\beta_m x) = -s(x) \quad (3.17)$$

Si se aplica el operador  $\int_0^1 \text{sen}(\beta_m x) dx$  a ambos miembros de (3.17) y posteriormente la condición de ortogonalidad:  $\int_0^1 \text{sen}(\beta_m x) \text{sen}(\beta_n x) dx = \delta_{m,n} \int_0^1 \text{sen}^2(\beta_m x) dx$ , se obtiene:

$$c_m = \frac{\int_0^1 -s(x) \text{sen}(\beta_m x) dx}{\int_0^1 \text{sen}^2(\beta_m x) dx} \quad (3.18)$$

La integral del numerador viene dada por:

$$\int_0^1 -s(x) \text{sen}(\beta_m x) dx = \left[ \frac{1}{1 + 1/B_i} \left( \frac{\text{sen} \beta_m}{\beta_m^2} - \frac{\cos \beta_m}{\beta_m} \right) + \frac{\cos \beta_m - 1}{\beta_m} \right] \quad (3.19)$$

Y la integral del denominador por:

$$\int_0^1 \text{sen}^2(\beta_m x) dx = \frac{\beta_m^2 + B_i^2 + B_i}{2(\beta_m^2 + B_i^2)} \quad (3.20)$$

Recopilando los resultados anteriores se obtiene la solución fundamental  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \text{sen}(\beta_m x) \cdot e^{-\beta_m^2 t} + 1 - \frac{x}{1 + 1/B_i} \quad (3.21)$$

Donde los coeficientes  $c_m$  vienen dados por:

$$c_m = - \frac{2(\beta_m^2 + B_i^2)}{\beta_m(\beta_m^2 + B_i^2 + B_i)} \quad (3.22)$$

Por tanto, la derivada espacial de la solución fundamental en  $x=0$ , tal como requiere la expresión (3.5), viene dada por:

$$u'(x, t)|_{x=0} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \beta_m \cdot e^{-\beta_m^2 t} - \frac{1}{1 + 1/B_i} \quad (3.23)$$

### 3.4 Método Simple

Si se consideran las medidas de temperatura superficial como una sucesión de saltos discontinuos  $\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$ , tal como representa la figura 3.5, entonces el teorema de Duhamel se reduce al término sumatorio de (3.4).

Por lo que de acuerdo con (3.5), el flujo de calor  $q(t)$  viene dado por:

$$q(t) = \sum_{i=0}^{M-1} -u'(x, t - \lambda_i)|_{x=0} \Delta Y_i \quad (3.24)$$

Con  $\lambda_i = i\Delta t$  y  $t_{M-1} < t < t_M$ .

La expresión (3.24) es una convolución discreta que permite obtener secuencialmente el flujo de calor en cada paso de tiempo.

Comenzando desde el primer instante de tiempo  $t_1$ , el algoritmo es el siguiente:

$$t = t_1: \hat{q}_1 = q(0, t_1) = -u'(0, t_1)\Delta Y_0$$

$$t = t_2: \hat{q}_2 = q(0, t_2) = -u'(0, t_2)\Delta Y_0 - u'(0, t_1)\Delta Y_1$$

$$t = t_3: \hat{q}_3 = q(0, t_3) = -u'(0, t_3)\Delta Y_0 - u'(0, t_2)\Delta Y_1 - u'(0, t_1)\Delta Y_2$$

.....

$$t = t_M: \hat{q}_M = q(0, t_M) = -u'(0, t_M)\Delta Y_0 - u'(0, t_{M-1})\Delta Y_1 - \dots - u'(0, t_1)\Delta Y_{M-1} \quad (3.25)$$

Como refleja (3.25), este algoritmo tiene la ventaja de que no induce ningún retraso en la estimación. De hecho, tan pronto se dispone de  $Y_M$  se puede calcular  $\hat{q}_M$ .

En el apartado 3.4.1 se comprobará que la estimación obtenida con este método presenta un ligero sesgo. No obstante, debido a que la derivada  $u'(0, t)$  se evalúa en el instante final del intervalo de medición ( $t = t_1, t_2, \dots, t_M$ ), toma el menor de los posibles valores dentro del intervalo, lo cual minimiza el efecto de amplificación de errores.

Esto se puede apreciar inspeccionando la figura 3.7, en la cual se ha representado la respuesta fundamental  $u(x, t)$  para diferentes instantes de tiempo. Se observa, que el valor absoluto de la derivada de la respuesta fundamental en  $x=0$  es mayor cuanto menor sea el instante en el que se evalúa, tendiendo a  $\infty$  cuando  $t \rightarrow 0$ .

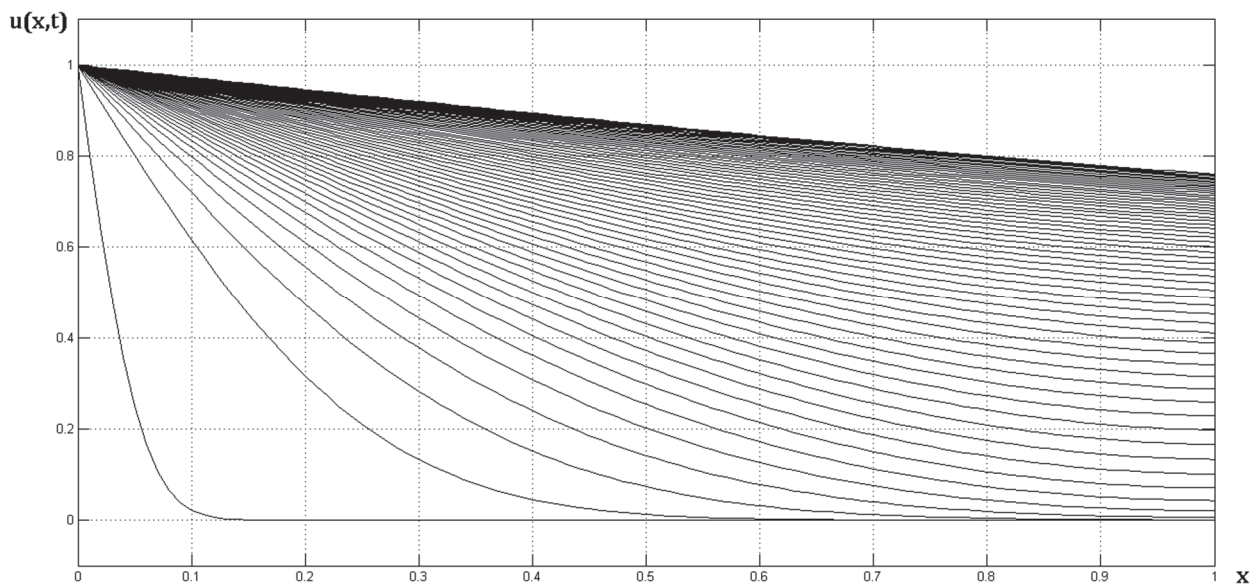


Figura 3.7. Familia de curvas  $u(x, t)$  para instantes de tiempo crecientes

Por tanto, la amplificación de errores es mayor en los términos multiplicados por  $u'(0, t_1)$  que en los que lo están por  $u'(0, t_2)$ . La misma conclusión puede obtenerse entre  $u'(0, t_2)$  y  $u'(0, t_3)$  y así sucesivamente.

Como refleja (3.25), el término  $u'(0, t_1)$  afecta a todas las estimaciones del flujo, por lo que cualquier cambio de criterio sobre el instante de tiempo en el que se evalúa la derivada, afecta a todas las estimaciones del flujo.

Por tanto, una técnica para reducir el sesgo de la estimación consiste en evaluar la derivada  $u'(0, t)$  en el instante central del intervalo en lugar del instante final. Aplicando este criterio, la expresión (3.24) queda:

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^M -u'(0, t_{i-1/2}) \Delta Y_{M-i} \quad (3.26)$$

Donde las  $u'(0, t_{i-1/2})$  están calculadas en los instantes de tiempo  $t_{i-1/2} = i \cdot \Delta t - \Delta t/2$ .

Sin embargo, al ser  $|-u'(0, t_i)| < |-u'(0, t_{i-1/2})|$ , ocurre que la expresión (3.26) tiene un mayor efecto de amplificación de errores que la correspondiente (3.24), sobre todo en el caso de que se consideren pasos de tiempo  $\Delta t$  pequeños.

Por tanto, aunque la expresión (3.26) proporciona un menor sesgo que la (3.24), tiene por otro lado la desventaja de ser más susceptible a los errores de medida.

Como conclusión, para un paso de tiempo  $\Delta t$  y una desviación estándar de los errores de medida, la única forma posible de mejorar la estimación con el Método Simple consistirá en modificar el instante de tiempo en el que se evalúa la derivada de la respuesta fundamental  $u'(0, t)$ , de manera que haya un compromiso entre el sesgo y la amplificación de errores.

### 3.4.1 Validación numérica del Método Simple

Desde un punto de vista general, la metodología para evaluar la bondad de la estimación proporcionada por un método cualquiera de resolución del IHCP consiste en someter el método a un test en el cual se estima una entrada conocida, a partir de la respuesta del sistema a dicha entrada contaminada con errores aleatorios para simular los errores de medición.

De acuerdo con esto, para validar numéricamente el Método Simple se escoge como entrada  $q(t)$  a estimar un escalón unitario de flujo, seguido, una vez finalizado el transitorio, de una perturbación triangular (equilátera) tal como representa la figura 3.4.

La metodología de validación se resume en cuatro pasos:

- 1) Se obtiene la respuesta del sistema a la entrada seleccionada, lo que equivale a resolver el problema directo correspondiente. La solución puede obtenerse mediante un método analítico o numérico.
- 2) Una vez obtenido el campo de temperatura “exacto”  $T(x, t)$ , se particulariza para la posición donde se ubica el sensor  $x=0$  y se contamina con errores aleatorios que simulan el proceso real de medición. Para comparar las estimaciones de una forma objetiva, en todas las validaciones se utiliza el mismo conjunto de números aleatorios.
- 3) Las medidas simuladas de temperatura superficial obtenidas en el paso anterior se introducen como entradas al algoritmo de resolución del problema inverso y se obtiene la estimación.
- 4) Se evalúa la bondad de la estimación mediante unos estimadores de error apropiados.

El primer paso consiste en resolver el problema directo para obtener la respuesta del sistema  $T(x, t)$ . En el Anexo-2 se detalla el cálculo de esta solución.

En la figura siguiente se representa la solución del problema directo para diferentes valores de  $x$  junto con la entrada de flujo a estimar. Obviamente, la respuesta máxima se obtiene para  $x=0$ .

Como entrada, se ha considerado un escalón unitario de flujo, seguido, una vez alcanzado el estado estacionario, de una perturbación triangular simétrica de amplitud  $A_p=15\%$ . La perturbación se inicia en el tiempo adimensional  $t=300$  y acaba en  $t=900$ . El periodo de estimación finaliza en  $t_f=1200$  cuando se alcanza nuevamente el estacionario.

Para la validación numérica se usa un número de Biot representativo de la aplicación práctica:  $Bi=0.25$ .

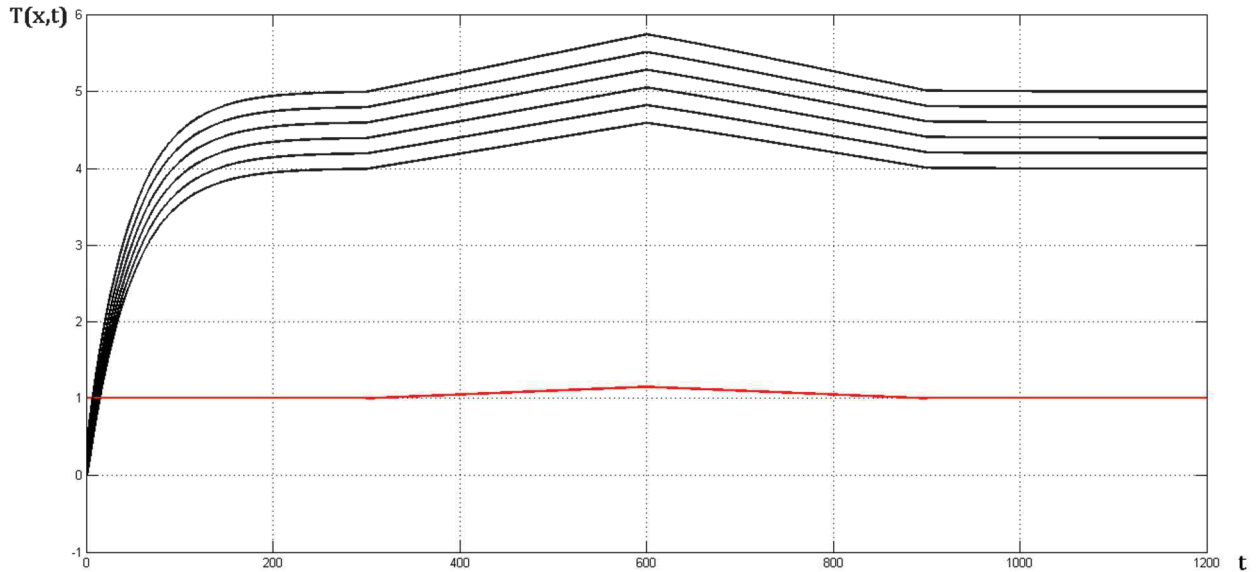


Figura 3.8. Campo de temperatura para distintos valores de  $x$  y flujo de calor

Se consideran dos niveles de ruido correspondientes al 1 y 3% del valor máximo de temperatura superficial adimensional (5.75), para un nivel de confianza del 99% ( $\pm 2.576\sigma$ ). Por tanto, el nivel bajo de ruido se caracteriza con una  $\sigma=0.022$  y el nivel alto con  $\sigma=0.067$ .

Para evaluar numéricamente la bondad de la estimación se utilizan los siguientes estimadores de error [1]:

$$D = \frac{1}{A_p} \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{q}_i|_{\sigma=0} - q_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27a)$$

$$\sigma_q = \frac{1}{A_p} \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{q}_i - \hat{q}_i|_{\sigma=0})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27b)$$

$$S = \frac{1}{A_p} \left[ \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{q}_i - q_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27c)$$

$N$  corresponde al número total de estimaciones incluidas en el periodo de la perturbación,  $q_i$  a los valores conocidos del flujo de calor en cada instante de tiempo,  $\hat{q}_i|_{\sigma=0}$  a las estimaciones obtenidas sin errores aleatorios y  $\hat{q}_i$  a las que se obtienen cuando se incluyen esos errores.

De acuerdo con esto,  $D$  representa el estimador del sesgo,  $\sigma_q$  el de amplificación de errores y  $S$  el estimador que engloba ambos efectos.

Como el objetivo es estimar la perturbación respecto al valor nominal del flujo, los tres estimadores se han normalizado respecto a la amplitud de la perturbación  $A_p$ .

Respecto al intervalo (adimensional) entre mediciones, se consideran cuatro posibles pasos de tiempo  $\Delta t$ : 10, 5, 2.5 y 1.

En las tablas 3.1 y 3.2 se exponen los valores que se obtienen para los estimadores de error (3.27) calculados únicamente con las estimaciones correspondientes a la perturbación, es decir, sin considerar el escalón inicial ni los estacionarios anteriores y posteriores a la perturbación.

Por simplicidad, denominaremos MS1 al algoritmo asociado a la expresión (3.24) en el que se evalúa la derivada  $u'(0, t)$  al final del intervalo de medición y MS1/2 al algoritmo en el que se evalúa la derivada en el instante central como indica la expresión (3.26).

En las tablas siguientes se presentan los estimadores de error para cada algoritmo.

	$\Delta t$	$D$	$\sigma_q$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	10	0,0088	0,0419	0,0353	
	5	0,0087	0,0403	0,0347	
	2,5	0,0087	0,0432	0,0370	
	1	0,0086	0,0504	0,0454	figura 3.9
$\sigma=0.067$	10	0,0088	0,1276	0,1207	figura 3.13
	5	0,0087	0,1229	0,1168	figura 3.14
	2,5	0,0087	0,1316	0,1251	
	1	0,0086	0,1536	0,1482	figura 3.11

Tabla 3.1. Estimadores de error para algoritmo MS1

	$\Delta t$	$D$	$\sigma_q$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	10	0,0088	0,0419	0,0353	
	5	0,0087	0,0404	0,0347	
	2,5	0,0086	0,0460	0,0402	
	1	0,0095	0,0784	0,0754	figura 3.10
$\sigma=0.067$	10	0,0088	0,1276	0,1207	
	5	0,0087	0,1230	0,1170	
	2,5	0,0086	0,1399	0,1339	
	1	0,0095	0,2386	0,2353	figura 3.12

Tabla 3.2. Estimadores de error para algoritmo MS1/2

Comparando las tablas anteriores, se observa que para los pasos de tiempo mayores las estimaciones de ambos algoritmos son muy similares. Sin embargo, como era de esperar, para pasos de tiempo pequeño, el algoritmo MS1 proporciona mejores estimaciones que el MS1/2.

En condiciones de bajo nivel de ruido ( $\sigma=0.022$ ), la mayor desviación entre ambos algoritmos se presenta para  $\Delta t=1$ . En las figuras 3.9 y 3.10 se representan las dos estimaciones para el periodo correspondiente a la perturbación.

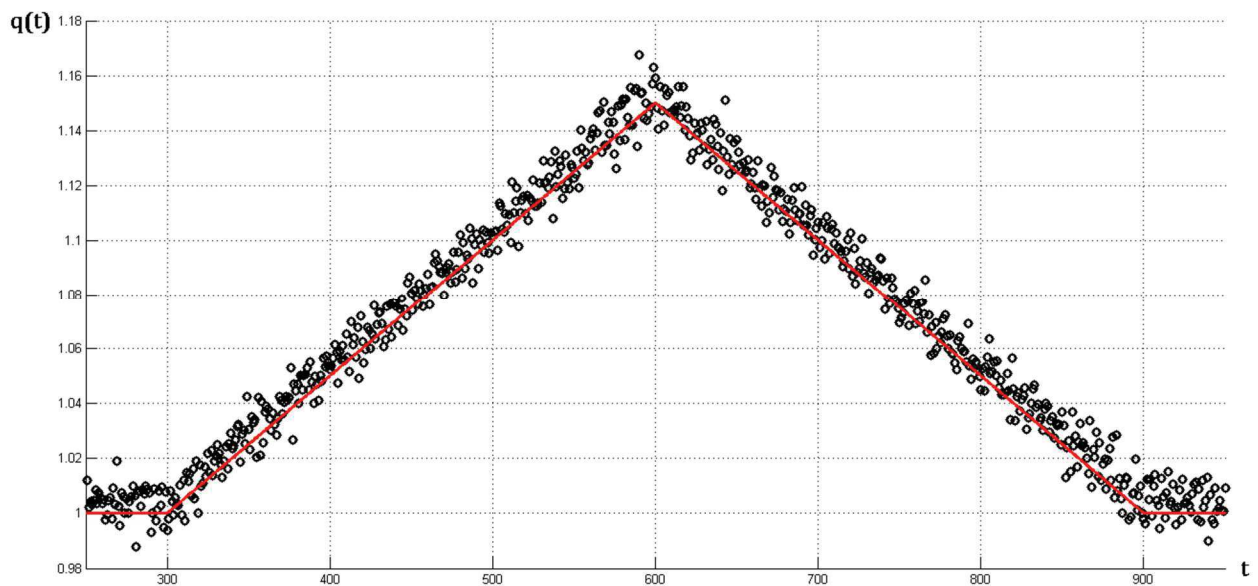


Figura 3.9. Estimación de la perturbación con algoritmo MS1:  $\sigma=0.022$  y  $\Delta t=1$

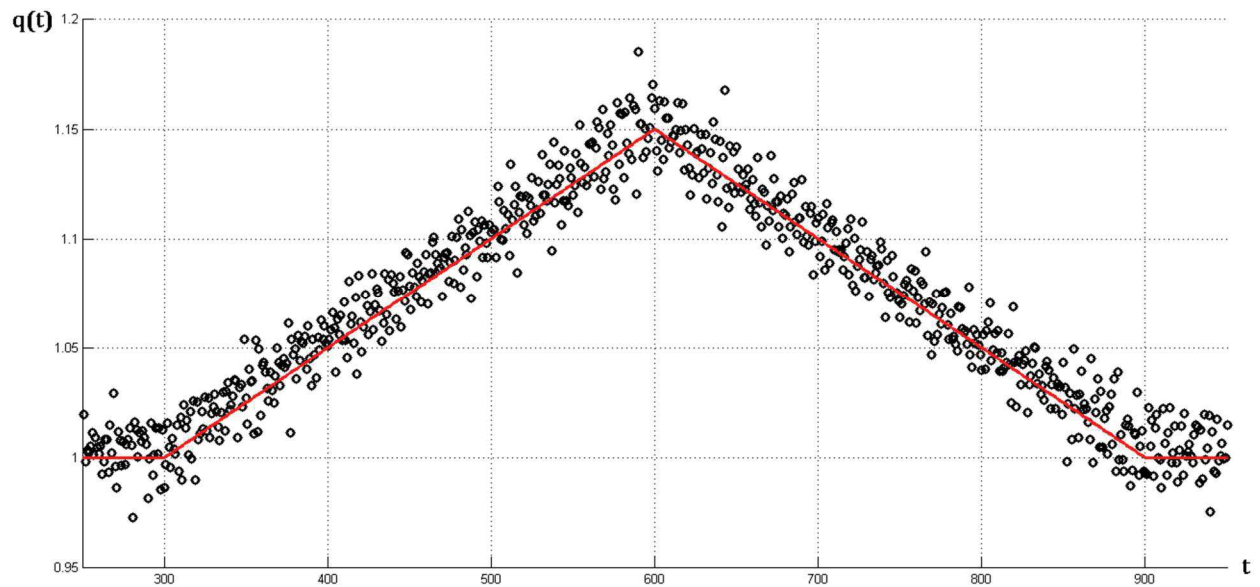


Figura 3.10. Estimación de la perturbación con algoritmo MS1/2:  $\sigma=0.022$  y  $\Delta t=1$

En el caso de alto nivel de ruido ( $\sigma=0.067$ ), también ocurre que la mayor desviación entre ambos algoritmos se presenta para  $\Delta t=1$ . En las figuras 3.11 y 3.12 se representan las dos estimaciones.

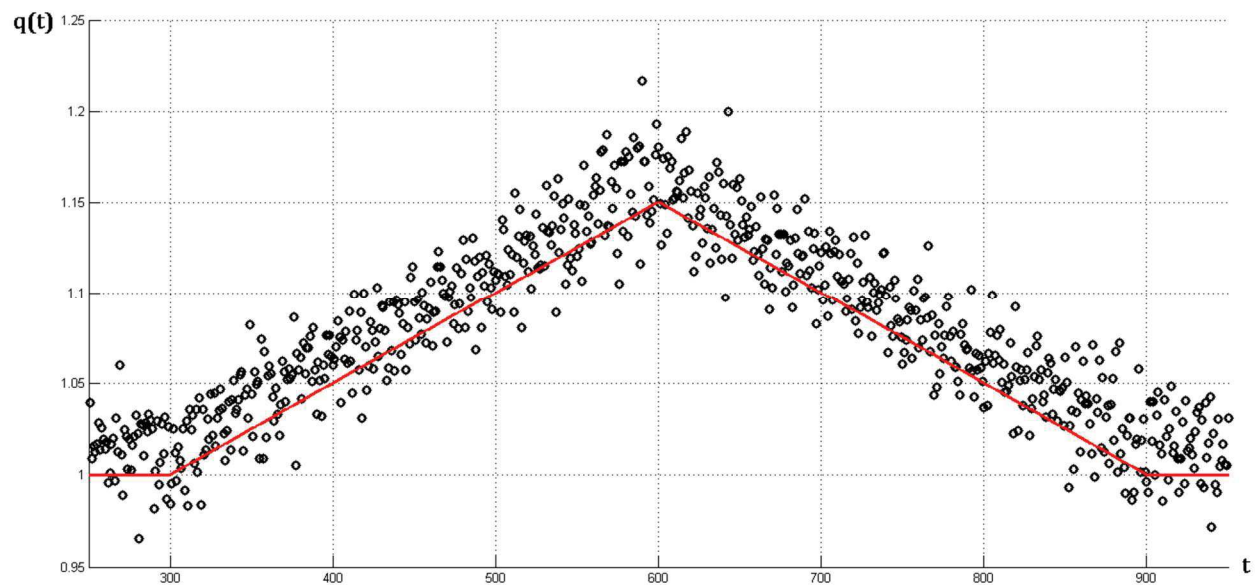


Figura 3.11. Estimación de la perturbación con algoritmo MS1:  $\sigma=0.067$  y  $\Delta t=1$

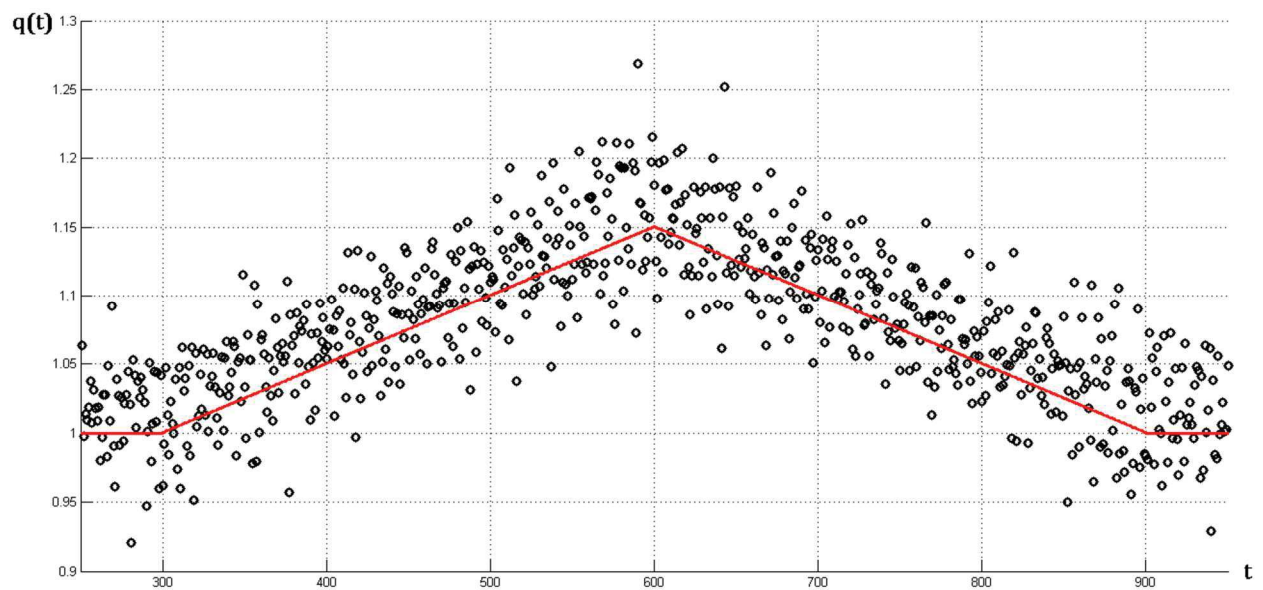


Figura 3.12. Estimación de la perturbación con algoritmo MS1/2:  $\sigma=0.067$  y  $\Delta t=1$

En las figuras 3.13 y 3.14 se ha representado la estimación completa (incluido el escalón inicial de flujo) del algoritmo MS1 para  $\Delta t=10$  y  $\Delta t=5$ , en los dos casos para alto nivel de ruido.

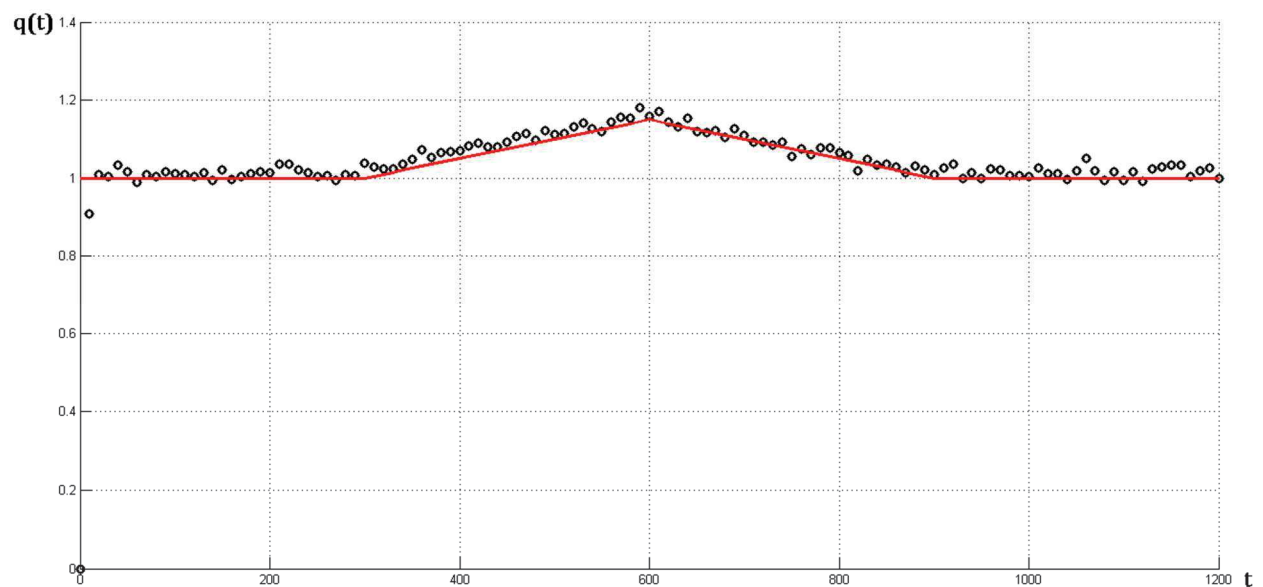


Figura 3.13. Estimación completa con algoritmo MS1:  $\sigma=0.067$  y  $\Delta t=10$

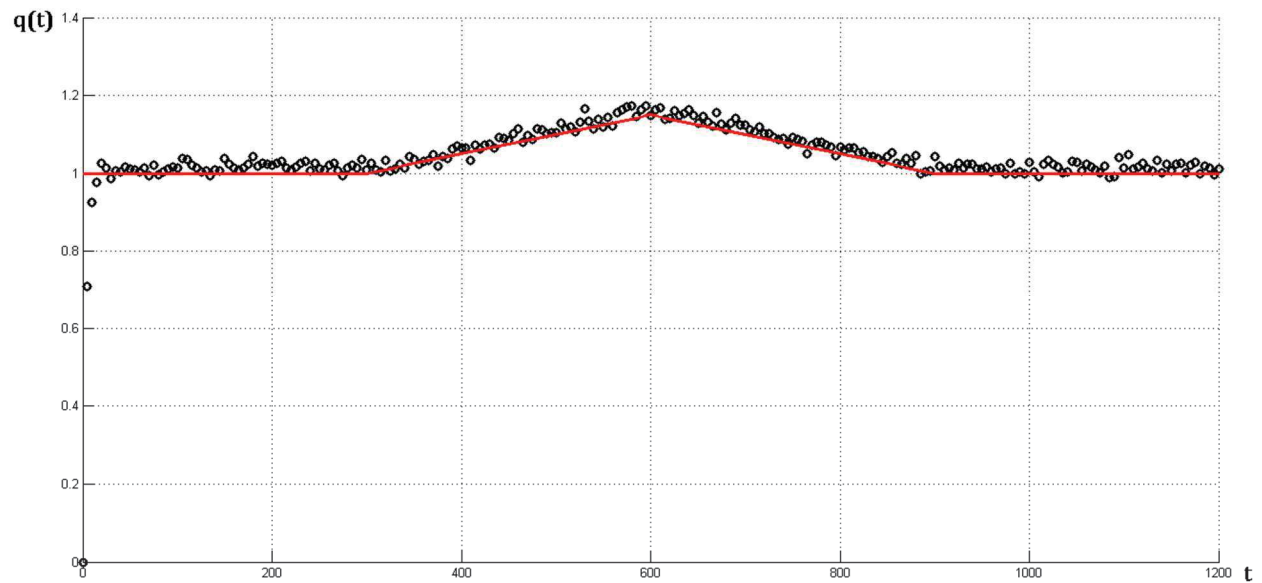


Figura 3.14. Estimación completa con algoritmo MS1:  $\sigma=0.067$  y  $\Delta t=5$

Como resultado del análisis de las figuras anteriores, puede concluirse que en los casos de alto ruido y resolución temporal (figuras 3.11 y 3.12) el Método Simple no tiene la suficiente potencia como para poder manejar adecuadamente el efecto de amplificación de errores. No obstante, de entre ambos algoritmos será preferible utilizar el algoritmo MS1.

Las limitaciones del Método Simple se pueden superar desarrollando un nuevo método en el que la dependencia temporal de la temperatura superficial se modela como una función continua lineal a trozos.

Esta suposición nos permite iniciar el desarrollo con otra expresión del teorema de Duhamel, la cual conduce a un nuevo algoritmo sobre el que se aplica una técnica de estabilización basada en mínimos cuadrados. Como resultado final, se obtendrá un algoritmo más potente que funciona adecuadamente con pasos de tiempo pequeños.

### 3.5 Método SOLS

En el apartado 3.4 se ha desarrollado un método que, aunque simple, permite estimar secuencialmente el flujo a partir de medidas de temperatura superficial.

El Método Simple tiene un comportamiento estable, como lo demuestra su capacidad para estimar el flujo en condiciones de alto nivel de ruido. Sin embargo, al no incorporar ninguna técnica de regularización, en los casos de alta resolución temporal proporciona una estimación muy afectada por los errores de medición (figuras 3.11 y 3.12). Esta limitación hace que el Método Simple pueda no ser adecuado para determinadas aplicaciones prácticas.

En este apartado se desarrolla un método más potente basado en considerar que las medidas de temperatura superficial evolucionan como una función continua lineal a trozos (figura 3.6), asumiendo por tanto una dependencia temporal lineal entre dos medidas consecutivas de temperatura.

De acuerdo con esto, las expresiones del teorema de Duhamel (3.4) y de la ley de Fourier (3.5) quedan reducidas a su parte integral:

$$q(t) = \int_{\lambda=t_0}^{\lambda=t} -u'(x, t - \lambda)|_{x=0} \frac{dY(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad (3.28)$$

Donde  $u'(x, t - \lambda)|_{x=0}$  fue calculada previamente en (3.23).

Para un paso de tiempo cualquiera  $i$  (intervalo desde  $t_{i-1}$  hasta  $t_i$ ), se considera por hipótesis que  $Y(t)$  varía linealmente, lo que implica que su derivada toma un valor constante  $\dot{Y}_i$  en dicho intervalo.

Sustituyendo ahora  $t$  por  $t_M = M \cdot \Delta t$  y haciendo  $t_0 = 0$ , la expresión (3.28) queda:

$$q(t_M) = \sum_{i=1}^M \dot{Y}_i \int_{\lambda=t_{i-1}}^{\lambda=t_i} -u'(x, t_M - \lambda)|_{x=0} d\lambda \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta la expresión (3.23) la integral viene dada por:

$$\int u'(x, t_M - \lambda)|_{x=0} d\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m} \cdot e^{-\beta_m^2(t_M - \lambda)} - \frac{\lambda}{1 + 1/B_i} \quad (3.30)$$

Se introduce ahora la siguiente notación:

$$g(t_M - \lambda) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m} \cdot e^{-\beta_m^2(t_M - \lambda)} - \frac{\lambda}{1 + 1/B_i} \quad (3.31)$$

Por lo que la expresión (3.29) puede ponerse:

$$q(t_M) = \sum_{i=1}^M \dot{Y}_i [g(t_M - t_{i-1}) - g(t_M - t_i)] \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta ahora que  $t_{i-1} = (i - 1) \cdot \Delta t$  y que  $t_i = i \cdot \Delta t$  se obtiene:

$$g(t_M - t_{i-1}) - g(t_M - t_i) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m} \cdot [e^{-\beta_m^2(M-i+1)\Delta t} - e^{-\beta_m^2(M-i)\Delta t}] + \frac{\Delta t}{1 + 1/B_i} \quad (3.33)$$

Para simplificar este resultado se introduce otra notación adicional:

$$g(t_M - t_{i-1}) - g(t_M - t_i) \equiv Z_{M-i} \quad (3.34)$$

Con esta notación (3.32) viene dada por:

$$\hat{q}_M \equiv q(t_M) = \sum_{i=1}^M \dot{Y}_i \cdot Z_{M-i} \quad (3.35)$$

La expresión anterior permite estimar secuencialmente el flujo de calor a partir de  $\hat{q}_1$ :

$$t = t_1: \hat{q}_1 = q(0, t_1) = \dot{Y}_1 Z_0$$

$$t = t_2: \hat{q}_2 = q(0, t_2) = \dot{Y}_1 Z_1 + \dot{Y}_2 Z_0$$

$$t = t_3: \hat{q}_3 = q(0, t_3) = \dot{Y}_1 Z_2 + \dot{Y}_2 Z_1 + \dot{Y}_3 Z_0$$

.....

$$t = t_M: \hat{q}_M = q(0, t_M) = \dot{Y}_1 Z_{M-1} + \dot{Y}_2 Z_{M-2} + \dot{Y}_3 Z_{M-3} + \dots + \dot{Y}_{M-1} Z_1 + \dot{Y}_M Z_0 \quad (3.36)$$

A la hora de implementar el algoritmo (3.36), debe prestarse especial atención al coeficiente  $Z_0$ , ya que este afecta a todas las componentes del flujo.

En efecto, teniendo en cuenta las expresiones (3.33) y (3.34) y haciendo  $M=i$ , se obtiene un argumento nulo en la segunda exponencial, por lo que  $Z_0$  viene dado por:

$$Z_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m} \cdot (e^{-\beta_m^2 \Delta t} - 1) + \frac{\Delta t}{1 + 1/B_i} \quad (3.37)$$

Para el resto de coeficientes  $Z_i$  los argumentos de ambas exponenciales son distintos de cero, por lo que es suficiente con considerar unos pocos autovalores (1 ó 2) para que la expresión (3.33) converja. Sin embargo, para  $Z_0$  se necesita tener en cuenta un mayor número de autovalores.

Como indica la expresión (3.35), es necesario evaluar numéricamente la derivada temporal  $\dot{Y}_j$  ( $j=1, 2, \dots, M$ ) para poder estimar las componentes del flujo  $\hat{q}_M$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ).

A priori, la derivada  $\dot{Y}_j$  podría calcularse numéricamente mediante la conocida fórmula:

$$\dot{Y}_j = \frac{Y_j - Y_{j-1}}{\Delta t} \quad (3.38)$$

Sin embargo, la estimación del flujo que se obtiene a partir de (3.38) es muy deficiente debido a la naturaleza mal-condicionada de la diferenciación numérica, siendo incluso de peor calidad que la que se obtiene con el Método Simple.

Para mejorar este método se hace uso de la técnica de mínimos cuadrados, por lo que en adelante al método se le denomina Método SOLS (Sequential Ordinary Least Squares Method). De esta manera,  $\dot{Y}_j$  se calcula mediante una regresión lineal de un conjunto reducido de medidas de temperatura superficial. Puesto que el objetivo es obtener el valor de  $\dot{Y}_j$  en cada paso de tiempo, el ajuste se hace sobre un conjunto de  $r$ -pasadas, actual y  $r$ -futuras medidas de temperatura.

Por tanto, para estimar la componente del flujo  $\hat{q}_m$  en el instante  $t_m$ , se necesita disponer de las siguientes medidas de temperatura:  $Y_{m-r}, Y_{m-r+1}, \dots, Y_{m-1}, Y_m, Y_{m+1}, \dots, Y_{m+r-1}, Y_{m+r}$ .

Por hipótesis se especifica que la temperatura tiene un comportamiento lineal:  $T=a_0+a_1t$ , por lo que la función objetivo a minimizar viene dada por:

$$S = \sum_{j=m-r}^{m+r} (Y_j - T_j)^2 = \sum_{j=m-r}^{m+r} (Y_j - a_0 - a_1 t_j)^2 \quad (3.39)$$

Obteniéndose la ecuación normal correspondiente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Donde los coeficientes vienen dados por:

$$A_{11} = 2r + 1 \quad A_{12} = \sum_{j=m-r}^{m+r} t_j = (2r + 1)m\Delta t \quad b_1 = \sum_{j=m-r}^{m+r} Y_j \quad (3.41)$$

$$A_{21} = A_{12} \quad A_{22} = \sum_{j=m-r}^{m+r} t_j^2 = (\Delta t)^2 \sum_{j=m-r}^{m+r} j^2 \quad b_2 = \sum_{j=m-r}^{m+r} Y_j t_j = (\Delta t) \sum_{j=m-r}^{m+r} Y_j j$$

Del sistema de ecuaciones (3.40) se obtiene  $a_1$  y por tanto el valor numérico de la derivada temporal de temperatura  $\dot{Y}_m$ .

Si en lugar de realizar el ajuste sobre  $2r+1$  medidas de temperatura se usan solo  $2r$  :  $r$ -pasadas y  $r$ -futuras, es decir, sin incluir  $Y_m$  en la regresión, entonces se obtiene una expresión compacta para  $\dot{Y}_m$  :

$$\dot{Y}_m = \frac{\sum_{j=1}^{j=r} (j Y_{m+j} - j Y_{m-j})}{2\Delta t \sum_{j=1}^{j=r} j^2} \quad (3.42)$$

Expresión, que para el caso de  $r=1$  coincide con la derivada numérica por diferencias centradas. Se ha verificado que la inclusión o no de  $Y_m$  en (3.39) apenas influye sobre la estimación, por lo que se utilizará (3.42) debido a su mayor simplicidad de implementación software.

### 3.5.1 Comparativa entre Método Simple y Método SOLS

Para evaluar el grado de mejora que introduce el Método SOLS frente al Método Simple, se somete al mismo tipo de entrada utilizada en 3.4.1 y se evalúan los estimadores de error para los mismos pasos de tiempo y niveles de ruido que en la tabla 3.1.

En la Tabla 3.3 se exponen los resultados obtenidos con el Método SOLS. Junto con los estimadores de error, se incluye también el valor del parámetro  $r$  que minimiza el estimador de error total  $S$  y el retardo que induce la estimación ( $r \cdot \Delta t$ ).

	$\Delta t$	$r$	retardo	$D$	$\sigma_q$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	10	3	30	0,0162	0,0168	0,0309	
	5	6	30	0,0090	0,0100	0,0109	
	2,5	8	20	0,0043	0,0074	0,0095	
	1	18	18	0,0028	0,0051	0,0055	figura 3.15
$\sigma=0.067$	10	5	50	0,0194	0,0471	0,0621	
	5	12	60	0,0172	0,0255	0,0248	
	2,5	16	40	0,0090	0,0156	0,0206	
	1	31	31	0,0058	0,0122	0,0133	figura 3.16

Tabla 3.3. Estimadores de error con el Método SOLS

Comparando los resultados de esta tabla con los de la tabla 3.1, se aprecia claramente la mayor potencia del Método SOLS frente al Método Simple, sobre todo en los casos de alta resolución temporal.

Por ejemplo, para el caso  $\Delta t=1$ , independientemente del nivel de ruido, el valor del estimador de error total  $S$  que se obtiene con el Método SOLS es unas diez veces inferior al que se obtiene con el Método Simple.

En las figuras 3.15 y 3.16 se representan las estimaciones para  $\Delta t=1$ , que se corresponden con las figuras 3.9 y 3.11 obtenidas con el Método Simple.

Comparando las figuras, se demuestra una gran superioridad del Método SOLS sobre el Método Simple para los casos de alto ruido y alta resolución temporal.

Por tanto, se concluye que el Método SOLS proporciona sistemáticamente mejores estimaciones que la del Método Simple, especialmente en los casos de alta resolución temporal en los que las prestaciones del SOLS son muy superiores.

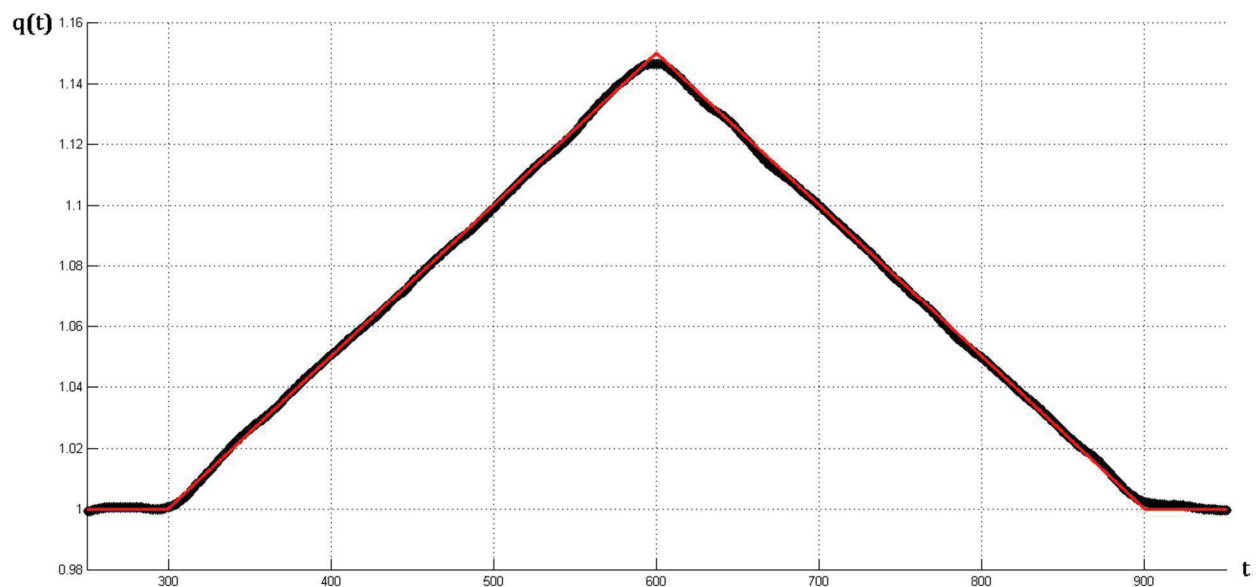


Figura 3.15. Estimación de la perturbación con Método SOLS:  $\sigma=0.022$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=18$

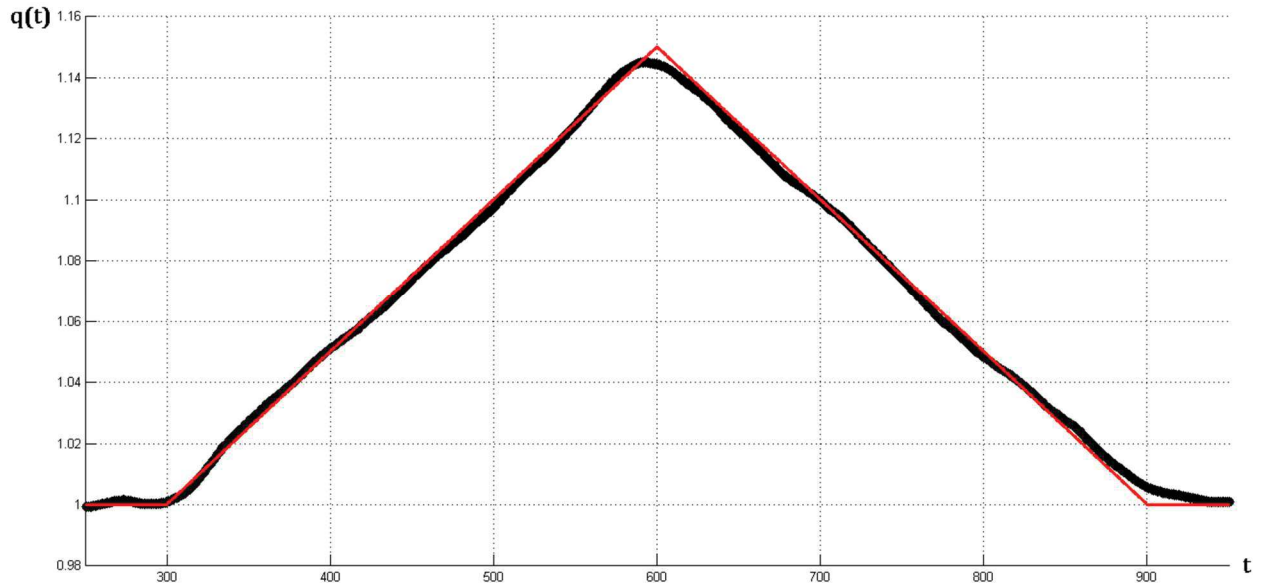


Figura 3.16. Estimación de la perturbación con Método SOLS:  $\sigma=0.067$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=31$

### 3.6 Comparativa entre Método SOLS y Método FSM

De acuerdo con la expresión (3.42), el Método SOLS evalúa la derivada temporal  $\dot{Y}_m$  a partir de  $r$ -pasadas y  $r$ -futuras medidas de temperatura, por lo que sus estimaciones pueden compararse de una manera muy directa con las del Método FSM, que utiliza también  $r$ -futuras medidas de temperatura.

El Método FSM es mucho más general que el SOLS en el sentido de que puede manejar cualquier distancia del sensor a la superficie del sólido. Por ello, para adaptarlo a nuestro problema inverso “límite” se particulariza al caso en el que el sensor se encuentra a una distancia nula de la superficie.

Para poder realizar la comparación, se introduce al Método FSM la misma entrada que en los apartados anteriores y los mismos niveles de ruido. Lógicamente, también se utiliza el mismo conjunto de números aleatorios.

En la tabla siguiente se exponen los resultados que se obtienen con el Método FSM para los mismos casos analizados en la tabla 3.3.

	$\Delta t$	$r$	retardo	$D$	$\sigma_q$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	10	3	30	0,1495	0,0517	0,1698	
	5	5	25	0,1409	0,0397	0,1428	
	2,5	8	20	0,1357	0,0321	0,1381	
	1	18	18	0,1331	0,0249	0,1356	figura 3.17
$\sigma=0.067$	10	5	50	0,1614	0,0819	0,2141	
	5	8	40	0,1499	0,0629	0,1539	
	2,5	13	32,5	0,1426	0,0551	0,1493	
	1	28	28	0,1383	0,0401	0,1444	figura 3.18

Tabla 3.4. Estimadores de error con el Método FSM

Comparando las tablas 3.3 y 3.4, se observa claramente que el Método SOLS proporciona en todos los casos mejores estimaciones que el Método FSM.

No obstante, ello no debe interpretarse como que el SOLS es superior al FSM, ya que el primero solo es aplicable cuando el sensor se ubica en la superficie del sólido, mientras que el Método FSM es válido para cualquier localización del sensor, tanto interior como sobre la superficie del sólido.

En las figuras 3.17 y 3.18 se representan las estimaciones obtenidas con el FSM equivalentes a las de las figuras 3.15 y 3.16 que se obtuvieron con el SOLS.

Del análisis de estas gráficas se deduce que las estimaciones del Método FSM sobrevaloran la perturbación del flujo en aproximadamente un 10% del valor real, algo que no ocurría con el Método SOLS.

Puesto que para la aplicación práctica que se estudia en esta tesis lo más importante es cuantificar con la mayor exactitud posible la magnitud de las perturbaciones del flujo, del análisis anterior se concluye claramente que el Método SOLS es el más idóneo para abordarla.

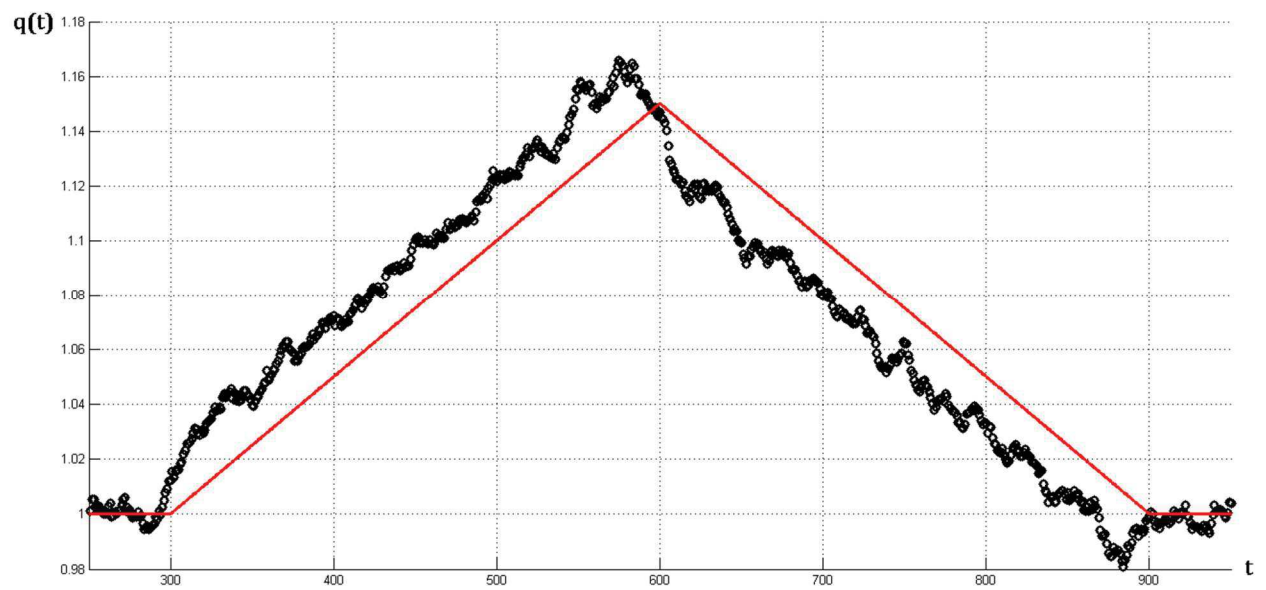


Figura 3.17. Estimación de la perturbación con Método FSM:  $\sigma=0.022$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=18$

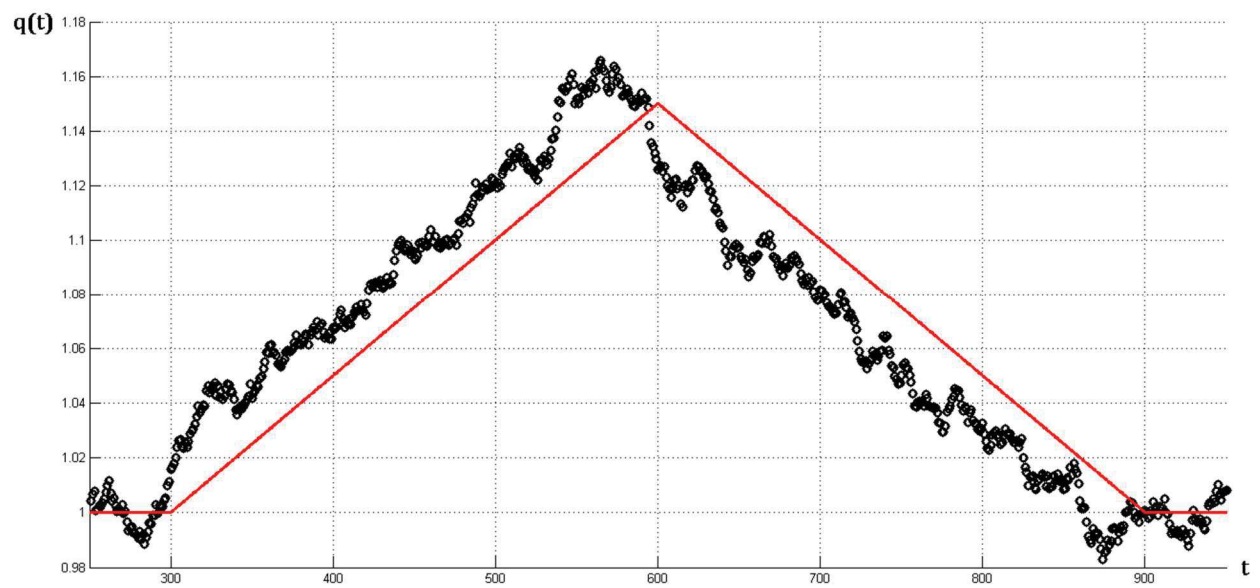


Figura 3.18. Estimación de la perturbación con Método FSM:  $\sigma=0.067$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=28$

## Capítulo 4

### Formulación recursiva del Método SOLS

#### 4.1 Introducción

Cuando se aplica el Método SOLS a un proceso de larga duración, el algoritmo asociado al algoritmo (3.36) implica un gran esfuerzo computacional, ya que a medida que la estimación avanza en el tiempo se va incrementando el número de sumandos. Este efecto es más acusado en los casos de alta resolución temporal, ya que, para un intervalo temporal dado, el número de sumandos se incrementa conforme disminuye el paso de tiempo.

Así, en aquellos casos en los que  $M$  toma un valor grande, puesto que la estimación  $\hat{q}_M$  incorpora la historia completa desde el instante inicial  $t_1$  hasta el instante  $t_M$ , el número de términos que componen (3.36) puede llegar a ser enorme.

En este capítulo se desarrolla la formulación recursiva del Método SOLS que, para aquellos casos en los que  $M$  es un número grande, permite obtener una estimación aproximada del flujo de calor a partir de un número reducido de sumandos, ya que sólo utiliza la información que es influyente en la estimación actual.

Gracias a esta formulación pueden abordarse problemas de larga duración con una carga computacional aceptable.

## 4.2 Formulación recursiva

En la expresión (3.36), la primera estimación del flujo  $\hat{q}_1$  se obtiene a partir de la derivada  $\dot{Y}_1$  y del coeficiente  $Z_0$ , de manera que:

$$\dot{Y}_1 = \frac{\hat{q}_1}{Z_0} \quad (4.1)$$

Si se sustituye (4.1) en la expresión de (3.36) correspondiente a  $\hat{q}_2$ , entonces es posible expresar  $\hat{q}_2$  en función de la estimación previa  $\hat{q}_1$ .

$$\hat{q}_2 = \frac{Z_1}{Z_0} \hat{q}_1 + \dot{Y}_2 Z_0 \quad (4.2)$$

Si se define ahora el factor adimensional  $F_1 \equiv Z_1/Z_0$ , entonces la expresión (4.2) puede ponerse:

$$\hat{q}_2 = F_1 \hat{q}_1 + \dot{Y}_2 Z_0 \quad (4.3)$$

Expresión que permite despejar  $\dot{Y}_2$  en función de  $\hat{q}_1$ ,  $\hat{q}_2$ ,  $F_1$  y  $Z_0$ :

$$\dot{Y}_2 = \frac{1}{Z_0} (\hat{q}_2 - F_1 \hat{q}_1) \quad (4.4)$$

Si se sustituyen las expresiones (4.1) y (4.4) obtenidas para  $\dot{Y}_1$  e  $\dot{Y}_2$  respectivamente en la expresión de (3.35) correspondiente a  $\hat{q}_3$ :

$$\hat{q}_3 = \left( \frac{Z_2}{Z_0} - F_1 \frac{Z_1}{Z_0} \right) \hat{q}_1 + F_1 \hat{q}_2 + \dot{Y}_3 Z_0 = [F_2 \ F_1] \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} + \dot{Y}_3 Z_0 \quad (4.5)$$

Donde el factor adimensional  $F_2$  depende ahora de  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $F_1$ :

$$F_2 = \frac{1}{Z_0} [Z_2 \ Z_1] \begin{bmatrix} 1 \\ -F_1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Por aplicación sucesiva de este procedimiento, la última estimación  $\hat{q}_M$  puede expresarse:

$$\hat{q}_M = [\mathbf{F}][\hat{\mathbf{q}}_{past}] + \dot{Y}_M Z_0 \quad (4.7a)$$

Donde los vectores fila  $[\mathbf{F}]$  y columna  $[\hat{\mathbf{q}}_{past}]$  vienen dados por:

$$[\mathbf{F}] = [F_{M-1} \ F_{M-2} \ \cdots \ F_1] \quad (4.7b)$$

$$[\hat{\mathbf{q}}_{past}] = [\hat{q}_1 \ \hat{q}_2 \ \cdots \ \hat{q}_{M-1}]^T \quad (4.7c)$$

Y los coeficientes adimensionales  $F$  por:

$$F_{M-1} = \frac{1}{Z_0} [Z_{M-1} \ Z_{M-2} \ \cdots \ Z_1] \begin{bmatrix} 1 \\ -F_1 \\ \vdots \\ -F_{M-2} \end{bmatrix} \quad (4.7d)$$

La expresión (4.7d) permite calcular el factor adimensional  $F_{M-1}$  a partir de los factores anteriores  $F_1, F_2, \dots, F_{M-2}$ , que a su vez dependen de los coeficientes  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{M-2}$ .

Para evaluar el comportamiento de estos factores, en la Figura 4.1 se han representado los veinte primeros  $\{F_1, \dots, F_{20}\}$ . Para calcularlos se ha considerado  $\Delta t=0.5$  y  $B_i=0.25$ .

Se observa que estos factores son positivos y que decrecen rápidamente hasta un valor próximo a cero:  $F_1= 0.5948$ ,  $F_2= 0.1480$ ,  $F_3= 0.0939$ ,  $F_4= 0.0596$ ,  $F_5= 0.0379$ ,  $F_{10}= 0.0039$ ,  $F_{15}= 4.0246 \cdot 10^{-4}$  y  $F_{20}= 4.1496 \cdot 10^{-5}$ .

Por tanto, si se considera una tolerancia  $\delta$  suficientemente pequeña, la Figura 4.1 sugiere que pueden despreciarse todos aquellos factores tales que  $F_k < \delta$ .

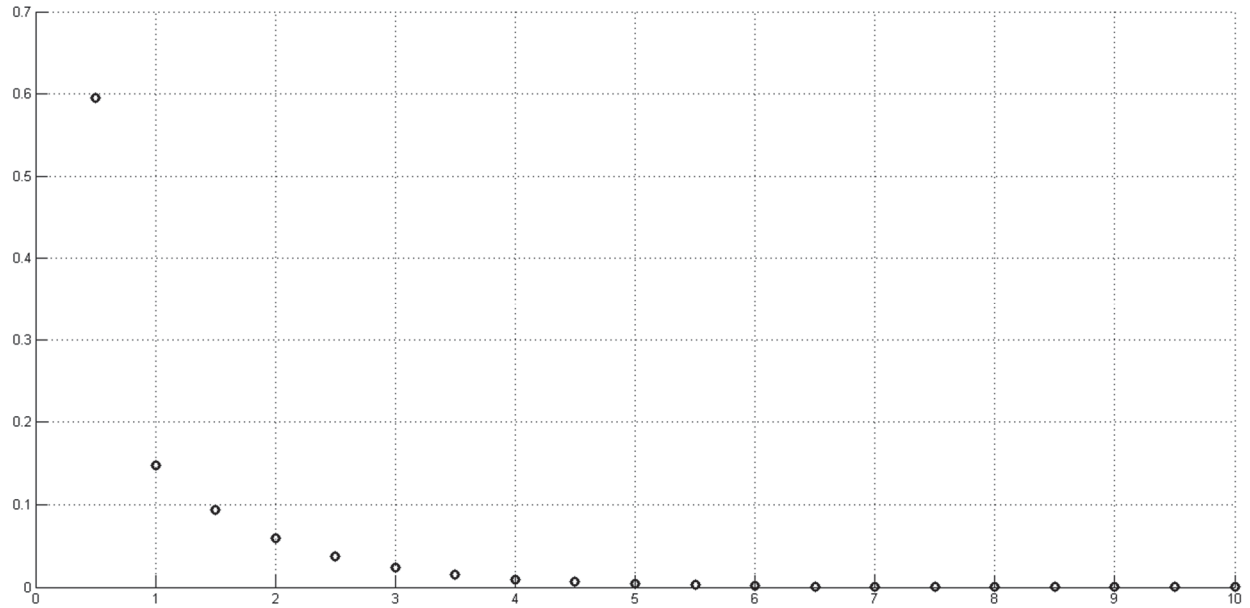


Figura 4.1. Evolución de los veinte primeros factores  $F$

Procediendo de esta manera, si  $F_n$  es el último factor superior a  $\delta$ , entonces para obtener  $\hat{q}_m$  se despreciarían todos aquellos factores tales que  $F_k < F_n$  :

$$\hat{q}_m = \left[ \underbrace{F_{m-1} \dots F_{n+1}}_{< \delta} F_n \dots F_1 \right] \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \vdots \\ \hat{q}_{m-n-1} \\ \hat{q}_{m-n} \\ \vdots \\ \hat{q}_{m-1} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.8)$$

De acuerdo con esto,  $\hat{q}_m$  puede aproximarse por:

$$\hat{q}_m \simeq [F_n \dots F_1] \begin{bmatrix} \hat{q}_{m-n} \\ \vdots \\ \hat{q}_{m-1} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.9)$$

Expresión que permite obtener una estimación aproximada de  $\hat{q}_m$  utilizando solo la historia a partir del instante  $t_{m-n}$  en lugar de usar la historia completa desde el instante  $t_1$ .

Si ahora se introduce la siguiente notación:

$$[\mathbf{F}_{red}] \equiv [F_n \ F_{n-1} \ \dots \ F_1] \quad (4.10a)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{red}^{past} \end{bmatrix} \equiv [\hat{q}_{m-n} \ \hat{q}_{m-n+1} \ \dots \ \hat{q}_{m-1}]^T \quad (4.10b)$$

Y se designa por  $\hat{q}_m^{red}$  a la estimación que se obtiene con la historia reducida, entonces:

$$\hat{q}_m^{red} \equiv [\mathbf{F}_{red}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_{red}^{past} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.10c)$$

Examinando la expresión (4.8) se deduce que, para aquellos instantes de tiempo tales que  $m \leq n + 1$  se verifica:  $\hat{q}_m^{red} = \hat{q}_m$ . Es decir, las estimaciones obtenidas con la historia reducida (4.9) y con la historia completa (4.8) coinciden. Mientras que para instantes de tiempo posteriores tales que  $m \geq n + 2$  se tiene que:  $\hat{q}_m^{red} \neq \hat{q}_m$ .

Por tanto, las estimaciones  $\hat{q}_m^{red}$  obtenidas para instantes posteriores a  $n + 1$  presentan un sesgo respecto a las  $\hat{q}_m$  obtenidas con la historia completa. Sesgo que, como es lógico, interesará acotar desde un punto de vista práctico.

En adelante se denomina algoritmo completo al método que utiliza la historia completa y algoritmo reducido al que emplea la historia reducida.

De acuerdo con (4.8), si  $F_{n+1}$  es el primer factor que se desprecia, entonces el orden de error de  $\hat{q}_{n+2}^{red}$  es  $\delta$ .

En efecto:

$$\hat{q}_{n+2} = [F_{n+1} \ \dots \ F_2 \ F_1] \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \vdots \\ \hat{q}_{n+1} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.11)$$

$$\hat{q}_{n+2}^{red} = [F_n \dots F_2 F_1] \begin{bmatrix} \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 \\ \vdots \\ \hat{q}_{n+1} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.12)$$

Dado que el problema está formulado adimensionalmente se tiene que  $\hat{q}_k \approx 1$ , por lo que la diferencia entre ambas estimaciones viene dada por:

$$|\hat{q}_{n+2} - \hat{q}_{n+2}^{red}| \approx F_{n+1} \cdot \hat{q}_1 < \delta \cdot \hat{q}_1 \approx \delta \quad (4.13)$$

Análogamente se demuestra que el orden de error de  $\hat{q}_{n+3}^{red}$  es  $2\delta$ :

$$\hat{q}_{n+3} = [F_{n+2} F_{n+1} \dots F_2 F_1] \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \vdots \\ \hat{q}_{n+1} \\ \hat{q}_{n+2} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.14)$$

$$\hat{q}_{n+3}^{red} = [F_n \dots F_2 F_1] \begin{bmatrix} \hat{q}_3 \\ \hat{q}_4 \\ \vdots \\ \hat{q}_{n+2}^{red} \end{bmatrix} + \dot{Y}_m Z_0 \quad (4.15)$$

Por lo que la desviación entre ambas estimaciones viene dada por:

$$|\hat{q}_{n+3} - \hat{q}_{n+3}^{red}| \approx F_{n+2} \cdot \hat{q}_1 + F_{n+1} \cdot \hat{q}_2 < \delta \cdot (\hat{q}_2 + \hat{q}_1) \approx 2\delta \quad (4.16)$$

De las expresiones (4.13) y (4.16) se infiere que el orden de error aumenta linealmente con la estimación. De acuerdo con esto, si  $\hat{q}_M^{red}$  es la última estimación que se obtiene con el algoritmo reducido, entonces su orden de error respecto a la misma estimación obtenida con el algoritmo completo será  $\delta[M - (n + 1)]$ .

Puesto que en la mayoría de los problemas se cumple que  $M \gg n$ , el orden de error puede aproximarse por:

$$\delta[M - (n + 1)] \approx \delta M \quad (4.17)$$

Si ahora se nota por  $\eta$  al orden de error admisible para la última estimación, entonces:

$$\delta M \leq \eta \Rightarrow \delta = \frac{\eta}{M} \quad (4.18)$$

Expresión que, fijados el intervalo y el paso de tiempo, permite determinar la tolerancia  $\delta$  a partir de la cual pueden despreciarse los factores  $F_k$ .

Para evaluar el impacto de la formulación recursiva en la disminución de carga computacional, puede considerarse por ejemplo un proceso de veinticuatro horas de duración y un paso de tiempo adimensional  $\Delta t=0.5$  (para  $L=6.5$  mm y  $\alpha=4 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s equivale a  $\Delta t'=5.28$  s), lo que supone  $M=16.360$  pasos de tiempo.

Con los mismos datos que se usaron para representar la Figura 4.1 y acotando el error de la estimación  $\hat{q}_{16360}^{red}$  en  $\eta=10^{-4}$ , a partir de la expresión (4.18) se obtiene  $\delta=6.1125 \cdot 10^{-9}$ . Como  $F_{39}=7.3866 \cdot 10^{-9}$  y  $F_{40}=4.6892 \cdot 10^{-9}$ , esto implica que pueden despreciarse todos los factores  $F_k$  a partir de  $F_{40}$ .

Por tanto, las estimaciones  $\hat{q}_m^{red}$  a partir de la  $\hat{q}_{41}^{red}$  se obtienen considerando solamente las 39 estimaciones anteriores, lo que equivale a considerar solamente unos 3.4 minutos de historia.

De acuerdo con (4.7d), los factores  $F$  solo dependen de los coeficientes  $Z$ , los cuales a su vez dependen del paso de tiempo  $\Delta t$  y del número de Biot. Por tanto, para un  $\Delta t$  fijo, el número de factores  $F$  a tener en cuenta dependerá de  $B_i$ .

En la Figura 4.2 se representan los diez primeros factores  $F$  para  $\Delta t=0.5$  y números de Biot 0.1 y 0.5. Los factores correspondientes a  $B_i=0.5$  se dibujan con una cruz y los de  $B_i=0.1$  con un círculo.

Se observa que los factores  $F$  decaen más rápidamente para  $B_i=0.5$  que para  $B_i=0.1$ , lo que implica considerar un menor número de factores, o equivalentemente una historia más reducida en el caso del  $B_i$  superior. Este resultado es consistente con cómo se comporta un sólido en conducción en función del número de Biot.

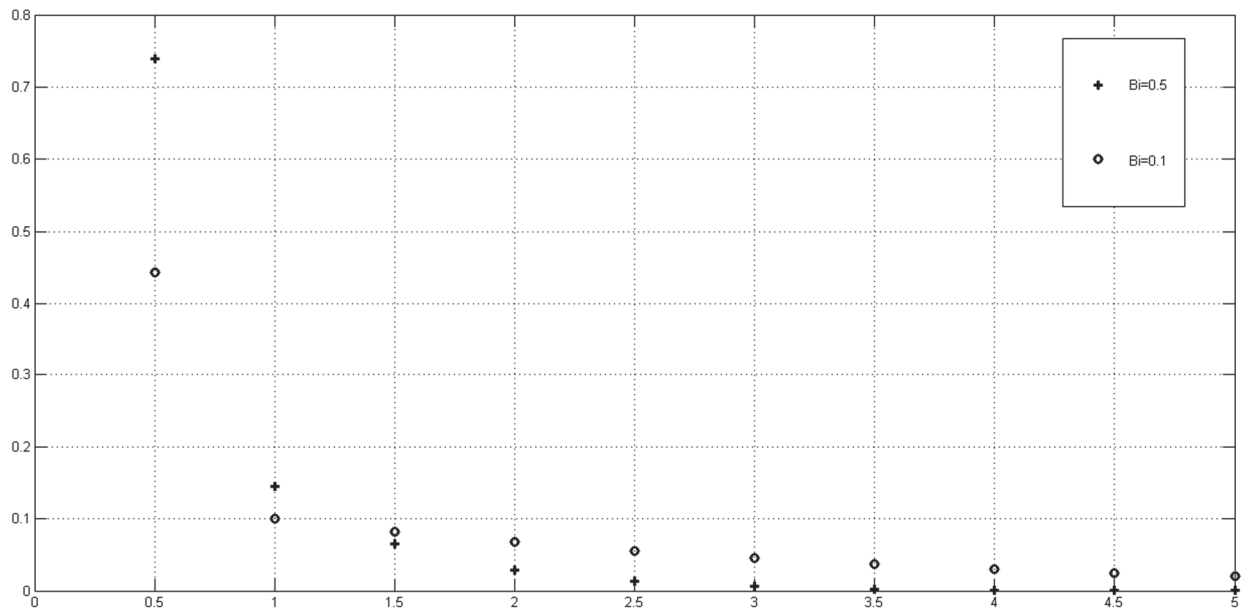


Figura 4.2. Diez primeros factores  $F$  para valores de  $B_i=0.1$  y  $0.5$

### 4.3 Validación del algoritmo reducido

Para validar el algoritmo reducido se procede como en el Capítulo 3, esto es, se somete a una entrada conocida y se evalúan los estimadores  $D$ ,  $\sigma_q$  y  $S$  para diferentes pasos de tiempo y niveles de ruido. El valor óptimo del parámetro de regularización  $r$  se determina localizando el valor mínimo del estimador  $S$ .

Como en el Capítulo 3, se considera una entrada escalón unitario de flujo seguido de una perturbación triangular simétrica de amplitud 15%. Para todo el proceso se considera una duración total  $t_f=1200$ .

Se considera un  $B_i=0.25$  y dos niveles de ruido correspondientes al 1 y 3% del valor máximo de temperatura adimensional (5.75) para un nivel de confianza del 99% ( $\pm 2.576\sigma$ ). El error en la última estimación se acota a  $\eta = 10^{-3}$ .

En la tabla 4.1 se exponen los resultados obtenidos. Adicionalmente se han incluido los valores de  $M$  (número de estimaciones),  $\delta$  (expresión 4.18) y  $n$  (dimensión de  $F$ ). Como en el Capítulo 3, los estimadores de error se calculan únicamente con las estimaciones correspondientes a la perturbación.

	$\Delta t$	$r$	$M$	$\delta$	$n$	$D$	$\sigma_q$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	10	3	120	8,33E-06	1	0,0162	0,0168	0,0309	figura 4.3
	5	6	240	4,17E-06	1	0,0091	0,0100	0,0110	
	2,5	8	480	2,08E-06	2	0,0051	0,0074	0,0098	
	1	17	1200	8,33E-07	8	0,0043	0,0052	0,0067	figura 4.5
$\sigma=0.067$	10	5	120	8,33E-06	1	0,0194	0,0471	0,0621	figura 4.4
	5	12	240	4,17E-06	1	0,0172	0,0255	0,0248	
	2,5	16	480	2,08E-06	2	0,0095	0,0156	0,0208	
	1	28	1200	8,33E-07	8	0,0062	0,0127	0,0141	figura 4.6

Tabla 4.1. Estimadores de error con el Método SOLS reducido

Se obtienen resultados similares a los que se obtuvieron en la tabla 3.3. Como era de esperar, en los casos en los que el valor de  $r$  coincide, se obtiene el mismo valor del estimador de amplificación de errores  $\sigma_q$ .

En la figura 4.3 se representa la estimación desde el instante inicial para el caso  $\Delta t=10$ ,  $r=3$  y nivel bajo de ruido.

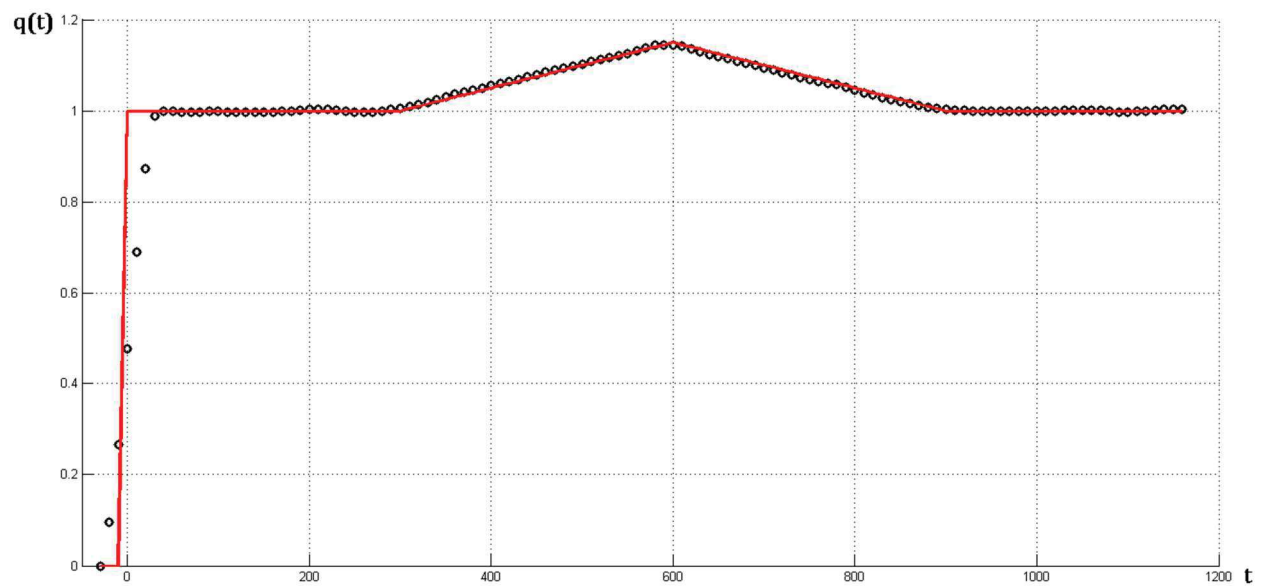


Figura 4.3. Estimación completa con  $\sigma=0.022$ ,  $\Delta t=10$  y  $r=3$

En la figura 4.4 se representa la estimación correspondiente a la perturbación para  $\Delta t=10$ ,  $r=5$  y nivel alto de ruido.

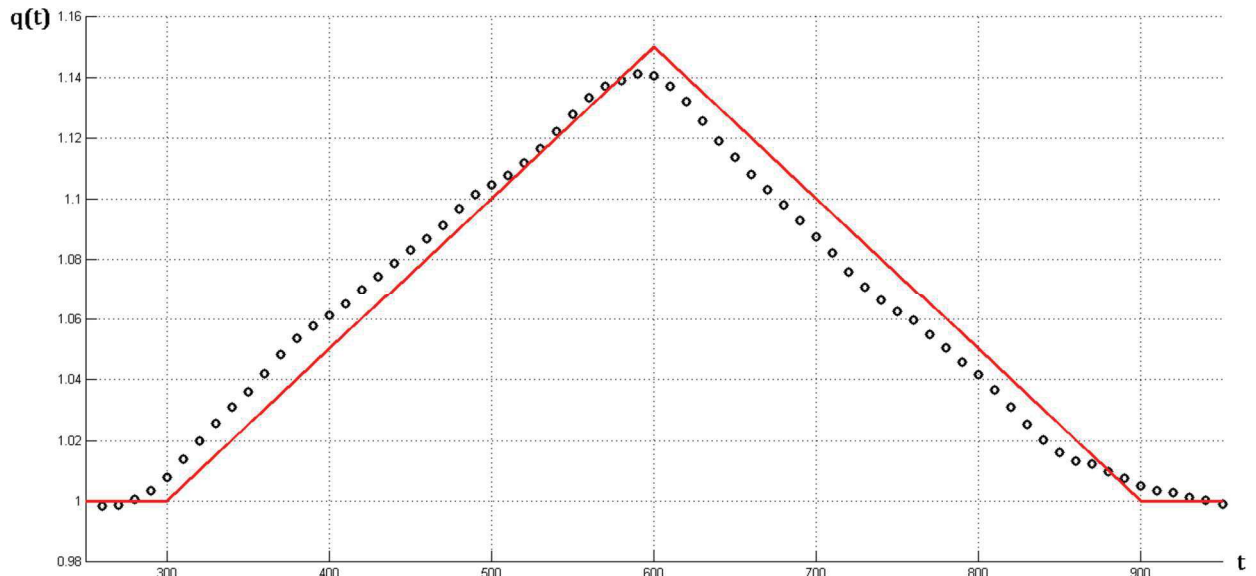


Figura 4.4. Estimación de la perturbación con  $\sigma=0.067$ ,  $\Delta t=10$  y  $r=5$

En la figura 4.5 se representa la estimación completa para  $\Delta t=1$ ,  $r=17$  y nivel bajo de ruido.

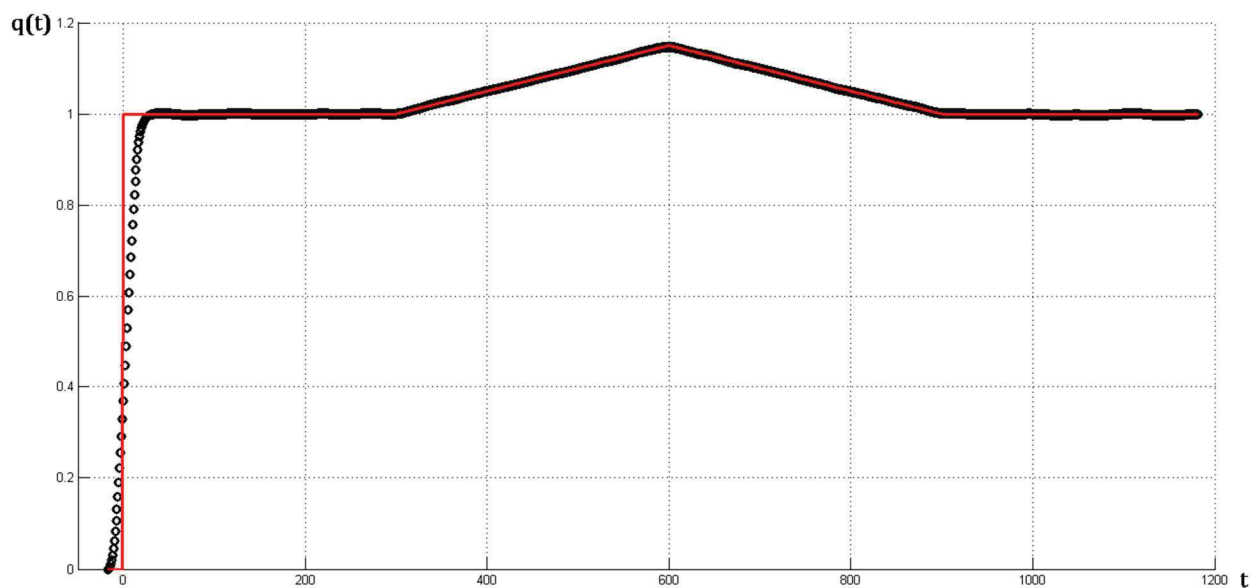


Figura 4.5. Estimación completa con  $\sigma=0.022$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=17$

En la figura 4.6 se representa la estimación de la perturbación para  $\Delta t=1$ ,  $r=28$  y nivel alto de ruido.

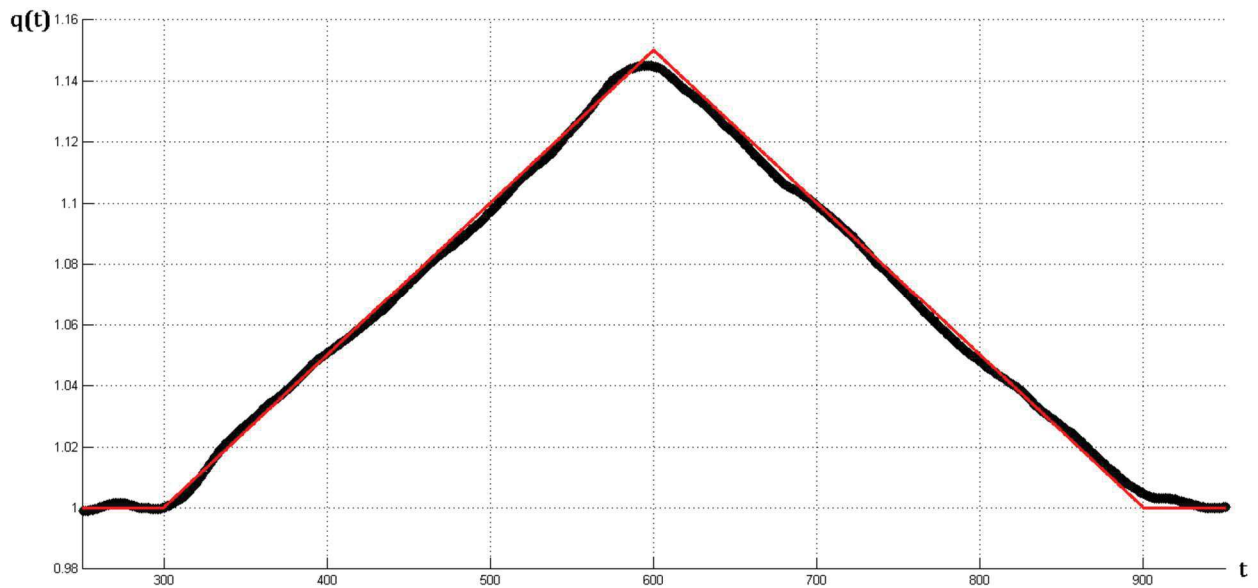


Figura 4.6. Estimación de la perturbación con  $\sigma=0.067$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=28$

Para apreciar gráficamente el impacto del parámetro de regularización, en la figura 4.7 se representa la misma estimación que la de la figura 4.6, pero utilizando como parámetro de regularización un valor  $r=4$  (siete veces inferior al óptimo).

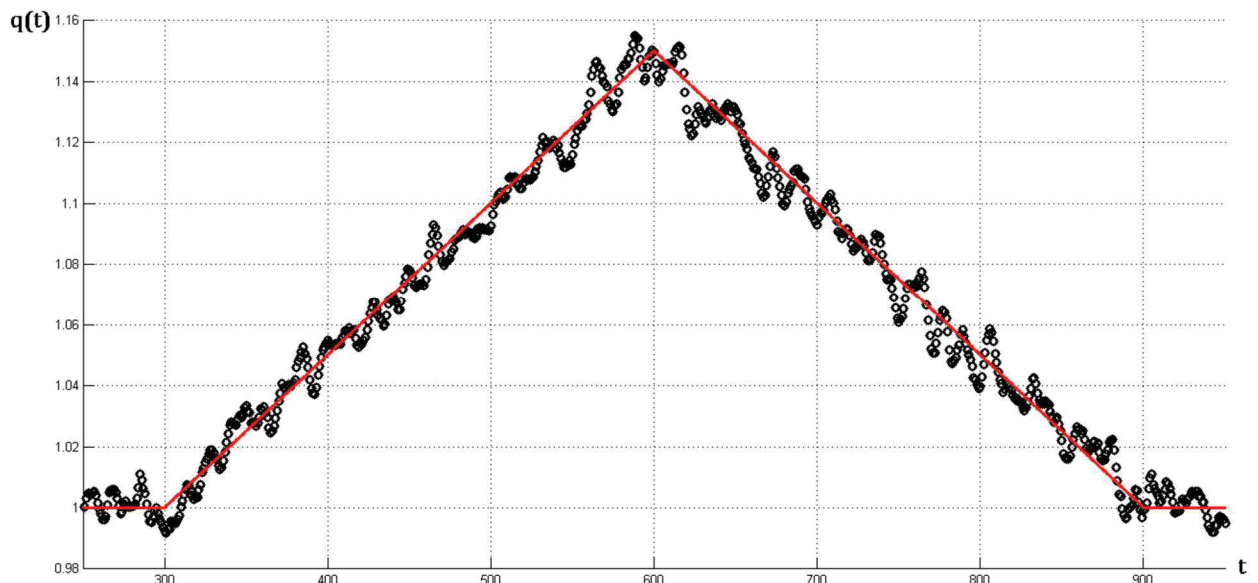


Figura 4.7. Estimación sin optimizar con  $\sigma=0.067$ ,  $\Delta t=1$  y  $r=4$

La formulación recursiva del Método SOLS supone una importante mejora desde el punto de vista de carga computacional, aunque como se ha visto, ello implica que exista un sesgo entre la estimación reducida y la estimación completa.

Para verificar que el sesgo evoluciona de manera lineal, se aplica la misma entrada a los algoritmos reducido y completo y se evalúa la desviación entre ambas estimaciones.

Las dos estimaciones se realizan con  $\Delta t=0.5$  y  $r=40$ . En el caso del algoritmo reducido, el orden de error en la última estimación se acota a  $\eta=10^{-3}$ . Para que no influyan los errores aleatorios se fuerza  $\sigma=0$  en ambas estimaciones.

Puesto que  $M=2400$ , a partir de (4.18) se deduce que  $\delta=4.17 \cdot 10^{-7}$ . Como  $F_{30}=4.41 \cdot 10^{-7}$  y  $F_{31}=2.80 \cdot 10^{-7}$ , el algoritmo reducido desprecia todos los factores desde el  $F_{31}$ .

La figura 4.8 representa la evolución del sesgo entre ambos algoritmos para la estimación completa ( $M=2400$ ). Se comprueba que el sesgo en la última estimación es inferior a  $\eta$ .

En la figura 4.9 se representa la evolución del sesgo en los 60 primeros pasos de tiempo. Se comprueba que el sesgo comienza a producirse a partir de la estimación 32.

La figura 4.10 representa la evolución del sesgo entre ambos algoritmos para el intervalo temporal correspondiente a la perturbación. Se observa que al final de la perturbación existe un sesgo de  $3 \cdot 10^{-4}$ .

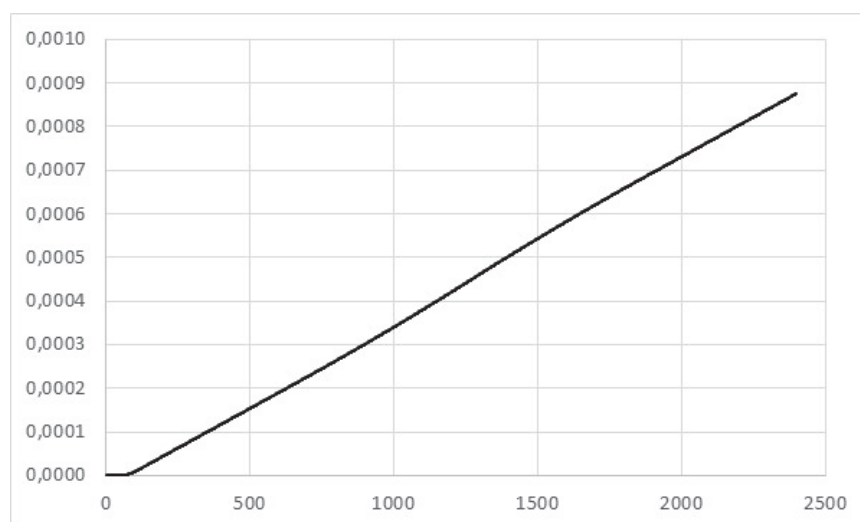


Figura 4.8. Sesgo entre algoritmo reducido y completo ( $M=2400$ )

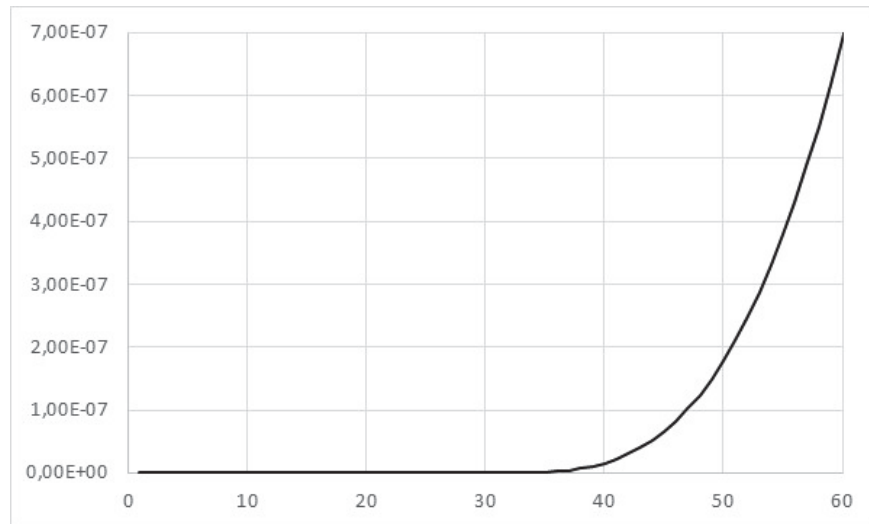


Figura 4.9. Sesgo entre algoritmo reducido y completo ( $m=60$ )

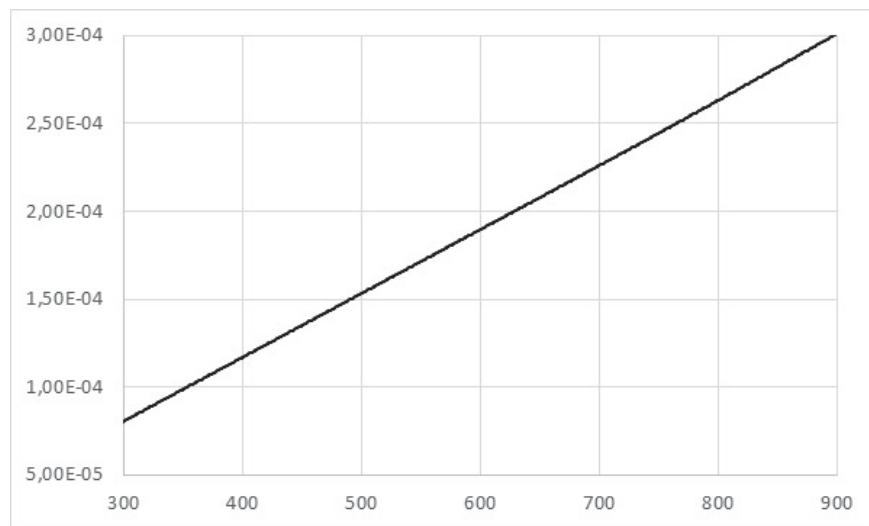


Figura 4.10. Sesgo entre algoritmo reducido y completo durante la perturbación



## Capítulo 5

### Formulación híbrida del Método SOLS

#### 5.1 Introducción

En el Capítulo 3 se compararon los métodos SOLS y FSM en cuanto a su capacidad para estimar el flujo de calor a partir de medidas simuladas de temperatura superficial. La comparativa se estableció sobre un problema de dominio completo en el que se consideraban diferentes pasos de tiempo y dos posibles niveles de ruido.

Puesto que se conocía a priori la forma exacta de la excitación de flujo de calor que se pretendía estimar, el valor óptimo del parámetro de regularización  $r$  se identificó en cada caso por un procedimiento de prueba y error, como aquel que minimizaba el estimador de error total  $S$ .

Sin embargo, en una aplicación real no se puede aplicar este procedimiento, ya que al desconocerse la excitación no es posible calcular el estimador  $S$ . En estos casos, el criterio para poder localizar el valor óptimo del parámetro de regularización  $r$  debe basarse en datos experimentales.

Adicionalmente, en aquellos casos en los que la aplicación se plantea como un problema secuencial, dado que las perturbaciones del flujo de calor pueden ser arbitrarias (tanto en magnitud como en frecuencia), lo óptimo es que el parámetro  $r$  no sea constante, sino que este se vaya actualizando en cada paso de tiempo.

De acuerdo con la bibliografía [8,9], en las aplicaciones prácticas reales, tanto de dominio completo como secuenciales, lo más adecuado es utilizar el denominado Principio Residual para localizar el valor óptimo del parámetro  $r$ . Este principio es estrictamente aplicable siempre que los errores de medida satisfagan las hipótesis estadísticas enunciadas en el apartado 2.3.1.

## 5.2 El Principio Residual

Supóngase un problema de dominio completo en el que han estimado todas las componentes del flujo de calor  $\{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_M\}$  a partir de un determinado valor  $r_0$  del parámetro de regularización.

Utilizando las componentes estimadas del flujo se puede resolver el problema directo y obtenerse las componentes calculadas de temperatura superficial  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_M\}$ . Como es obvio, estas temperaturas dependen implícitamente del parámetro  $r_0$  utilizado.

Se define el residuo  $R$  como:

$$R(r_0) \equiv \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (Y_i - \hat{T}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.1)$$

De acuerdo con esta definición, el residuo representa el error cuadrático medio entre las medidas reales de temperatura superficial  $\{Y_1, \dots, Y_M\}$  y sus respectivas componentes calculadas  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_M\}$ . En la expresión (5.1) se destaca la dependencia implícita de  $R$  con el parámetro de regularización.

El Principio Residual establece que el valor óptimo del parámetro  $r$  es aquel para el cual el residuo  $R$  toma el valor más próximo posible y superior a la desviación estándar  $\sigma$  de las medidas [8].

De forma abreviada,  $r_{resid}$  cumple el Principio Residual si verifica:

$$R(r_{resid}) \geq \sigma \quad y \quad R(r_j) > R(r_{resid}) \quad \forall j \text{ tal que } R(r_j) > \sigma \quad (5.2)$$

El procedimiento para aplicar el Principio Residual a un problema de dominio completo es el siguiente:

1. Con un valor inicial  $r_0$  de parámetro de regularización se estiman las  $\{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_M\}$  y se calculan las  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_M\}$ .
2. A continuación, se calcula el residuo  $R(r_0)$  a partir de (5.1).
3. Posteriormente, mediante un procedimiento de prueba y error, se tantean diferentes valores de  $r$  hasta que se localiza el valor  $r_{resid}$  que verifica (5.2).

En la figura 5.1 se representa esquemáticamente el algoritmo.

### 5.3 Formulación recursiva del residuo

Para poder aplicar el Principio Residual a un problema secuencial, se necesita expresar (5.1) en forma recursiva.

De esta manera, en cada paso de tiempo  $t_m$  se calcula un residuo acumulado  $R_m$  que, en conjunción con el Principio Residual, permite determinar el valor óptimo del parámetro de regularización.

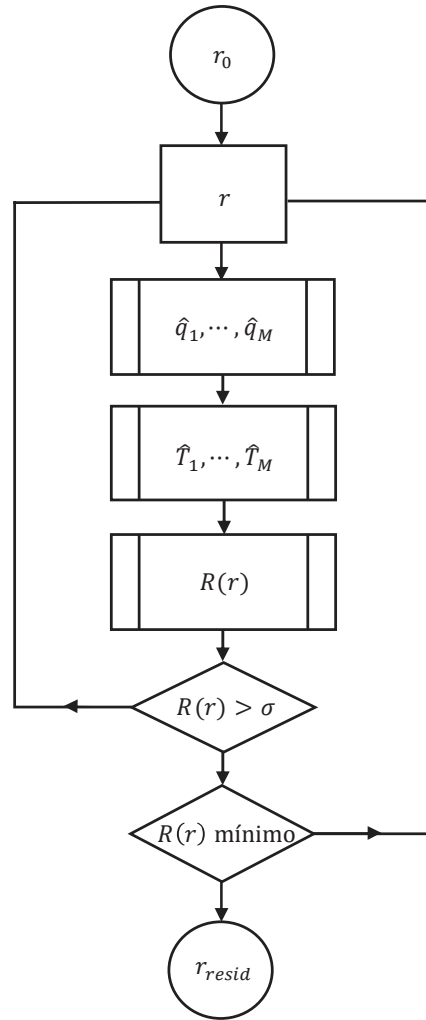


Figura 5.1. Algoritmo del Principio Residual para un problema de dominio completo

Si  $\hat{q}_m$  es la última componente del flujo que ha sido estimada, entonces el residuo acumulado  $R_m$  en el paso de tiempo  $t_m$  viene dado por:

$$R_m = \left[ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{T}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

Análogamente, para el paso de tiempo  $t_{m-1}$ :

$$R_{m-1} = \left[ \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (Y_i - \hat{T}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

Por lo que se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m-1} (Y_i - \hat{T}_i)^2 = R_{m-1}^2 (m-1) \quad (5.5)$$

Sustituyendo ahora (5.5) en (5.3) se obtiene:

$$R_m = \left[ \frac{R_{m-1}^2 (m-1) + \rho_m^2}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

Donde:

$$\rho_m^2 = (Y_m - \hat{T}_m)^2 \quad (5.7)$$

En la expresión (5.6) el residuo está formulado recursivamente, de manera que el residuo acumulado  $R_m$  en el paso de tiempo  $t_m$  se obtiene a partir del residuo  $R_{m-1}$  obtenido en el paso de tiempo anterior  $t_{m-1}$  y del término  $\rho_m^2$ . El término  $\rho_m^2$  representa la contribución asociada al paso de tiempo actual  $t_m$ .

## 5.4 Determinación de la temperatura superficial calculada

Como reflejan (5.6) y (5.7), para poder calcular el residuo  $R_m$  en el paso de tiempo  $m$  se necesita conocer tanto las medidas de temperatura superficial  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  como los valores de temperatura superficial calculada  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$ .

En el Método FSM, los valores de temperatura calculada  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  se obtienen mediante la formulación basada en el flujo del teorema de Duhamel:

$$\hat{T}_m = T_0 + \sum_{n=1}^m \hat{q}_n \Delta \Phi_{m-n} \quad (5.8)$$

Siendo  $T_0$  la temperatura inicial (nula en la formulación adimensional) y  $\Delta\Phi$  los coeficientes de sensibilidad. Estos coeficientes representan la respuesta en temperatura en la ubicación del sensor a un pulso unitario de flujo en la superficie.

Cuando  $B_i > 0$ , los coeficientes  $\Delta\Phi$  tienden a cero, por lo que al igual que ocurre en la formulación recursiva del Método SOLS, en el FSM tampoco es necesario utilizar la historia completa del flujo.

De esta manera, si se considera una tolerancia  $\delta$  suficientemente pequeña, pueden desprejarse todos aquellos coeficientes  $\Delta\Phi$  tales que  $\Delta\Phi_j < \delta$ , lo que implica que las componentes del flujo suficientemente alejadas en el tiempo no afectan en el cálculo de  $\hat{T}_m$ .

Como se vio en el Capítulo 3, en el caso del Método SOLS se partía de la formulación basada en temperatura del teorema de Duhamel. Expresión a la que posteriormente era aplicada la ley de Fourier:

$$T(x, t) = T_0 + \int_{\lambda=t_0}^{\lambda=t} u(x, t - \lambda) \frac{dY(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + \sum_{i=0}^{M-1} u(x, t - \lambda_i) \Delta Y_i \quad (3.3)$$

Por tanto, de acuerdo con (3.3), las componentes de temperatura  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  calculadas con el Método SOLS vienen dadas por:

$$\hat{T}_m = T_0 + \sum_{i=1}^m \dot{Y}_i \int_{\lambda=t_{i-1}}^{\lambda=t_i} u(0, t - \lambda) d\lambda \quad (5.9)$$

Expresión en la que el integrando  $u(0, t - \lambda)$  es igual a la unidad por ser la respuesta en temperatura en  $x=0$  a un escalón unitario de temperatura superficial. Considerando esto, (5.9) puede ponerse:

$$\hat{T}_m = T_0 + \sum_{i=1}^{i=m} \dot{Y}_i \cdot \Delta t \quad (5.10)$$

Si se comparan las expresiones (5.8) y (5.10), se observa que el papel que juega el parámetro de regularización  $r$  en cada una es diferente.

En la expresión (5.8),  $\hat{T}_m$  depende explícitamente de las componentes del flujo. En este caso, la información sobre el parámetro  $r$  se incorpora al residuo a través de las  $\{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m\}$ .

En el caso de la expresión (5.10),  $\hat{T}_m$  depende explícitamente de las componentes de la derivada de la temperatura superficial, por lo que la información sobre  $r$  es incorporada al residuo mediante las  $\{\dot{Y}_1, \dots, \dot{Y}_m\}$ .

Veamos ahora la sensibilidad de  $R_m$  respecto al parámetro  $r$  en función del método utilizado para calcular las  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$ . De acuerdo con (5.3), se tiene:

$$\frac{\partial R_m}{\partial r} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{T}_i) \frac{\partial \hat{T}_i}{\partial r} \quad (5.11)$$

Por lo que la sensibilidad respecto a los dos últimos valores del parámetro  $r$ :

$$\frac{\partial R_m}{\partial r_m} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{T}_i) \frac{\partial \hat{T}_i}{\partial r_m} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_m - \hat{T}_m) \frac{\partial \hat{T}_m}{\partial r_m} \quad (5.12a)$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial r_{m-1}} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m (Y_i - \hat{T}_i) \frac{\partial \hat{T}_i}{\partial r_{m-1}} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_{m-1} - \hat{T}_{m-1}) \frac{\partial \hat{T}_{m-1}}{\partial r_{m-1}} \quad (5.12b)$$

Para el caso de que las  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  se calculen con el Método FSM (5.8), la sensibilidad de  $R_m$  respecto a los dos últimos valores de  $r$  viene dada por:

$$\frac{\partial R_m}{\partial r_m} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_m - \hat{T}_m) \frac{\partial \hat{q}_m}{\partial r_m} \Delta\Phi_0 \quad (5.13b)$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial r_{m-1}} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_{m-1} - \hat{T}_{m-1}) \frac{\partial \hat{q}_{m-1}}{\partial r_{m-1}} \Delta\Phi_1 \quad (5.13c)$$

Al ser  $\Delta\Phi_0 \neq \Delta\Phi_1$ , la sensibilidad de  $R_m$  respecto a  $r_m$  y  $r_{m-1}$  es diferente.

Para el caso de que las  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  se calculen con el Método SOLS (5.10) se obtiene:

$$\frac{\partial R_m}{\partial r_m} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_m - \hat{T}_m) \frac{\partial \dot{Y}_m}{\partial r_m} \Delta t \quad (5.14a)$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial r_{m-1}} = -\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} (Y_{m-1} - \hat{T}_{m-1}) \frac{\partial \dot{Y}_{m-1}}{\partial r_{m-1}} \Delta t \quad (5.14b)$$

En este caso, la sensibilidad de  $R_m$  respecto a  $r_m$  y  $r_{m-1}$  es la misma.

De acuerdo con las expresiones (5.13a-b) correspondientes al Método FSM, el residuo  $R_m$  depende del parámetro  $r$  a través de las componentes del flujo, es decir,  $R = R(\hat{\mathbf{q}}(r))$ . Mientras que en el caso de las expresiones (5.14a-b),  $R_m$  depende de  $r$  a través de las componentes de la derivada temporal de la temperatura, es decir,  $R = R(\dot{\mathbf{Y}}(r))$ .

En el Método SOLS, la función del parámetro  $r$  consiste en suavizar los cambios de la derivada temporal de la temperatura, pero como indica (5.10), sus temperaturas calculadas  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  no dependen de las componentes del flujo previamente estimadas.

Por tanto, como lo que se pretende es obtener un valor del parámetro de regularización a partir del cual poder estimar las componentes del flujo, se concluye que el residuo obtenido mediante las temperaturas calculadas con el Método SOLS no es válido para ser usado en conjunción con el Principio Residual.

## 5.5 Método SOLS Híbrido

Como se vio en el Capítulo 3, en el caso del problema inverso “límite” que se aborda en esta tesis, la estimación del flujo de calor que proporciona el Método SOLS es más exacta que la que se obtiene con el FSM. Este es el motivo por el que el SOLS será el método que se utilice en el Capítulo 6 para tratar la aplicación práctica.

Sin embargo, en el apartado anterior se ha visto que las temperaturas  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  obtenidas con el Método SOLS no aportan suficiente información sobre el parámetro  $r$  como para poder guiar el Principio Residual.

Para superar este inconveniente, se ha diseñado un método híbrido que combina los métodos SOLS-recursivo y FSM. A este método diferente se le denomina Método SOLS Híbrido.

El SOLS es utilizado para estimar las componentes del flujo  $\{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m\}$  y el FSM para calcular las componentes de la temperatura superficial  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$ , a partir de las cuales se obtiene el residuo.

Ambos métodos tienen en común el que utilizan  $r$ -futuras medidas de temperaturas en cada paso de tiempo, por lo que el valor de  $r$  obtenido tras aplicar el Principio Residual puede ser usado directamente por el SOLS.

A continuación, se describen los pasos que comprende el algoritmo del Método SOLS Híbrido para un problema secuencial:

- 1) Inicialmente se acumulan un conjunto representativo de medidas de temperatura superficial  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ .

A partir de ensayos con problemas de dominio completo se ha comprobado que un criterio que proporciona buenos resultados es suponer  $m=2n$ , siendo  $n$  el número de factores  $F$  que se usan en la expresión (4.9), por lo que este será el criterio que se use en adelante. La idea es seleccionar un número de pasos de tiempo  $m$  suficientemente representativo del proceso real.

Con este conjunto de medidas  $\{Y_1, \dots, Y_m\}$  se plantea un problema de dominio completo en el que las componentes de flujo  $\{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_m\}$  se estiman con el Método SOLS.

El valor del parámetro  $r$  utilizado en esta primera estimación no es relevante, ya que es optimizado posteriormente en el paso 3º.

2) A continuación, se determinan las temperaturas calculadas  $\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_m\}$  con la expresión (5.8) y se calcula el residuo  $R_m$  mediante (5.1).

3) En este tercer paso se aplica el Principio Residual al residuo  $R_m$ .

Al tratarse de un problema de dominio completo se emplea el algoritmo de prueba y error descrito en la Figura 5.1. Como resultado se obtiene un valor central  $r_0$  del parámetro de regularización.

A este residuo inicial  $R_m$  ( $m=2n$ ) obtenido con un valor central  $r_0$  del parámetro de regularización y que verifica el Principio Residual (dominio completo), se le denomina  $R_0$ .

4) A partir del paso de tiempo  $m+1$  se plantea un problema secuencial.

En el paso  $m+1$  se estima  $\hat{q}_{m+1}$  con el Método SOLS usando un valor  $r_0$  del parámetro de regularización.

5) A continuación, se calcula  $\hat{T}_{m+1}$  con la expresión (5.8) y se obtiene el residuo  $R_{m+1}$  a partir de las expresiones (5.6) y (5.7). La ventaja de expresar el residuo en forma recursiva radica en que en cada paso de tiempo solo se necesita calcular  $\rho_m$ .

6) En este paso se aplica el Principio Residual al residuo acumulado  $R_{m+1}$ .

Se ha verificado qué, si no se impone una restricción, los valores del parámetro de regularización pueden oscilar considerablemente. Por ello, se han limitado estas fluctuaciones mediante dos criterios que se ha comprobado que dan buenos resultados.

Estos criterios son:

- i) Los posibles valores de  $r$  se restringen al intervalo cerrado  $[r_0 - 2, r_0 + 2]$ .
- ii) En cada paso de tiempo, la magnitud del cambio de  $r$  solo puede ser  $\{-1, 0, 1\}$ .

De acuerdo con estos criterios, el procedimiento para determinar el valor óptimo del parámetro de regularización en cada paso de tiempo mediante el Principio Residual es el siguiente:

6.1 Si  $R_{m+1} > \sigma$  y  $R_{m+1} > R_m$  entonces;  $r_{m+1} = r_m - 1$ .

6.2 Si  $R_{m+1} > \sigma$  y  $R_{m+1} < R_m$  entonces;  $r_{m+1} = r_m$ .

Cuando se da esta situación, quiere decir que la condición del Principio Residual se satisface de una manera más fuerte en el paso de tiempo  $m+1$  que en el  $m$ .

6.3 Si  $R_{m+1} < \sigma$  entonces;  $r_{m+1} = r_m + 1$ .

- 7) Para pasos de tiempo  $m+2$  y posteriores se retorna al paso 4 y se ejecuta nuevamente la secuencia  $\{4, 5, 6\}$ .

En la Figura 5.2 se representa esquemáticamente los pasos 4º, 5º y 6º del algoritmo.

## 5.6 Validación numérica del Método Híbrido

El Método SOLS Híbrido ha sido concebido para que el Método SOLS (en su formulación recursiva) pueda ser aplicado junto con el Principio Residual en las aplicaciones prácticas secuenciales.

Para validar numéricamente este método se procede como en capítulos anteriores, esto es, se aplica el algoritmo a una entrada conocida durante un intervalo temporal acotado y se calculan los estimadores de error.

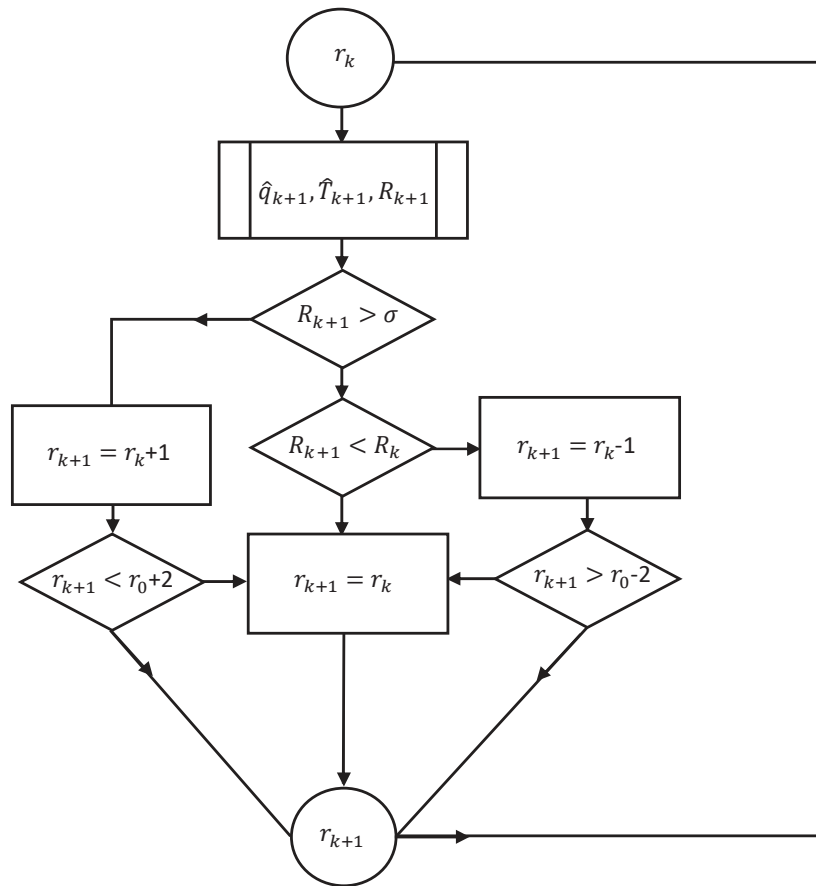


Figura 5.2. Algoritmo del Principio Residual para un problema secuencial

El Método SOLS Híbrido, al estar basado en el Principio Residual ( $\sigma \neq 0$ ), hace que no tenga sentido estimar las  $\hat{q}_i|_{\sigma=0}$ , motivo por el que solo tendrá sentido calcular el estimador de error total  $S$ .

En una aplicación práctica real, lo habitual será tomar las medidas de temperatura del sistema bajo estudio a partir de una situación estacionaria. Por esa razón y a diferencia de capítulos anteriores, la entrada a estimar no incluye el escalón inicial unitario de flujo.

De acuerdo con esto, como entrada se considera un flujo estacionario de magnitud unidad, seguido a continuación de una perturbación triangular simétrica de amplitud 15%. El proceso en su conjunto tiene una duración total de  $t=1200$ .

Se supone  $B_i=0.25$  y dos niveles de ruido correspondientes al 1 y 3% del valor máximo de temperatura adimensional (5.75) para un nivel de confianza del 99% ( $\pm 2.576\sigma$ ).

La validación numérica se hace con pasos de tiempo  $\Delta t$  (adimensionales) inferiores a los que se han utilizado en capítulos anteriores. El motivo de ello es que solo cuando los  $\Delta t$  son pequeños se obtienen valores de los residuos próximos a la sigma de las temperaturas.

Cuando los  $\Delta t$  son grandes ( $\Delta t \geq 0.5$ ), los residuos son mayores que  $\sigma$  incluso para el valor mínimo posible del parámetro de regularización ( $r_0=3$  según el criterio  $i$ ). En estos casos, el algoritmo del Método Híbrido carece de interés, ya que propone sistemáticamente como parámetro de regularización el menor valor posible:  $r_0-2$ .

Para evaluar cómo afecta el valor del parámetro  $\eta$  definido en (4.18) se han hecho dos validaciones numéricas. En la tabla 5.1 se exponen los resultados obtenidos con  $\eta=10^{-5}$  y en la tabla 5.2 con  $\eta=10^{-3}$ .

Manteniendo el criterio de los capítulos anteriores, el estimador de error total  $S$  se calcula únicamente con las estimaciones correspondientes a la perturbación triangular.

En la cuarta y quinta columna se han incluido los valores iniciales del residuo  $R_0$  y del valor central del parámetro de regularización  $r_0$ .

	$\Delta t$	$M$	$n$	$R_0$	$r_0$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	0,5	2400	40	0,0522	3	0,0428	
	0,4	3000	59	0,0300	3	0,0518	
	0,3	4000	96	0,0220	61	0,0041	figura 5.3
	0,2	6000	177	0,0220	148	0,0068	
	0,1	12000	440	0,0220	13	0,0177	
$\sigma=0.067$	0,5	2400	40	0,0672	3	0,0921	
	0,4	3000	59	0,0673	4	0,1193	
	0,3	4000	96	0,0672	97	0,0074	figura 5.5
	0,2	6000	177	0,0670	182	0,0101	figura 5.7
	0,1	12000	440	0,0670	13	0,0508	

Tabla 5.1. Estimadores de error con el Método Híbrido ( $\eta=10^{-5}$ )

	$\Delta t$	$M$	$n$	$R_0$	$r_0$	$S$	Notas
$\sigma=0.022$	0,5	2400	30	0,1680	3	0,0425	
	0,4	3000	44	0,0865	3	0,0520	
	0,3	4000	71	0,0428	3	0,0715	figura 5.4
	0,2	6000	129	0,0225	3	0,0294	
	0,1	12000	314	0,0220	13	0,0305	
$\sigma=0.067$	0,5	2400	30	0,1784	3	0,1274	
	0,4	3000	44	0,0933	3	0,1601	
	0,3	4000	71	0,0725	3	0,2131	figura 5.6
	0,2	6000	129	0,0670	113	0,0133	
	0,1	12000	314	0,0670	18	0,0602	figura 5.8

Tabla 5.2. Estimadores de error con el Método Híbrido ( $\eta=10^{-3}$ )

Como era de esperar, la estimación mejora al disminuir  $\eta$ . Con alto nivel de ruido, la mejora es más apreciable para los casos de baja resolución temporal, mientras que en los casos de bajo nivel de ruido ocurre lo contrario.

En las tablas anteriores, se observa que para pasos de tiempo grandes el residuo inicial  $R_0$  es mayor que  $\sigma$  incluso para el mínimo valor posible del valor central del parámetro de regularización  $r_0$ . En esos casos, el algoritmo recomienda sistemáticamente como parámetro de regularización  $r=1$ , es decir, una derivada temporal por diferencias centradas.

Si nos fijamos ahora en el caso  $\Delta t=0.3$  y  $\sigma=0.022$  de la tabla 5.1, se observa que es necesario hacer  $r_0=61$  para que se verifique el principio residual, es decir, que  $R_0 \geq \sigma$ . En estos casos, el Principio Residual opera con toda su potencia, optimizando el valor de  $r$  dentro del intervalo  $[r_0 - 2, r_0 + 2]$ .

En las figuras 5.3 y 5.4 se representan la mejor ( $S=0.0041$ ) y peor estimación ( $S=0.0715$ ) respectivamente para el caso de bajo nivel de ruido.

Comparando ambas figuras, se observa que en el caso de la figura 5.4 la fase de arranque del algoritmo es mucho más rápida. De hecho, a partir de la novena estimación es capaz de estimar con bastante exactitud la magnitud del flujo.

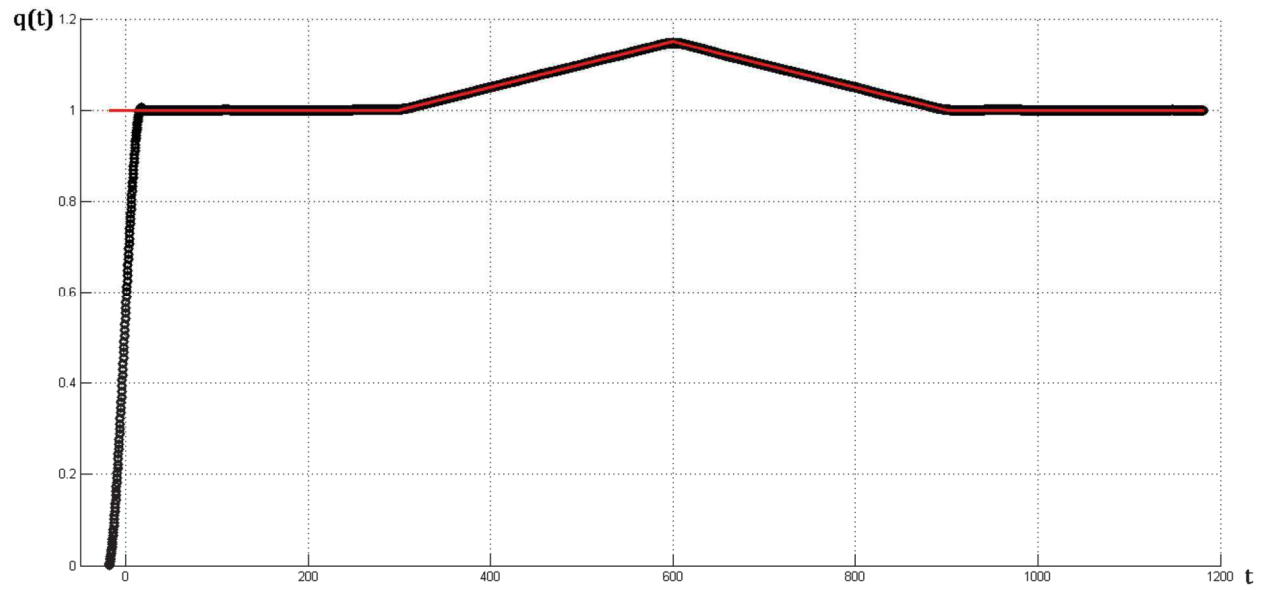


Figura 5.3. Estimación completa para  $\sigma=0.022$ ,  $\eta=10^{-5}$ ,  $\Delta t=0.3$  y  $r_0=61$

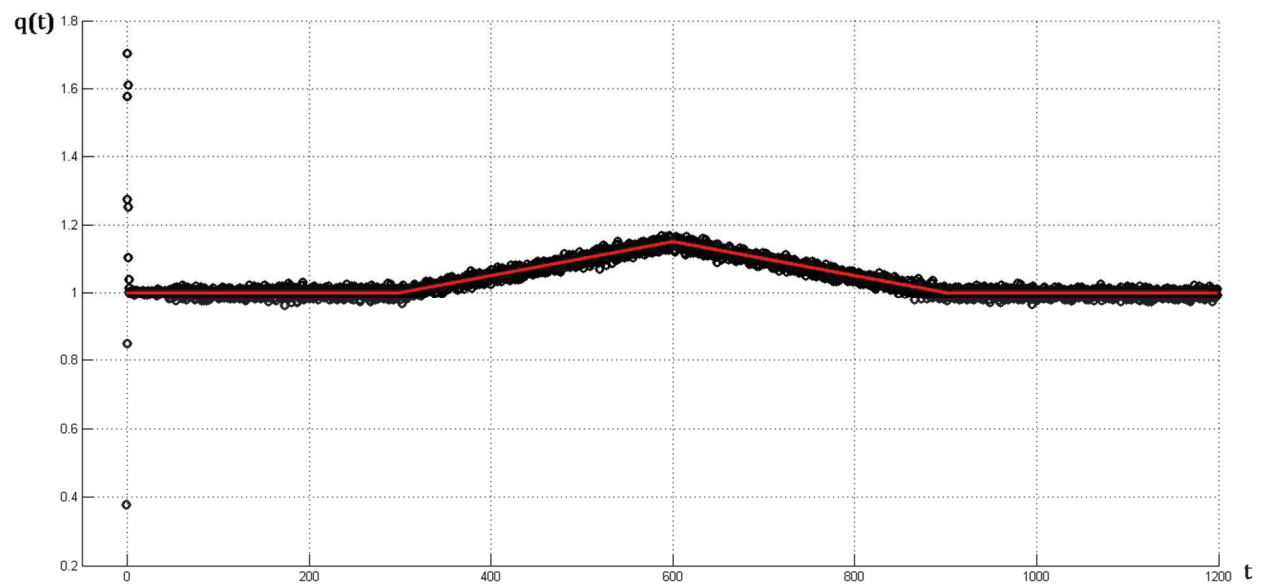


Figura 5.4. Estimación completa para  $\sigma=0.022$ ,  $\eta=10^{-3}$ ,  $\Delta t=0.3$  y  $r_0=3$

En las figuras 5.5 y 5.6 se representan la mejor ( $S=0.0074$ ) y peor estimación ( $S=0.2131$ ) respectivamente para el caso de alto nivel de ruido.

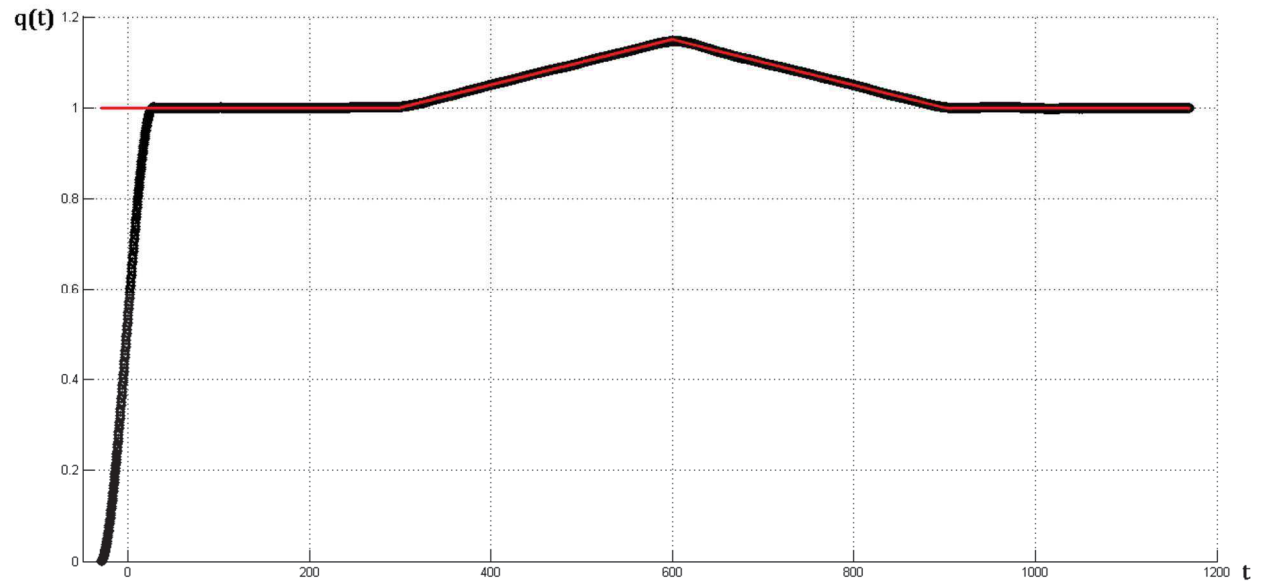


Figura 5.5. Estimación completa para  $\sigma=0.067$ ,  $\eta=10^{-5}$ ,  $\Delta t=0.3$  y  $r_0=97$

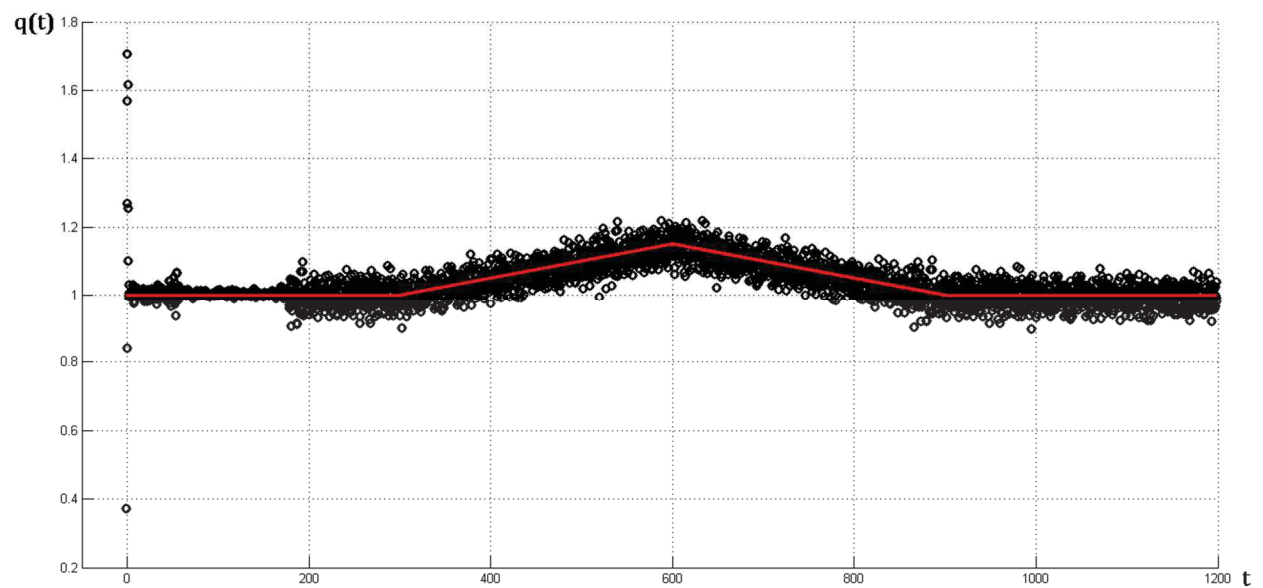


Figura 5.6. Estimación completa para  $\sigma=0.067$ ,  $\eta=10^{-3}$ ,  $\Delta t=0.3$  y  $r_0=3$

Para visualizar gráficamente cómo va evolucionando el parámetro de regularización a lo largo de la estimación, en la figura 5.7 se representan los valores de  $r$  para el caso  $\Delta t=0.2$  y  $r_0=182$ .

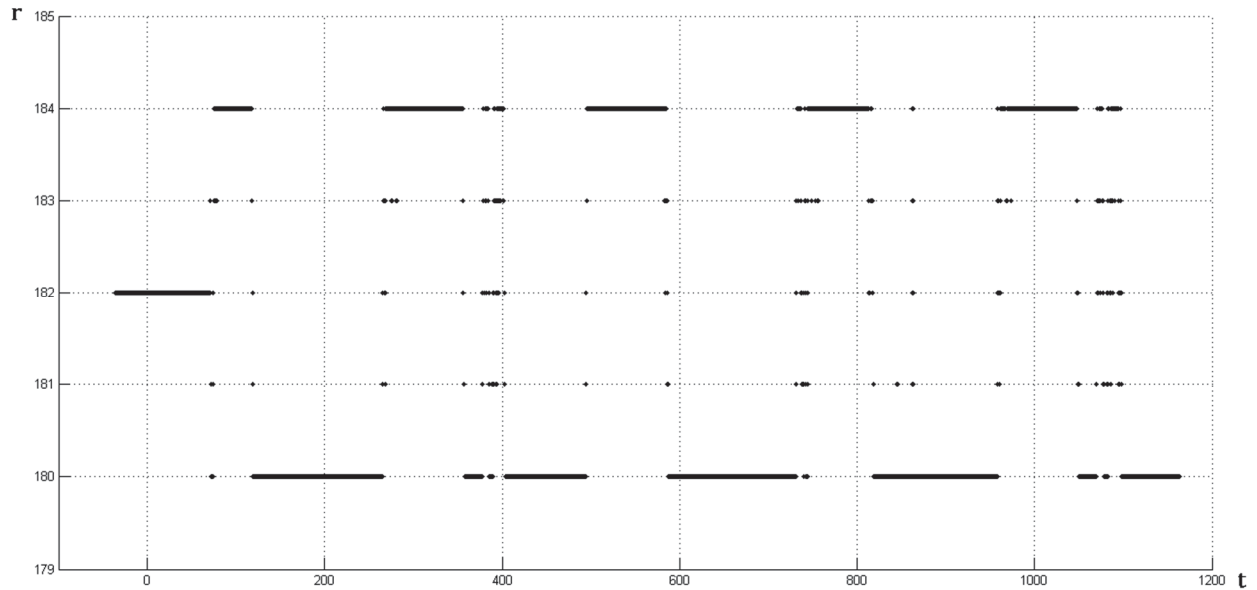


Figura 5.7. Evolución del parámetro  $r$  para  $\sigma=0.067$ ,  $\eta=10^{-5}$ ,  $\Delta t=0.2$  y  $r_0=182$

Tanto en la tabla 5.1 cómo en la 5.2, se observa que con un  $\Delta t=0.1$  se obtiene un valor central  $r_0$  del parámetro de regularización inferior al que se obtiene para  $\Delta t=0.2$  (a excepción de en el caso de bajo nivel de ruido de la tabla 5.2).

Esto es simplemente una consecuencia de cómo se ha definido el método, ya que de acuerdo con el paso 3º, el valor central del parámetro de regularización se determina aplicando el Principio Residual a un conjunto suficientemente representativo ( $m=2n$ ) de valores de temperatura superficial. Lógicamente, este conjunto es mayor a medida que disminuye el paso de tiempo.

Como ejemplo, en la figura 5.8 se ha representado la estimación para  $\Delta t=0.1$  asociada al último caso de la tabla 5.2. A pesar de que se obtiene un valor central de parámetro de regularización ( $r_0=18$ ) seis veces inferior al que se obtiene para el caso  $\Delta t=0.2$  ( $r_0=113$ ), se aprecia que la estimación es bastante aceptable.

Para esa misma estimación, en la figura 5.9 se ha representado la parte correspondiente a la perturbación.

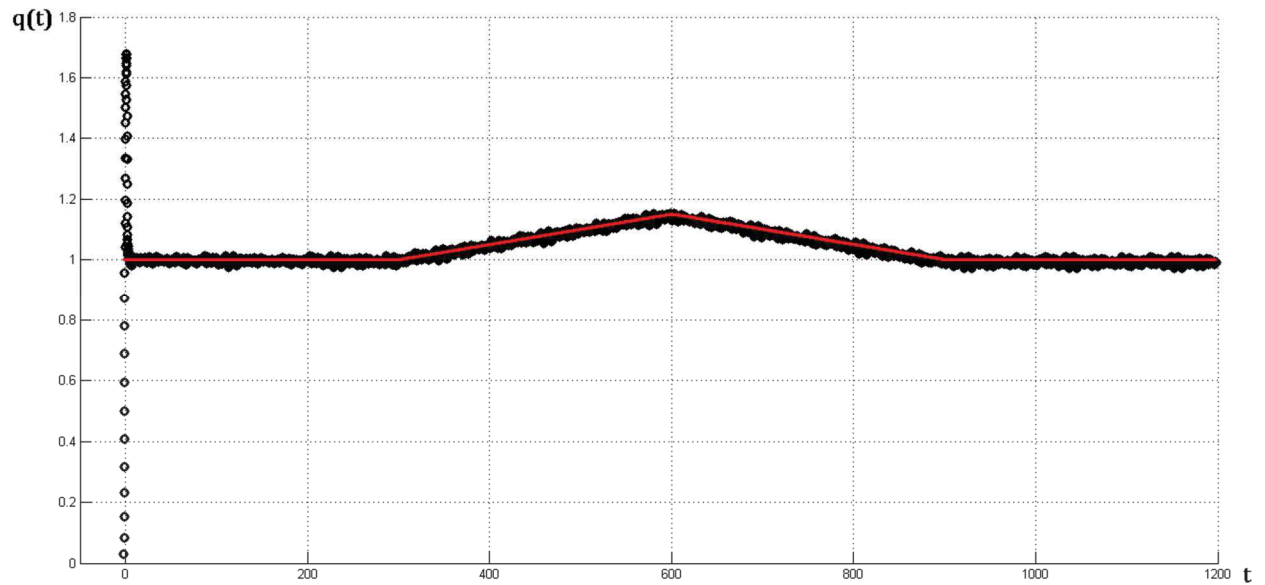


Figura 5.8. Estimación completa para  $\sigma=0.067$ ,  $\eta=10^{-3}$ ,  $\Delta t=0.1$  y  $r_0=18$

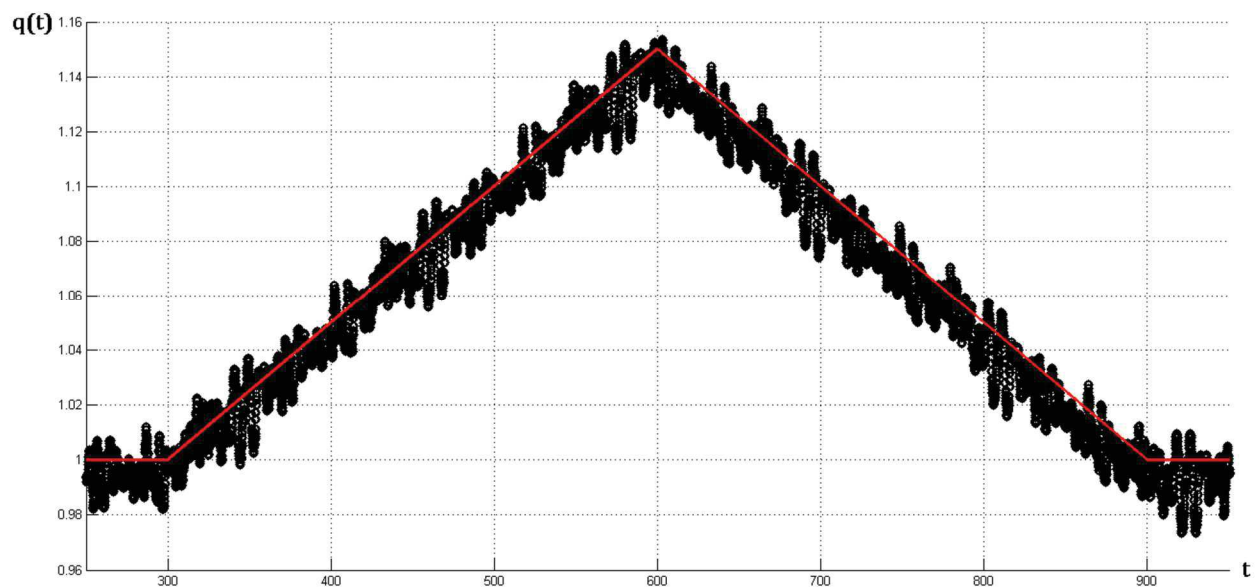


Figura 5.9. Estimación de la perturbación para  $\sigma=0.067$ ,  $\eta=10^{-3}$ ,  $\Delta t=0.1$  y  $r_0=18$

Dado que en nuestro caso disponemos de la entrada conocida (a diferencia de lo que ocurrirá en una aplicación práctica real), al igual que en capítulos anteriores se puede determinar el valor óptimo del valor central del parámetro de regularización  $r_0$  mediante un procedimiento de prueba y error (como aquel que minimiza  $S$ ). En la figura 5.10 se representa la estimación correspondiente a la perturbación que se obtiene de esta manera ( $r_0=188$ ).

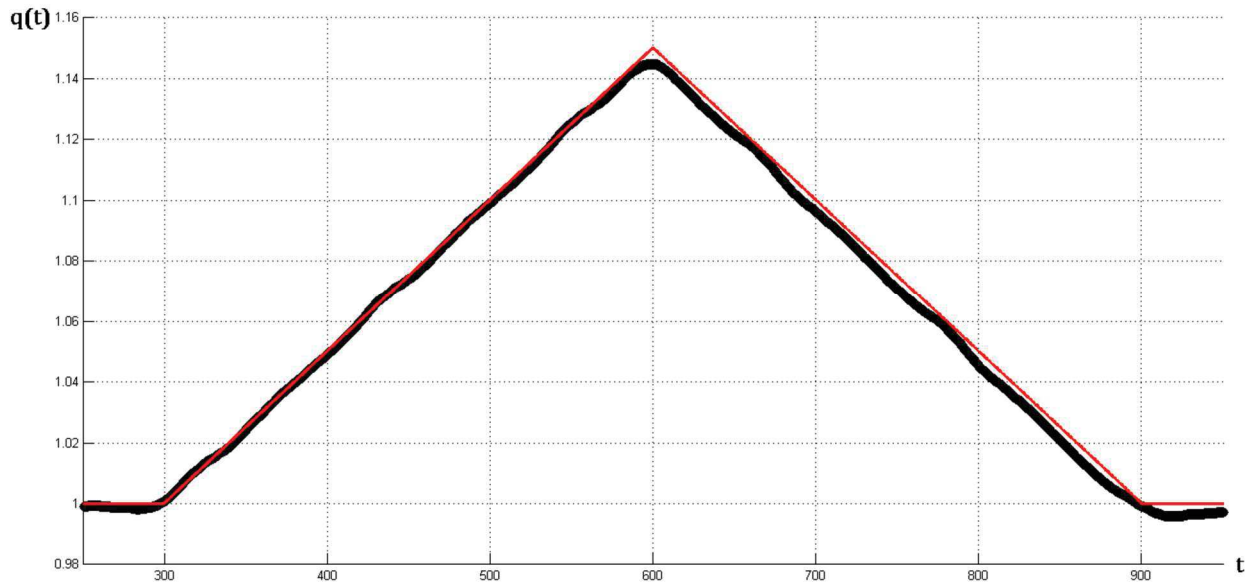


Figura 5.10. Estimación de la perturbación para  $\sigma=0.067$ ,  $\eta=10^{-3}$ ,  $\Delta t=0.1$  y  $r_0=188$

En el caso de la figura 5.9 se obtuvo un estimador de error total  $S=0.0602$ , mientras que para la figura 5.10 se obtiene  $S=0.0181$ . La diferencia principal entre ambas estimaciones radica en las continuas fluctuaciones que se producen alrededor del valor real en el caso de la estimación obtenida con  $r_0=18$ .

Sin embargo, a efectos de cuantificar la amplitud máxima de la perturbación, ambas estimaciones proporcionan una información muy similar. Esta robustez de la estimación respecto al parámetro  $r_0$  es importante, ya que como se verá en el Capítulo 6, la información de mayor interés para el caso de nuestra aplicación práctica es precisamente esa amplitud.



## Capítulo 6

### Aplicación práctica

#### 6.1 Introducción

En este capítulo se aplica el Método SOLS Híbrido desarrollado en los capítulos anteriores a un caso práctico real.

Como se citó en el Capítulo 1, la estimación del flujo de calor en los tubos de shock de un horno tubular tiene un interés práctico. Ello se debe a que, en determinadas circunstancias, estos tubos se pueden ver sometidos a un elevado flujo de calor, lo cual, si no se detecta y corrige a tiempo, causará indefectiblemente la coquización del fluido en estos tubos.

El Método se aplicará a un registro histórico de variables de operación de un horno real instalado en una unidad de destilación a vacío de una refinería de petróleo.

Como es lógico, este histórico se introduce de manera offline al software en el que se ha implementado el algoritmo, ya que para que pudiese ser ejecutado en modo online habría que implementarlo en los sistemas de información de la refinería. Obviamente, este matiz no afecta a la validez de los resultados obtenidos.

Como se explicó en el apartado 1.4, el método matemático desarrollado en esta tesis puede aplicarse sin ningún tipo de restricción a todos aquellos tubos del horno que tengan instalada localmente la instrumentación necesaria.

Adicionalmente, se necesita conocer el coeficiente de transferencia de calor  $h$  del fluido que circula por el interior del tubo en el punto donde se pretende estimar el flujo de calor. Por tanto, la exactitud de la estimación del flujo dependerá lógicamente de la exactitud con la que se calcule  $h$ .

Es conocido que las correlaciones existentes para calcular  $h$  son mucho más fiables cuando el fluido se encuentra en una única fase (líquido o gas) que cuando coexisten ambas fases. Esto se debe en parte a que, una vez que se inicia la vaporización del fluido, es imposible conocer con exactitud su grado de vaporización para un determinado punto del horno.

De acuerdo con esto, siempre será preferible aplicar el método a aquellos tubos del horno en los que se sabe a ciencia cierta que el fluido se encuentra en una sola fase (líquido o gas), que en aquellos en los que se sospecha que puede existir un cierto nivel de coexistencia.

En los tubos de shock de un horno de destilación a vacío se cumplen normalmente las dos condiciones anteriores, es decir, se dispone de la instrumentación requerida y además, debido a las condiciones de presión y temperatura, el fluido se encuentra en fase líquida.

Antes de poder aplicar el Método SOLS Híbrido a los datos históricos reales se necesita disponer previamente de una serie de información:

- Propiedades del fluido en las condiciones de presión y temperatura de los tubos de shock. Estas propiedades son necesarias para calcular  $h$ .
- Características geométricas de los tubos y propiedades del acero a la temperatura de operación. Estas variables intervienen en el cálculo del coeficiente de transferencia de calor  $h$ , en el número de Biot  $B_i$  y en la difusividad térmica  $\alpha$ .
- Estimar el ruido asociado a la medida de temperatura de skin, es decir, la desviación estándar de las medidas  $\sigma$  con la cual se aplica el Principio Residual.

Los siguientes apartados se dedican a obtener toda esta información. En el apartado 6.2 se estudia la correlación utilizada para calcular  $h$  y en el 6.3 las propiedades termofísicas del fluido necesarias para esta correlación.

En el apartado 6.4 se obtienen las propiedades de los tubos del horno. En el apartado 6.5 se estudian las componentes de la incertidumbre que determinan el valor de la  $\sigma$  asociado a la cadena de medición de los termopares de skin.

En el apartado 6.6 se exponen algunos aspectos básicos de la combustión que justifican el motivo de seleccionar los datos históricos expuestos en el apartado 6.7.

En el apartado 6.8 se recopilan los resultados anteriores y se calculan todos los parámetros necesarios para el método. Finalmente, en el apartado 6.9 se estima con el Método SOLS Híbrido el flujo de calor en los tubos de shock y se analizan los resultados obtenidos.

## 6.2 Cálculo del coeficiente de transferencia de calor

En condiciones normales de operación, en los tubos de un horno siempre se dan condiciones de flujo turbulento ( $Re \gtrsim 10000$ ), por lo que a priori pueden usarse cualquiera de las correlaciones empíricas existentes para calcular el coeficiente de transferencia  $h$ .

Una de las correlaciones clásicas es la de Colburn (1933):

$$h = 0.023 \frac{k}{D_i} Re^{4/5} Pr^{1/3} \quad (6.1)$$

Donde  $k$  es la conductividad térmica del fluido,  $D_i$  el diámetro interior del tubo,  $Re$  el número de Reynolds y  $Pr$  el número de Prandtl. En la expresión (6.1) todas las propiedades del fluido se consideran a la temperatura  $T_\infty$ .

Otra correlación clásica es la de Dittus-Boelter (1930):

$$h = 0.023 \frac{k}{D_i} Re^{4/5} Pr^n \quad (6.2)$$

Siendo  $n=0.4$  para calentamiento y  $n=0.3$  para enfriamiento. La correlación de Colburn y la de Dittus-Boelter se utilizan normalmente en aquellos casos en los que no hay una gran diferencia entre la temperatura del tubo y del fluido, de manera que las propiedades del fluido se mantienen relativamente constantes a lo largo de la capa límite.

Para los casos en los que no se cumple lo anterior, se suele emplear la correlación de Sieder-Tate (1936):

$$h = 0.027 \frac{k}{D_i} Re^{4/5} Pr^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (6.3)$$

Expresión, en la que las viscosidades absolutas  $\mu$  y  $\mu_w$  del último término están referidas a la temperatura del fluido  $T_\infty$  y a la de pared del tubo respectivamente. El resto de propiedades del fluido necesarias para el cálculo de  $Re$  y  $Pr$  se consideran a la temperatura  $T_\infty$ .

Existen otras correlaciones más recientes como la de Petukhov (1970) y la de Gnielinski (1976) que se consideran más exactas. En ambas se contempla el factor de fricción como una variable adicional.

Para hornos de refinería fabricados según el estándar *API Standard 530*, en el caso de que solo exista fase líquida se utiliza la siguiente correlación:

$$h = 0.023 \frac{k}{D_i} Re^{4/5} Pr^{0.33} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14} \quad (6.4)$$

Expresión que suele incluirse por defecto en los simuladores comerciales de hornos tubulares. Por lo que de acuerdo con esto, se utilizará la expresión (6.4) para el cálculo del coeficiente de transferencia de calor  $h$ .

Las expresiones anteriores refieren el coeficiente de transferencia a la superficie interior del tubo, por lo que hay que multiplicarlas por la relación de diámetros  $D_i/D_o$  para referir  $h$  a la superficie exterior.

### 6.3 Estimación de las propiedades del fluido

Para obtener el coeficiente de transferencia a partir de la expresión (6.4), se necesita calcular previamente los números de Reynolds y de Prandtl. Para obtener  $Re$  es necesario conocer la viscosidad absoluta  $\mu$  y para obtener  $Pr$ , el calor específico  $c_p$  y la conductividad térmica del fluido  $k$ . Todas las propiedades hay que considerarlas a la temperatura  $T_\infty$ .

Para evaluar el último término de (6.4), también se necesita conocer la viscosidad absoluta  $\mu_w$  a la temperatura de pared del tubo.

El punto de partida para obtener las propiedades termofísicas del fluido es caracterizar el hidrocarburo que se calienta en el horno. Puesto que se trata de un horno de destilación a vacío, su carga consiste en un residuo atmosférico (fuel oil) procedente de la primera destilación del crudo.

Debido a la infinidad de especies químicas que existen en una determinada fracción del petróleo, estas no se suelen caracterizar enumerando sus especies químicas. Sino que en su lugar, las fracciones se caracterizan mediante una curva de destilación y algunas propiedades globales adicionales.

Como carga típica del horno bajo estudio se considera un residuo atmosférico procedente de un crudo tipo Arabia Ligero cuya curva de destilación ASTM D1160 (realizada a vacío y corregida a presión atmosférica) es la siguiente:

Porcentaje evaporado	°C
Principio destilación	307,5
Recogido 5% (v/v)	375,3
Recogido 10% (v/v)	401,3
Recogido 20% (v/v)	440,5
Recogido 30% (v/v)	473,0
Recogido 40% (v/v)	503,8
Recogido 50% (v/v)	538,3
Final dest. 58.3% (v/v)	566,3

Tabla 6.1. Curva de destilación ASTM D1160 de residuo atmosférico

Adicionalmente se dispone de las siguientes propiedades:

- Densidad a 15 °C: 0.9714 kg/l
- Viscosidad Cinemática: 572.2 cSt a 50 °C  
44.23 cSt a 100 °C

Para obtener las propiedades del fluido se ha utilizado el simulador de procesos Aspen HYSYS. A partir de la información anterior, el simulador discretiza el fluido en una serie de componentes virtuales denominados pseudocomponentes.

Cada pseudocomponente caracteriza al conjunto de especies químicas que se encuentra en un determinado rango de destilación y les asigna unas propiedades homogéneas. Partiendo de estos pseudocomponentes y empleando unas determinadas reglas de mezcla, el simulador obtiene todas las propiedades de interés del fluido.

Aspen HYSYS dispone de varios métodos termodinámicos para el cálculo de propiedades. Se ha seleccionado el Método de Peng-Robinson (1976) por ser el normalmente recomendado para aplicaciones de *oil & gas* y petroquímicas. Peng-Robinson es un modelo basado en ecuación de estado, desarrollado a partir del modelo de Redlich-Kwong para mejorar la caracterización del equilibrio líquido-vapor.

El calor específico  $c_p$ , al ser una propiedad termodinámica, es calculada directamente por el simulador mediante el modelo Peng-Robinson.

En el caso de la conductividad térmica la obtiene a partir del modelo de Ely& Hanley y en el de la viscosidad absoluta con el modelo de Twu [76].

Con el simulador Aspen HYSYS se obtienen las siguientes tablas de propiedades termofísicas del fluido en función de la temperatura:

<b>Temperature [°C]</b>	<b>Mass Heat Capacity [J/(kg·K)]</b>
290	2757,9
296	2777,3
302	2796,6
308	2815,8
314	2834,9
320	2853,9
326	2872,7
332	2891,4
338	2909,9
344	2928,4
350	2946,7

Tabla 6.2. Calor específico del fluido vs. temperatura

<b>Temperature [°C]</b>	<b>Thermal Conductivity [W/(m·K)]</b>
290	0,1014
296	0,1005
302	0,0997
308	0,0988
314	0,0979
320	0,0970
326	0,0961
332	0,0953
338	0,0944
344	0,0935
350	0,0926

Tabla 6.3. Conductividad térmica del fluido vs. temperatura

<b>Temperature [°C]</b>	<b>Viscosity [Pa·s]</b>
300	9,632E-04
335	6,679E-04
370	4,899E-04
405	3,903E-04
440	3,253E-04
475	2,749E-04
510	2,477E-04

Tabla 6.4. Viscosidad absoluta del fluido vs. temperatura

A partir de las tablas anteriores, ajustando por mínimos cuadrados con Excel se obtienen las siguientes correlaciones en función de la temperatura:

Calor Específico:

$$c_p = 3.1473 \cdot T + 1846.1 \quad \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (6.5a)$$

Conductividad Térmica:

$$k = -0.000147 \cdot T + 0.14412 \quad \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) \quad (6.5b)$$

Viscosidad Absoluta:

$$\mu = 2002.6 \cdot T^{-2.564} \quad \text{Pa} \cdot \text{s} \quad (6.5c)$$

Estas correlaciones serán utilizadas posteriormente para obtener las propiedades del fluido necesarias para el cálculo del coeficiente de transferencia  $h$ .

## 6.4 Características y propiedades del tubo

Los tubos instalados en la zona de shock del horno son de 5" Schedule 40, por lo que su diámetro exterior es  $D_o=141.3$  mm y su espesor de pared  $L=6.55$  mm.

El material del que están fabricados todos los tubos de la zona de radiación, incluidos los de shock, es acero inoxidable TP317. Este inoxidable es similar al TP316 salvo que tiene un mayor contenido en Molibdeno que le aporta una mejor resistencia a la corrosión.

Se supone que este material tiene las mismas propiedades que las del acero inoxidable TP316 el cual, al ser un material mucho más común, están fácilmente disponibles en la bibliografía.

De la referencia [30] se extraen las siguientes tablas de propiedades del TP316:

Temperatura (°C)	Conductividad (W/m·K)	Calor Específico (J/kg·K)
20	12,8	463
100	14,5	497
200	16,4	523
300	17,8	543
400	18,9	559
500	20,5	574
600	22,4	587
700	23,8	599

Tabla 6.5. Conductividad térmica y calor específico vs. temperatura del TP316

Como en el apartado anterior, se obtienen con Excel las siguientes correlaciones en función de la temperatura:

Conductividad Térmica:

$$k = 0.0135 \cdot T + 13.67 \quad \text{W/(m} \cdot \text{K)} \quad (6.6a)$$

Calor Específico:

$$c_p = 0.155 \cdot T + 496.67 \quad \text{J/(kg} \cdot \text{K)} \quad (6.6b)$$

Respecto a la densidad, se considera un valor constante e igual a 8328 kg/m<sup>3</sup>.

Como se verá en el apartado 6.7, en el registro de datos históricos que se ha seleccionado, las excursiones de temperatura de skin son relativamente pequeñas ( $\approx 10$  °C), por lo que las propiedades del tubo se supondrán constantes durante toda la estimación. Es decir, se considera un problema lineal.

## 6.5 Estimación de la desviación estándar $\sigma$ de las medidas

En una refinería de petróleo hay instalados miles de sensores con los cuales se monitoriza y controla remotamente todo el proceso. Estos sensores están cableados a un sistema de control de procesos.

La mayoría de los instrumentos transmiten la información mediante una señal analógica de alto nivel (4-20 mA), la cual es convertida posteriormente a formato digital para ser procesada en el sistema de control.

En el caso de las medidas de temperatura, lo habitual es que estas procedan de termopares, por lo que la señal es de muy bajo nivel (milivoltios). Esta señal se cablea mediante un cable específico denominado cable de extensión. Estos cables están fabricados de aleaciones similares a las que componen el termopar, por lo que tienen un coste más elevado que un cable normal de cobre.

Los cables de extensión atraviesan zonas en las que existen habitualmente interferencias electromagnéticas (arranques de grandes motores, transformadores, radioteléfonos, etc.), por lo que sus conductores están apantallados para minimizar el ruido de la señal.

Aunque en una refinería se utilizan cables apantallados para la mayoría de las señales de instrumentación, en el caso de los termopares esto tiene una especial relevancia, ya que el nivel de su señal es de tan solo mV. Así, en un termopar tipo K como los que se utilizan para medir la temperatura de skin en un horno, un nivel de ruido de tan solo  $\pm 1$  mV equivale aproximadamente a  $\pm 25$  °C.

Debido al coste de los cables de extensión, la solución normalmente empleada para abaratar la instalación consiste en instalar unidades multiplexoras. En estas unidades se realiza la compensación de unión fría y se convierte la señal analógica a formato digital. Con esta configuración, cada una de estas multiplexoras transmite digitalmente mediante un único cable varias señales de termopar al sistema de control.

Por tanto, para calcular la incertidumbre asociada a la medida de temperatura que se registra en el sistema de control, es necesario tener en cuenta todos los elementos existentes en la cadena de medición; desde el propio termopar, hasta el conversor analógico-digital de la multiplexora. Se supone que, a partir del momento en el que la señal se convierte a formato digital, no existen contribuciones adicionales a la incertidumbre.

La incertidumbre asociada a cualquier medición tiene dos componentes; la sistemática y la aleatoria. Si bien, desde el punto de vista del IHCP, solo es relevante la componente aleatoria, ya que es la que aporta el ruido a la señal.

De acuerdo con esto, será necesario identificar y cuantificar todas las componentes aleatorias de la incertidumbre que intervienen en la cadena de medición.

Si denominamos por  $S_k$  a la componente individual aleatoria de la incertidumbre asociada al elemento  $k$ , entonces la componente aleatoria total asociada a la cadena de medición  $S_T$  viene dada por:

$$S_T = (S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_j^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

Los termopares de skin instalados en el horno son del tipo K (Chromel-Alumel) por lo que su sensibilidad es aproximadamente  $39 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ . Este tipo de termopar es frecuentemente utilizado en la industria debido a su bajo coste, amplio rango de medida y buena resistencia a la corrosión.

Los termopares tipo K se fabrican conforme a unas especificaciones ASTM E230 (American Society for Testing Materials) que determinan que en el rango de 0 a  $1260^\circ\text{C}$  deben tener una exactitud superior a  $\pm 2.2^\circ\text{C}$  o al 0.75% del valor de la medida en  $^\circ\text{C}$ , cualquiera que sea el valor superior.

Si un termopar no verifica esta especificación es rechazado como del tipo K, por lo que este dato hay que interpretarlo como un valor máximo o equivalentemente  $3\sigma$  (99.7%).

Por tanto, para determinar el valor de la componente aleatoria de la incertidumbre del termopar, necesitamos disponer de su certificado de calibración específico.

En algún caso, como en la referencia [78], se considera esta especificación como una componente sistemática de la incertidumbre, asignando por tanto un valor nulo a la componente aleatoria del termopar, es decir  $S_1=0$ .

Entre el termopar y la unidad multiplexora se encuentran instalados otros dos elementos que también contribuyen a la incertidumbre de la cadena de medición; el conector y el cable de extensión.

Aplicando el mismo criterio la referencia [78], se considera que la contribución a la incertidumbre de estos elementos es exclusivamente sistemática. Por tanto, si denominamos por  $S_2$  y  $S_3$  a sus respectivas componentes aleatorias, entonces:  $S_2=S_3=0$ .

Respecto a la unidad multiplexora, como en cualquier equipo electrónico, la componente aleatoria viene determinada por su capacidad de rechazo al ruido, tanto en modo normal como en modo común: NMRR (Normal Mode Rejection Ratio) y CMRR (Common Mode Rejection Ratio).

En el caso de la multiplexora instalada [77], el fabricante no publica valores de NMRR ni CMRR, pero en su lugar especifica la siguiente información referente a la exactitud:

*Thermocouple signals*

*Accuracy at 20°C (including non-linearity and hysteresis)*

*<0.1% of measuring range  $\pm 0.7$  °C*

*Temperature effects on accuracy*

*{(greater of 0.01% of range or  $2\mu V$ )+0.01% of reading+0.03°C}/°C*

Por tanto, de acuerdo con esta información se asigna a la unidad multiplexora una componente aleatoria de la incertidumbre  $S_4=0.7$  °C.

Una vez cableada la señal del termopar a la unidad multiplexora, esta se transmite digitalmente, por lo que no se consideran contribuciones adicionales a la incertidumbre.

Recopilando los resultados anteriores, se obtiene el siguiente resultado respecto a la componente aleatoria total de la incertidumbre  $S_T$  asociada a la cadena de medición:

$$S_T = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)^{\frac{1}{2}} = (S_1^2 + 0.7^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0.7 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6.8)$$

Como este resultado ha sido obtenido a partir de una especificación proporcionada por el fabricante, debe considerarse como un valor máximo o equivalentemente  $3\sigma$  (99.7%).

Aunque se desconoce la componente aleatoria asociada al termopar  $S_1$ , la expresión (6.8) es útil en el sentido de que proporciona un orden de magnitud de la desviación estándar  $\sigma$  de las medidas de temperatura de skin ( $\sigma \gtrsim 0.23 \text{ } ^\circ\text{C}$ ).

## 6.6 Generalidades sobre combustión

Como se explicó en el Capítulo 1, la altura de llama de un quemador depende fundamentalmente de varios factores:

- Tecnología del quemador (convencional o Low-NOx)
- Composición del combustible
- Liberación de calor del quemador
- Exceso de aire en la combustión

Normalmente, el primer factor no se considera un factor influyente durante la operación rutinaria del horno, ya que el horno debe estar diseñado teniendo en cuenta el modelo de quemador instalado.

Para evitar que las llamas puedan impactar sobre los tubos de shock, estos suelen colocarse a una altura de entre 3 y 6 m sobre la longitud de llama visible. De esta manera se proporciona el margen suficiente para que la parte no visible de la llama no pueda alcanzar a los tubos de shock.

Este aspecto si requiere especial atención cuando han sido sustituidos los quemadores originales de un horno antiguo.

En efecto, debido a la cada vez más exigente legislación respecto a las emisiones de óxidos de nitrógeno en muchos hornos antiguos se sustituyen sus quemadores convencionales por quemadores de baja emisión de NOx (quemadores Low-NOx). Debido a su tecnología, estos quemadores Low-NOx tienen una mayor altura de llama que los convencionales, lo que puede causar que en determinadas circunstancias la llama alcance a los tubos de shock.

Respecto a la composición del combustible, debido a que se auto consume el gas que se genera en los diferentes procesos de la refinería, siempre habrá pequeñas variaciones en su composición debido a las perturbaciones operativas en los procesos que aportan ese gas. Obviamente, en los hornos que utilizan exclusivamente gas natural como combustible no ocurren tales variaciones.

En aquellos hornos que pueden consumir simultáneamente combustible líquido o gaseoso, el perfil de flujo de calor variará en función del *mix* de combustible que esté consumiendo. Con combustibles gaseosos el perfil de flujo de calor es normalmente más homogéneo que con los líquidos.

La liberación de calor de los quemadores es directamente proporcional al caudal de carga que circula por el horno y al calor que debe absorber el fluido. Dado que un horno se opera siempre respetando sus condiciones de diseño, incluso en condiciones operativas de máxima liberación de calor, la llama no debe poder alcanzar los tubos de shock.

Si bien, en el caso de que uno o varios quemadores se encuentren fuera de servicio por operaciones de limpieza, si se requiere prestar especial atención a este aspecto. Al repartirse la misma liberación de calor entre menos quemadores operativos, causará que los quemadores que quedan en servicio tengan una mayor altura de llama.

En el caso de un horno de destilación a vacío, la absorción de calor viene determinada fundamentalmente por tres variables operativas; la carga y las temperaturas de entrada y salida del fluido.

La carga suele venir fijada por las necesidades de fabricación. Por lo que en el sistema de control se fija una consigna de caudal (*set point*), que se suele mantener constante durante varios días.

La temperatura de entrada al horno disminuye a lo largo del *run length* del proceso, como consecuencia del progresivo ensuciamiento de los intercambiadores de calor que precalientan la carga. Sin embargo, este ensuciamiento es habitualmente lo suficientemente lento como para que esta temperatura se mantenga prácticamente constante durante varios días.

Respecto a la temperatura de salida del horno, se fija un *set point* en el sistema de control con el objetivo de garantizar una adecuada destilación del fluido y así conseguir los rendimientos previstos en destilados. Por tanto, también puede considerarse prácticamente constante.

Como conclusión, para una absorción de calor fijada, la única manera de disminuir la liberación de calor en el horno y por tanto de incrementar su eficiencia, es actuando sobre el exceso de aire de combustión.

En la operación rutinaria de un horno, el control del exceso de aire es la variable más importante desde el punto de vista de la eficiencia energética. Ya que cuanto mayor sea el exceso de aire mayor será el consumo de combustible del horno.

En los hornos de proceso, para asegurar la combustión completa del combustible, se suministra aire en una cantidad superior al estrictamente estequiométrico. Operando con este ligero exceso de aire (15-25%) se asegura que no aparezca monóxido de carbono (CO) en los humos.

La presencia de CO en los humos tiene dos efectos adversos. Por un lado, no se extrae todo el poder calorífico del combustible, lo que provoca una pérdida de eficiencia. Por otro, puede afectar a la seguridad, ya que el CO puede sufrir una postcombustión en la zona de convección y originar una explosión. Se considera una operación correcta cuando el contenido de monóxido de carbono en los humos es inferior a 50 ppm.

Por tanto, concentraciones entre el 2.5 y el 4% de oxígeno en los humos aseguran la combustión completa del combustible con un exceso de aire adecuado (15-25%). Operar un horno con un exceso de aire mayor implica una pérdida de eficiencia debido al consumo adicional de combustible que se necesita para calentar ese exceso innecesario de aire (que no participa en la combustión) desde la temperatura ambiente a la de salida de los humos.

Como regla aproximada, una reducción en el contenido de oxígeno en los humos del 1% supone una mejora de eficiencia del 0.5%.

Aunque el nitrógeno presente en el aire no participa en la combustión, debido a las altas temperaturas que se generan, este se oxida produciendo óxidos de nitrógeno. Por tanto, otro beneficio adicional de operar con un menor exceso de aire es que también se disminuyen las emisiones de NOx.

El ajuste del exceso de aire en un horno se lleva a cabo monitorizando con un analizador en línea el contenido de oxígeno en los humos a la salida de la zona de radiación y ajustando en consecuencia el caudal de aire a los quemadores.

En los hornos más modernos junto con el analizador de oxígeno se instala también un analizador de monóxido de carbono. De esta manera se supervisa que no se eleva la concentración de CO en los humos (<50 ppm) como consecuencia de haber disminuido demasiado el exceso de aire a los quemadores.

Si bien, aún en el caso de haber realizado un ajuste óptimo de la combustión, es decir un porcentaje de oxígeno en humos entre el 2.5 y 4% y una concentración de CO inferior a 50 ppm, existe otro efecto adicional a tener en cuenta, sobre todos en aquellos hornos en los que sus quemadores convencionales se han sustituido por quemadores Low-NOx.

Debido a que un menor exceso de aire produce una mayor altura de la llama (que ya de por sí es más alta en un quemador Low-NOx), puede ocurrir que un ajuste óptimo desde el punto de vista de eficiencia, no lo sea desde un punto de vista operativo.

Es decir, puede suceder que, al disminuir el exceso de aire, la altura de llama se eleve lo suficiente como para que la parte no visible de esta pueda alcanzar a los tubos de shock. Esta situación ocasionará un excesivo flujo de calor en estos tubos y el consecuente riesgo de coquización.

Por tanto, este es el motivo que justifica el interés práctico que tiene conocer las perturbaciones del flujo de calor en los tubos de shock cuando se reduce el exceso de aire.

## 6.7 Datos históricos de operación

De acuerdo con el apartado anterior, se ha seleccionado un rango de datos históricos de operación del horno bajo estudio durante el cual se ha intentado optimizar el exceso de aire.

En la figura 6.1 se representan los valores de temperatura de skin de uno de los tubos de shock (rojo) junto con el porcentaje de oxígeno en los humos (negro), durante un periodo de operación de aproximadamente cinco horas.

En la figura 6.1 se observa como inicialmente el horno se encuentra con una concentración de oxígeno en humos de aproximadamente un 5% y que posteriormente, en el periodo que va desde las 17:15 hasta las 19:00, se intenta reducir el exceso de aire hasta valores próximos al 3%.

En la figura también se aprecia que, al observarse algunos picos en las temperaturas de skin, se decide retornar a la situación inicial, probablemente al sospecharse que las llamas pudieran estar alcanzando a los tubos de shock.

A pesar de que las excursiones de temperatura de skin son relativamente pequeñas ( $\approx 10$  °C), cuando se obtengan las estimaciones de flujo de calor se verá como sin embargo a efectos de flujo estas perturbaciones sí que tienen un impacto considerable.

En el apartado 6.9 se aplica el Método SOLS Híbrido a este registro de datos históricos, con el objetivo de cuantificar la magnitud de las perturbaciones del flujo calor que se producen en los tubos de shock cuando el horno se encuentra operando en la región de bajo exceso de aire ( $\approx 3\%$  de oxígeno en los humos).

De esta manera, se puede supervisar si en algún momento el flujo de calor sobrepasa el valor máximo establecido en el diseño del horno.

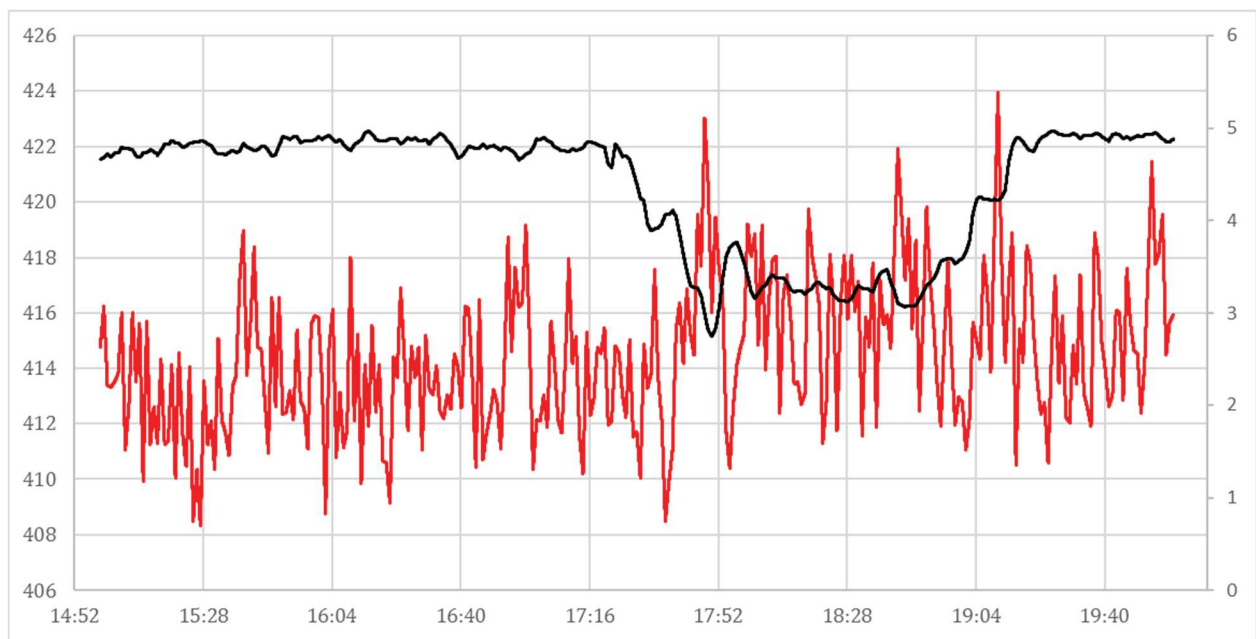


Figura 6.1. Evolución de temperatura de skin y oxígeno en los humos

## 6.8 Parámetros estacionarios del modelo

Para aplicar el Método SOLS Híbrido a los tubos de shock es necesario calcular previamente el número de Biot  $B_i$  y la difusividad térmica  $\alpha$  del material de los tubos. Ambos parámetros se consideran estacionarios (problema lineal) a lo largo de todo el intervalo temporal en el que se estima el flujo.

En este apartado se explica las condiciones operativas que se suponen estacionarias, así como la metodología utilizada para asignar un valor numérico a estos dos parámetros. Para ello se emplearán las correlaciones obtenidas en los apartados anteriores.

En la tabla siguiente se indican las condiciones estacionarias que se consideran para los tubos de shock:

Caudal másico	14.5	kg/s
Temperatura fluido	338.1	°C
Temperatura Metal Tubo	414.9	°C

Tabla 6.6. Condiciones operativas estacionarias en los tubos de shock

Estos valores se han obtenido como promedio de estas variables durante las ocho horas anteriores.

Teniendo en cuenta las condiciones de la tabla 6.6 anteriores y utilizando las correlaciones (6.5), se obtienen las siguientes propiedades estacionarias del fluido:

Viscosidad absoluta a $T_{\infty}$	6,56E-04	Pa·s
Viscosidad absoluta a $T_w$	3,88E-04	Pa·s
Calor específico	2910	J/(kg·K)
Conductividad térmica	0,0944	W/(m·K)

Tabla 6.7. Propiedades termofísicas estacionarias del fluido

Con estas propiedades termofísicas y las características geométricas del tubo se calculan los números adimensionales de Reynolds y Prandtl:

Re	219794
Pr	20,2

Tabla 6.8. Números de Reynolds y Prandtl

Con estos valores y utilizando la correlación (6.4) de *API Standard 530*, se obtiene un coeficiente de transferencia referido a la superficie exterior del tubo  $h=837.8 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ .

Respecto a las propiedades termofísicas del acero inoxidable TP317, para una temperatura de metal de  $414.9 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , se obtiene mediante las correlaciones (6.6a-b) una conductividad térmica  $k=19.3 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$  y un calor específico  $c_p=561 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ .

Finalmente, a partir de los resultados anteriores se obtiene un número de Biot  $B_i= 0.285$  y una difusividad térmica  $\alpha=4.17\cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Estos dos parámetros se incorporan como valores estacionarios al algoritmo en el que se ha implementado el Método SOLS Híbrido.

## 6.9 Estimación del flujo de calor en los tubos de shock

En este apartado se aplica el Método SOLS Híbrido al registro histórico de valores de temperatura de skin expuesto en el apartado 6.7, con la intención de estimar la evolución del flujo de calor en los tubos de shock durante ese intervalo temporal.

A diferencia de capítulos anteriores, en los que por simplicidad el problema se plantea en formulación adimensional, en este apartado se ha estimado el flujo en unidades de  $W/m^2$ .

Puesto que las lecturas de temperatura de skin se refrescan en el sistema de control cada segundo, se utiliza lógicamente ese mismo paso de tiempo.

Se considera un valor de  $\eta=10^{-4}$ , lo que equivale a considerar una historia reducida de aproximadamente seis minutos.

Al intentar aplicar el Método SOLS Híbrido, se observa que el residuo inicial  $R_0$  es sistemáticamente superior al resultado que se obtuvo en la expresión 6.8 ( $\sigma \geq 0.23$  °C).

Mediante un procedimiento de prueba y error se ha comprobado que si se asigna como valor central del parámetro de regularización  $r_0=15$  y una desviación estándar de  $\sigma=0.44$ , entonces el residuo se comporta como lo haría si se cumpliera el Principio Residual, es decir, oscilando en torno a este valor de  $\sigma$ .

En la figura 6.2 se representa la evolución del residuo a lo largo de toda la estimación. La línea roja discontinua representa el valor constante  $\sigma=0.44$ .

Por tanto, este valor de la sigma reflejaría el ruido total asociado a la unidad multiplexora y al termopar de skin. Resultado que, de acuerdo con la expresión 6.8, equivale a  $S_1=1.12$  °C, valor que es consistente con la especificación de los termopares tipo K.

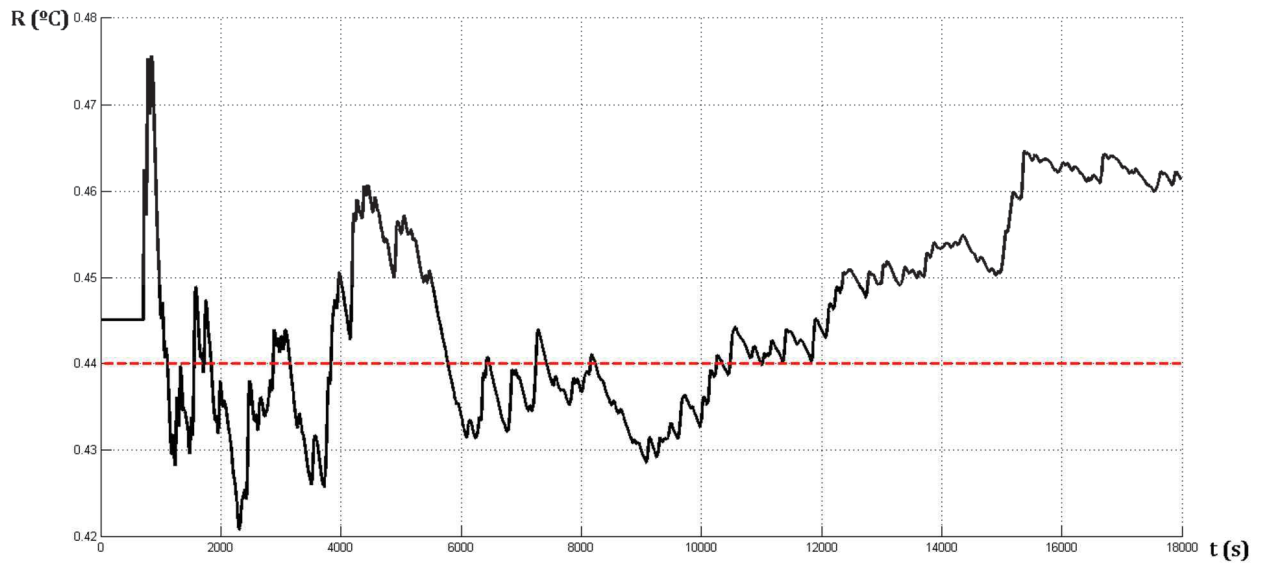


Figura 6.2. Evolución del residuo durante la estimación

Para poder obtener conclusiones de la estimación, hay que compararla con los valores máximos de flujo de calor especificados en el diseño del horno.

Los valores que figuran en su hoja de datos API son los siguientes:

- Flujo calorífico medio= $26500 \text{ kcal}/(\text{h}\cdot\text{m}^2) = 30820 \text{ W}/\text{m}^2$
- Flujo calorífico máximo= $49803 \text{ kcal}/(\text{h}\cdot\text{m}^2) = 57921 \text{ W}/\text{m}^2$

De estos datos se deduce que la relación entre flujo máximo y medio es de 1.9, valor similar a los indicados en el apartado 1.3.

Para servir de referencia, en las figuras siguientes se representa mediante una línea roja discontinua el valor máximo de flujo de calor especificado en el diseño del horno, es decir,  $57921 \text{ W}/\text{m}^2$ .

En la figura 6.3 se representa la estimación completa del flujo de calor en los tubos de shock obtenida mediante el Método SOLS Híbrido.

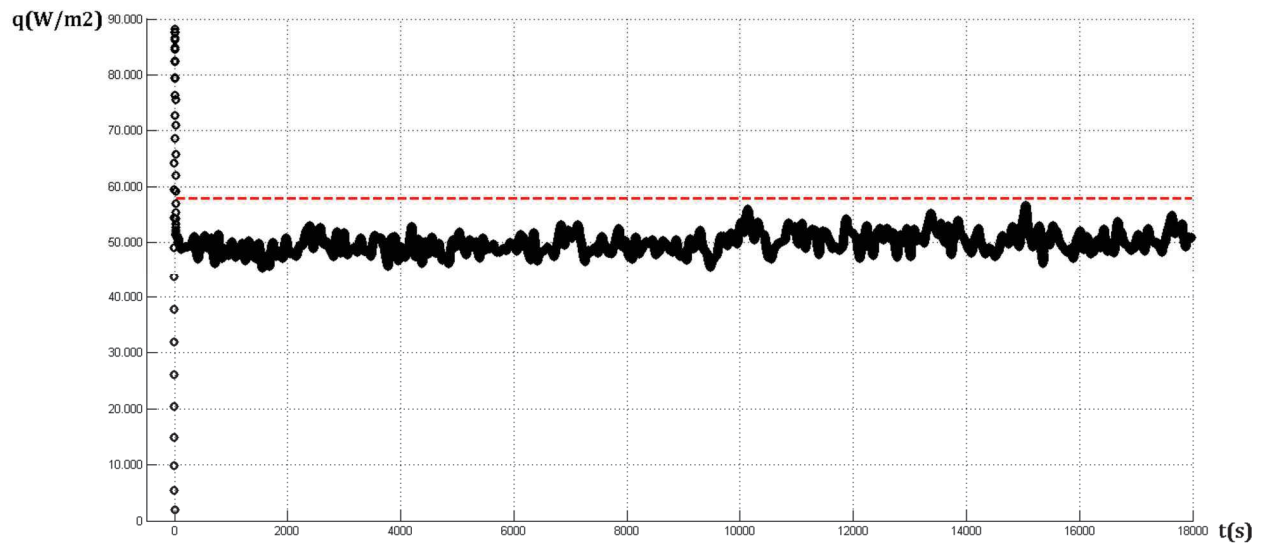


Figura 6.3. Estimación completa durante cinco horas con  $r_0=15$

En la figura 6.4 se representa únicamente el intervalo temporal durante el cual se ha intentado reducir el exceso de aire (aproximadamente desde las 17:00 a las 19:30).

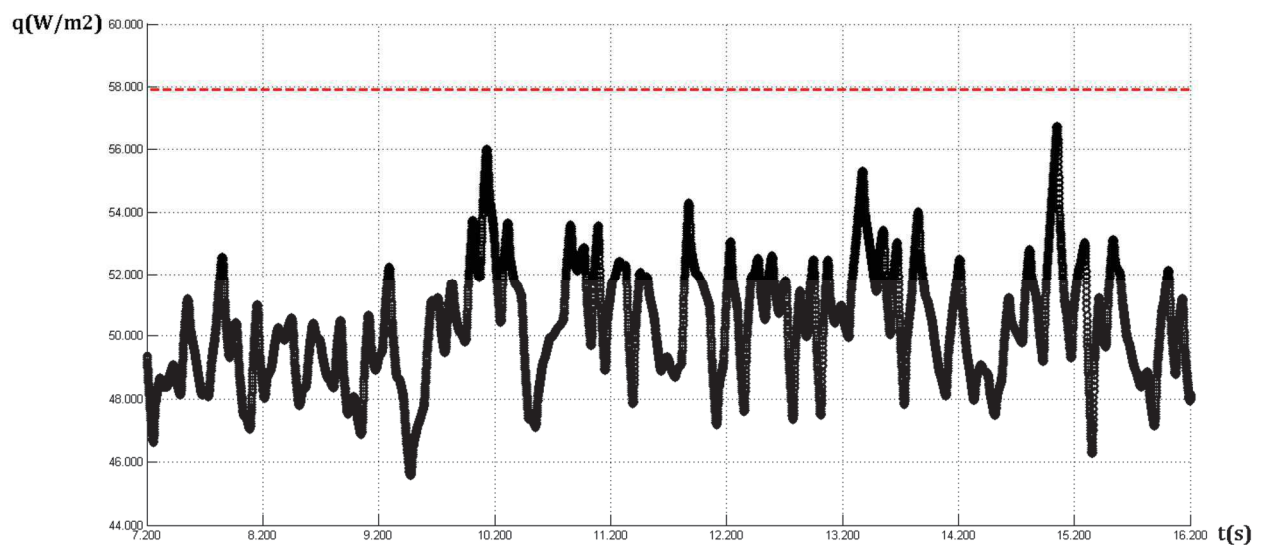


Figura 6.4. Estimación durante la fase de optimización del exceso de aire con  $r_0=15$

Finalmente, en la figura 6.5 se hace un zoom al intervalo temporal en el cual se ha registrado la máxima amplitud de perturbación, que se produce alrededor de las 19:18.

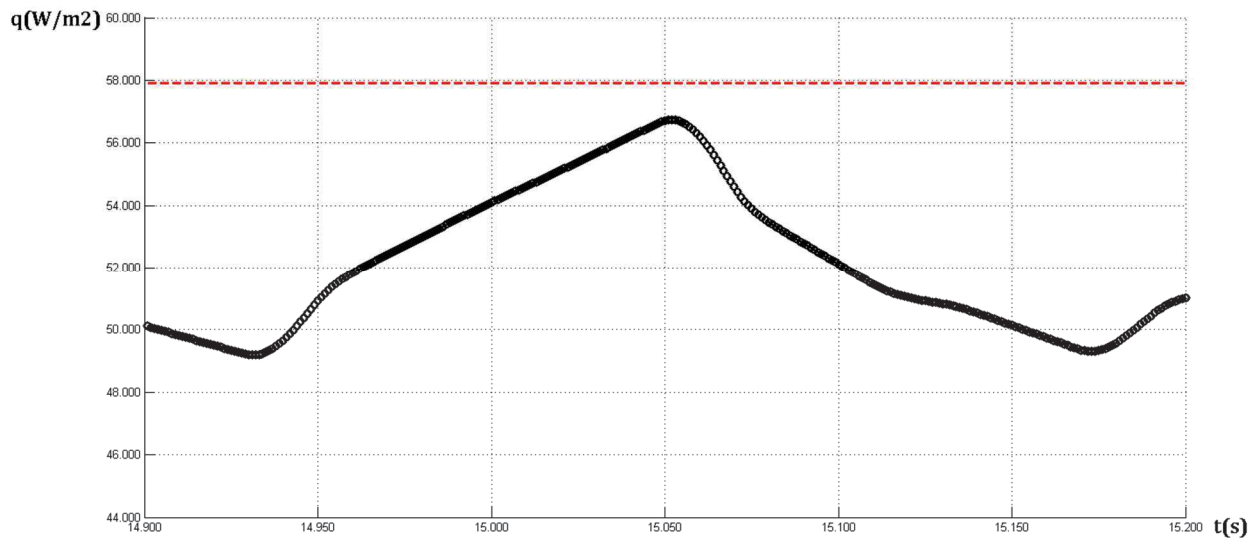


Figura 6.5. Máxima perturbación registrada de flujo de calor con  $r_0=15$

Examinando la figura 6.5, se observa que el flujo de calor en los tubos de shock ha llegado a alcanzar un valor de  $56740 \text{ W/m}^2$ , lo que supone un 98% del valor máximo especificado en el diseño del horno.

Por tanto, se puede concluir que, para estas condiciones de operación, operar el horno con un 3% de oxígeno en los humos puede causar que eventualmente se alcancen flujos de calor en los tubos de shock próximos a los valores máximos establecidos en el diseño. Esta situación obviamente no es aconsejable y confirma la conveniencia de incrementar nuevamente el exceso de aire.

Como se desprende de los datos de la figura 6.1, se ha optado por una operación conservadora, retornando el exceso de aire al valor inicial (5% de oxígeno en humos). Por tanto, al no conseguirse reducir este exceso de aire, no se consigue ninguna mejora en la eficiencia del horno.

Esta situación demuestra que, de haber dispuesto de una herramienta de supervisión online como la metodología propuesta en esta tesis, podría haberse ajustado el exceso de aire a un valor menos agresivo, como por ejemplo un 4% de oxígeno en humos, verificándose al mismo tiempo que las perturbaciones del flujo de calor no alcancen valores próximos al flujo máximo de diseño. De esta forma, sí podría haberse conseguido una mejora en la eficiencia del horno.

### 6.9.1 Sensibilidad al parámetro de regularización

En el caso práctico estudiado, se ha visto que, al no disponerse de la desviación estándar  $\sigma$  de las lecturas de temperatura de skin, ha sido necesario un procedimiento de prueba y error para obtener tanto el parámetro de regularización  $r_0$  como el correspondiente valor de  $\sigma$ .

Para obtenerlos, el criterio ha consistido en localizar una combinación de ambos parámetros que haga que el residuo acumulado tenga una cierta fluctuación en torno al valor de  $\sigma$ , tal como se ha representado en la figura 6.2. Es decir, imponer que el residuo acumulado se comporte respecto al valor de  $\sigma$  como se esperaría que lo hiciese en el caso de que se cumpliera el Principio Residual.

A pesar de lo que pudiese parecer, esta situación será bastante frecuente, ya que en la gran mayoría de las aplicaciones prácticas industriales no estará disponible el valor real de  $\sigma$ .

Dado que con la metodología expuesta se localiza el valor del parámetro central de regularización  $r_0$  por un procedimiento de prueba y error, surge la duda razonable de si este procedimiento es lo suficientemente robusto. Es decir, si en el caso de haber obtenido otro valor del parámetro central de regularización diferente a  $r_0=15$ , se modifica sustancialmente el comportamiento de la estimación y por tanto las conclusiones que se obtienen a partir de ella.

Para confirmar esto, se han obtenido dos nuevas estimaciones para valores del parámetro central de regularización próximos al valor  $r_0=15$ .

Puesto que desde el punto de vista de la aplicación práctica lo más relevante es verificar si cambia significativamente la magnitud de la perturbación, en las figuras siguientes se ha representado el mismo intervalo temporal que el utilizado para la figura 6.5.

En la figura 6.6 se representa la estimación correspondiente a la máxima perturbación para  $r_0=7$  y en la figura 6.7 para  $r_0=22$ . Es decir, un cambio de  $\pm 7$  respecto del valor  $r_0$  obtenido inicialmente.

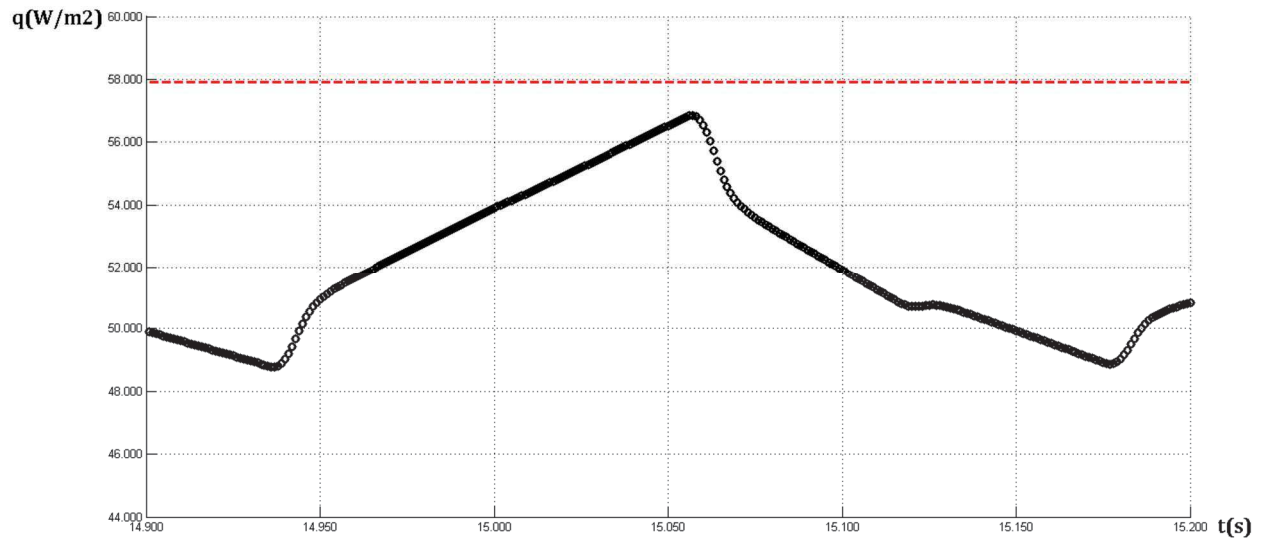


Figura 6.6. Máxima perturbación registrada de flujo de calor con  $r_0=7$

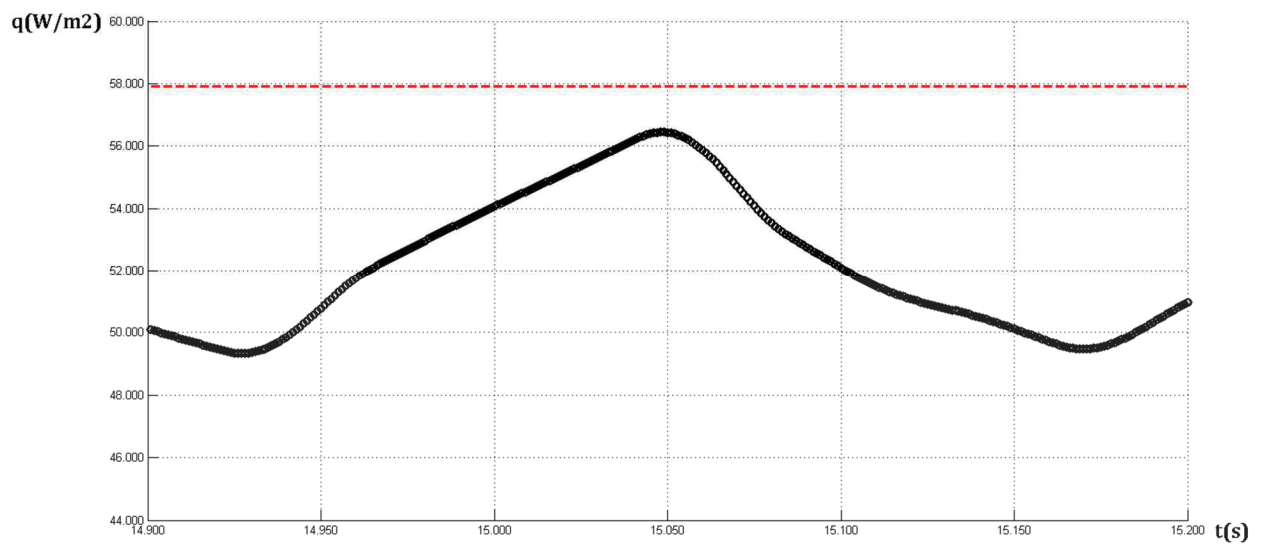


Figura 6.7. Máxima perturbación registrada de flujo de calor con  $r_0=22$

En la tabla 6.9 se indica el valor estimado del flujo en el instante en el que se produce la máxima perturbación junto con la desviación porcentual respecto al valor que se obtuvo en la estimación inicial ( $r_0=15$ ).

---

<b>r0</b>	<b>q<sub>max</sub>(W/m<sup>2</sup>)</b>	<b>Δ (%)</b>
7	56861	0,2%
15	56740	
22	56445	-0,5%

Tabla 6.9. Estimaciones numéricas de la máxima perturbación del flujo de calor

De acuerdo con los resultados de la tabla anterior, queda probado que la metodología es suficientemente robusta, confirmándose que la estimación de la magnitud de la perturbación es, a efectos prácticos, la misma.

## Capítulo 7

### Conclusiones

Desde un punto de vista matemático, en esta tesis se ha desarrollado una nueva metodología con la cual es posible estimar el flujo de calor a partir de medidas de temperatura superficial.

Partiendo de la formulación basada en temperatura del Teorema de Duhamel, se ha desarrollado un método semianalítico, denominado Método SOLS, que permite estimar el flujo de calor.

El Método SOLS se concibe como un método secuencial que incluye una técnica de estabilización basada en mínimos cuadrados. En cada paso de tiempo esta técnica se aplica sobre un conjunto reducido de medidas de temperatura.

Como se demuestra en el Capítulo 3, para el caso particular en el que el sensor se ubica en la superficie del sólido en conducción (en lugar de en su interior), el Método SOLS se demuestra incluso superior al prestigioso Método FSM.

A lo largo de los capítulos posteriores de esta tesis se añaden nuevas capacidades al Método SOLS con el objetivo de dotarlo de capacidad para estimar de manera *online* el flujo de calor.

En el Capítulo 4 se hace una formulación recursiva del método que le permite funcionar con una historia reducida. De esta manera, se puede implementar en aplicaciones online con una carga computacional aceptable.

En el Capítulo 5 se incorpora el Principio Residual, pasándose a denominar Método SOLS Híbrido. Este método, híbrido en el sentido de que combina los métodos SOLS y FSM, se concibe para localizar el valor óptimo del parámetro de regularización a partir de la información de la desviación estándar de las medidas de temperatura superficial.

Como conclusión, la metodología desarrollada en esta tesis aporta una nueva técnica que resuelve de manera muy eficaz los problemas inversos de conducción de calor en los que las medidas de temperatura se toman en la superficie del sólido.

Todo el desarrollo matemático tratado en los capítulos 3,4 y 5 ha sido publicado en la revista *Heat Transfer Engineering* bajo el título: *A Hybrid Procedure for the Sequential Estimation of Surface Heat Flux From Measurements of Surface Temperature*.

Respecto a la aplicación práctica de esta tesis, se ha demostrado en el Capítulo 6 que es posible estimar de manera online el flujo de calor en los tubos de shock de un horno tubular.

Como se vio en el Capítulo 1, en la actualidad la forma habitual de estimar el flujo de calor local que incide sobre los tubos de un horno es mediante un simulador comercial o realizando un análisis CFD.

Aunque como se indica en la referencia [56], los resultados que se obtienen con ambos métodos pueden discrepar considerablemente, sobre todo en tubos como los de shock, en los que la altura de llama tiene un papel muy relevante en el flujo de calor que reciben.

En cualquier caso, los resultados obtenidos con ambos métodos son estrictamente válidos para las condiciones operativas estacionarias que se fijan en la simulación o el análisis CFD.

Por tanto, si se desea conocer el comportamiento del horno en otras condiciones operativas, lo más conveniente es volver a simular el horno para esas nuevas condiciones. Obviamente, esta manera de proceder imposibilita que estos métodos se pueden utilizar como una herramienta adicional para la supervisión online de la operación del horno.

A diferencia de esto, la metodología desarrollada en esta tesis permite estimar de manera online el flujo de calor considerando en cada momento las condiciones operativas actuales.

Aunque es importante reseñar que esta nueva técnica solo puede aplicarse a aquellos tubos del horno en los que se mide la temperatura del fluido y la temperatura de skin.

Entre las aplicaciones más interesante donde es posible aplicar esta metodología se encuentran los tubos de shock (figura 1.1).

En el Capítulo 6 se ha visto como bajo determinadas condiciones operativas, la altura de llama de los quemadores puede elevarse lo suficiente como para alcanzar estos tubos. Si estas condiciones no son identificadas rápidamente y corregidas, se producirá la aparición de *hot spots* que provocarán la coquización del fluido en el interior de los tubos.

Como resultado de esta deposición de coque se produce un aumento de la temperatura de metal de los tubos y una pérdida de eficiencia en el horno, lo que provoca finalmente que el horno deba ser parado para proceder a su limpieza.

Es importante reseñar que estos tubos se equipan con termopares de skin precisamente para poder detectar estas situaciones.

Sin embargo, como se ha visto en el Capítulo 6, las perturbaciones que se producen en la temperatura de skin pueden ser de tan solo unos pocos grados centígrados ( $\approx 10$  °C), lo cual puede llevar a la conclusión de que no son lo suficientemente significativas como para provocar el sobrecalentamiento de los tubos de shock.

A diferencia de ello, la nueva metodología estima esas perturbaciones en términos de flujo de calor, lo que permite evaluar cuantitativamente si esas perturbaciones pueden alcanzar los valores máximos de flujo establecidos en el diseño del horno.

Como conclusión, la metodología desarrollada en esta tesis proporciona una nueva herramienta de supervisión que permite detectar situaciones en las que los tubos de shock pueden estar expuestos a condiciones operativas más severas a las previstas en el diseño del horno.

En el Capítulo 6 se ha visto como estas situaciones pueden ocurrir cuando se reduce el exceso de aire de un horno con el objetivo de mejorar su eficiencia. Por tanto, el potencial de esta nueva metodología radica en que puede ser utilizada para supervisar que se realiza un ajuste óptimo del exceso de aire.

Como futuras líneas de trabajo relacionadas con esta tesis, desde un punto de vista matemático puede ser de interés formular la metodología en coordenadas cilíndricas. Para ello, en el Anexo 3 se obtiene la solución fundamental en coordenadas cilíndricas, abriendo la puerta a posibles aplicaciones en las que es necesario tener en cuenta la curvatura.

Desde un punto de vista práctico, se tiene previsto aplicar la metodología a otros hornos distintos del estudiado y publicar los resultados que se obtengan.

## Anexos

En los tres anexos siguientes se resuelven analíticamente tres problemas directos de conducción de calor relacionados con esta tesis.

En estos tres casos, se supone una condición de contorno de tercera clase (también conocida como condición de Robin) en la superficie del sólido que no está expuesta a la excitación.

En el Anexo 1 se estudia la solución analítica en coordenadas cartesianas a una excitación del tipo escalón unitario de flujo. Esta solución, además de haberse utilizado durante la fase de pruebas de los diferentes algoritmos, es necesaria para obtener la solución del Anexo 2.

En el Anexo 2 se obtiene la solución analítica en coordenadas cartesianas a una excitación del tipo escalón unitario de flujo seguido de una perturbación triangular simétrica. Con esta solución contaminada con errores aleatorios, se han realizado todas las validaciones numéricas que figuran en los capítulos 3,4 y 5.

En el Anexo 3 se obtiene la solución analítica en coordenadas cilíndricas a una excitación del tipo escalón unitario de temperatura. Es decir, la respuesta fundamental  $u(r, t)$  con la que se formularía el Método SOLS en coordenadas cilíndricas. Esta solución abre las puertas a futuras aplicaciones en las que no puede ignorarse el radio de curvatura de los tubos.

Finalmente, en el Anexo 4 se expone la portada del artículo publicado en relación con el aparato matemático de esta tesis.



## Anexo 1

### Escalón unitario de flujo en coordenadas cartesianas

En este anexo se obtiene la solución analítica para una excitación del tipo escalón unitario de flujo. Esta solución se corresponde con la respuesta fundamental  $u(x, t)$  que es utilizada posteriormente en el Anexo 2.

El problema se formula adimensionalmente como representa la figura siguiente:

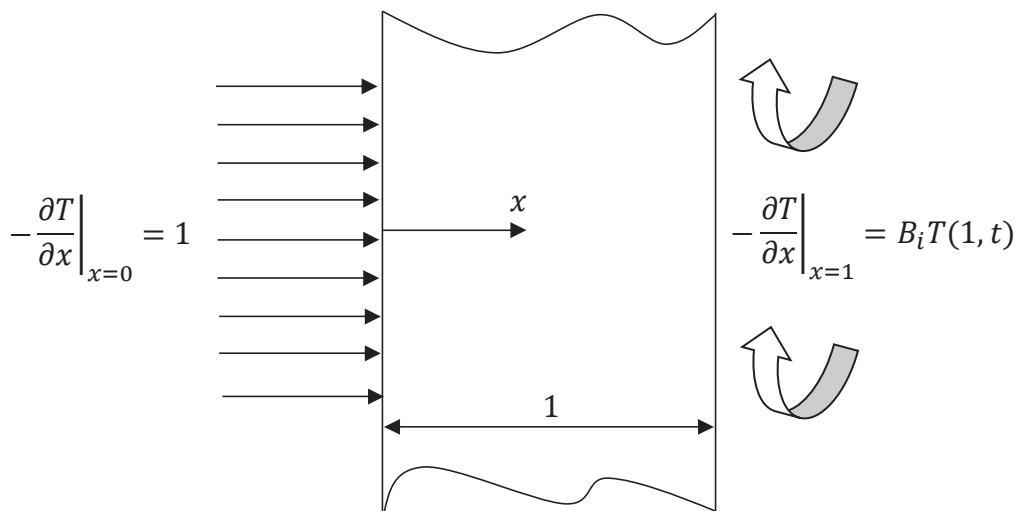


Figura A1.1. Esquema del problema escalón unitario de flujo

Por lo que se trata de resolver el siguiente problema directo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A1.1a})$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 1 \quad (\text{A1.1b})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = B_i T(1, t) \quad (\text{A1.1c})$$

$$T(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A1.1d})$$

Teniendo en cuenta la física del problema, se ensaya una solución que sea superposición de una función estacionaria y otra transitoria.

$$T(x, t) = s(x) + w(x, t) \quad (\text{A1.2})$$

La función estacionaria  $s(x)$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = 0 \quad (\text{A1.3a})$$

$$-\frac{ds}{dx} \Big|_{x=0} = 1 \quad (\text{A1.3b})$$

$$-\frac{ds}{dx} \Big|_{x=1} = B_i s(1) \quad (\text{A1.3c})$$

Cuya solución es trivial y viene dada por:

$$s(x) = -x + 1 + \frac{1}{B_i} \quad (\text{A1.4})$$

La función transitoria  $w(x, t)$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{A1.5a})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{A1.5b})$$

$$-\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=1} = B_i w(1, t) \quad (\text{A1.5c})$$

$$w(x, 0) = -s(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A1.5d})$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por el método de separación de variables (SOV), para lo cual se ensaya una solución del tipo:

$$w(x, t) = X(x) \cdot \Gamma(t) \quad \text{con} \quad \Gamma(t) = C \cdot e^{-\beta^2 t} \quad (\text{A1.6})$$

Donde  $X(x)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \quad (\text{A1.7a})$$

$$X(0) = 1 \quad (\text{A1.7b})$$

$$-\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=1} = B_i \cdot X(1) \quad (\text{A1.7c})$$

Cuya solución fundamental es:

$$X(x) = \cos(\beta_m x) \quad (\text{A1.8})$$

Siendo  $\beta_m$  las raíces de la ecuación trascendente:

$$\beta_m \tan \beta_m = B_i \quad (\text{A1.9})$$

Por lo que la solución transitoria  $w(x, t)$  viene dada por:

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\beta_m x) \cdot e^{-\beta_m^2 t} \quad (\text{A1.10})$$

Los coeficientes  $c_m$  se obtienen aplicando la condición inicial (A1.5d).

$$w(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\beta_m x) = -s(x) \quad (\text{A1.11})$$

Aplicando el operador  $\int_0^1 \cos(\beta_m x) dx$  a ambos lados de la expresión (A1.11) y teniendo en cuenta la condición de ortogonalidad  $\int_0^1 \cos(\beta_m x) \cos(\beta_n x) dx = \delta_{m,n} \cdot \int_0^1 \cos^2(\beta_m x) dx$  se obtienen los coeficientes  $c_m$ :

$$c_m = \frac{\int_0^1 -s(x) \cos(\beta_m x) dx}{\int_0^1 \cos^2(\beta_m x) dx} \quad (\text{A1.12})$$

La integral del numerador viene dada por:

$$\int_0^1 -s(x) \cos(\beta_m x) dx = \left[ -\frac{1}{B_i \beta_m} \operatorname{sen} \beta_m + \frac{\cos \beta_m - 1}{\beta_m^2} \right] \quad (\text{A1.13})$$

Y la integral del denominador por:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2(\beta_m x) dx = \frac{\beta_m^2 + B_i^2 + B_i}{2(\beta_m^2 + B_i^2)} \quad (\text{A1.14})$$

Finalmente, a partir de los resultados anteriores se obtiene la solución del problema directo:

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\beta_m x) \cdot e^{-\beta_m^2 t} - x + 1 + \frac{1}{B_i} \quad (\text{A1.15})$$

Donde los coeficientes  $c_m$  vienen dados por:

$$c_m = \frac{2(\beta_m^2 + B_i^2)}{\beta_m^2 + B_i^2 + B_i} \left[ -\frac{1}{B_i \beta_m} \operatorname{sen} \beta_m + \frac{\cos \beta_m - 1}{\beta_m^2} \right] \quad (\text{A1.16})$$

En la gráfica siguiente se representa el campo de temperatura adimensional  $T(x, t)$  para diferentes instantes de tiempo. Se considera  $B_i=0.25$ .

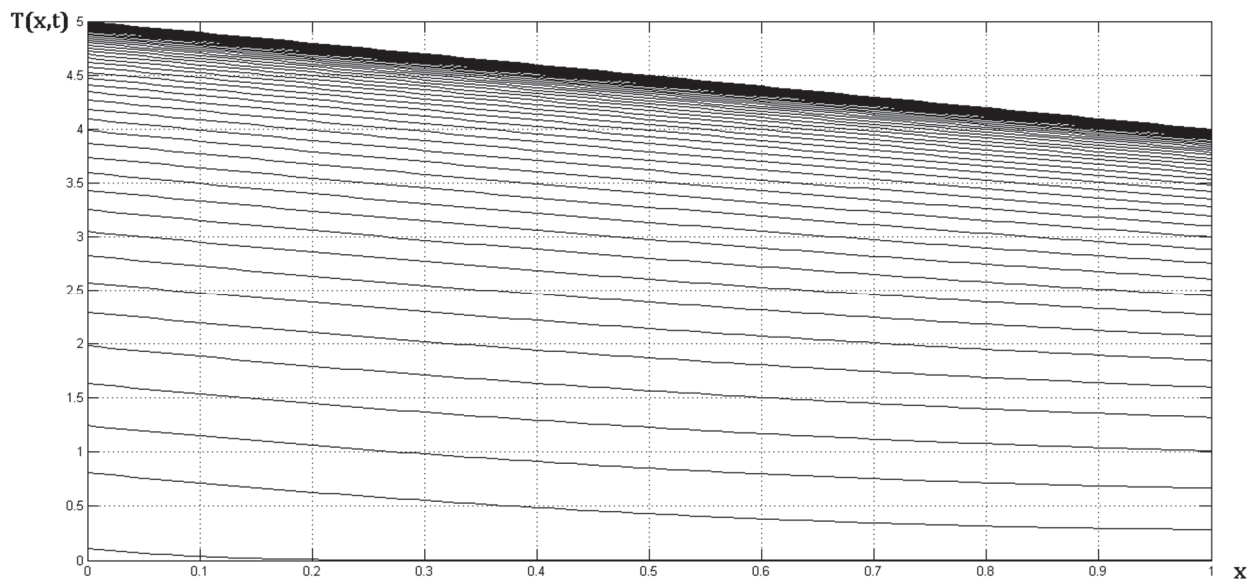


Figura A1.2. Familia de curvas  $T(x, t)$  para un escalón unitario de flujo



## Anexo 2

### Escalón unitario de flujo seguido de perturbación triangular simétrica en coordenadas cartesianas

En los capítulos anteriores se validan numéricamente los diferentes métodos utilizando como entrada conocida una excitación del tipo escalón unitario de flujo seguido de una perturbación triangular simétrica de amplitud  $A_p$ .

En este anexo se resuelve analíticamente mediante la técnica del teorema de Duhamel [22,29], el problema directo de conducción de calor asociado a esta excitación.

El problema se formula adimensionalmente como representa la figura siguiente:

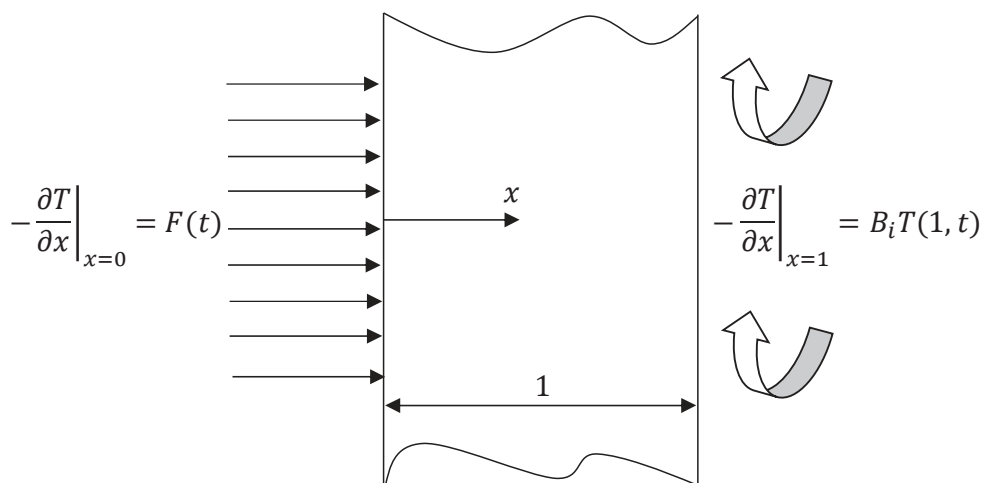


Figura A2.1. Esquema del escalón unitario de flujo con perturbación

Por lo que se trata de resolver el siguiente problema directo:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A2.1a})$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = F(t) \quad (\text{A2.1b})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = B_i T(1, t) \quad (\text{A2.1c})$$

$$T(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A2.1d})$$

Donde la excitación  $F(t)$  es la que se representa en la figura A2.2:

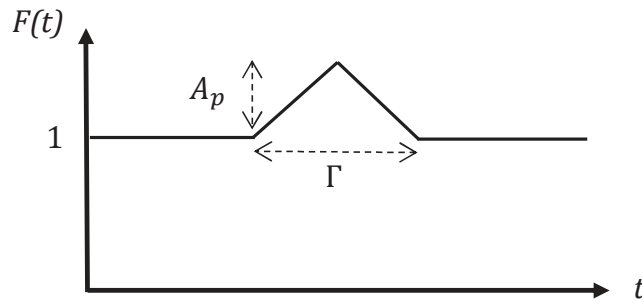


Figura A2.2. Perfil de la excitación

La técnica basada en el teorema de Duhamel permite abordar problemas directos en los que alguna de las condiciones de contorno es función del tiempo. El método solo es aplicable a sistemas lineales, ya que se basa en el principio de superposición.

Con esta técnica, la solución a una determinada excitación  $F(t)$  es obtenida a partir de una transformación integral de la solución del problema fundamental  $u(x, t)$ .

Para poder aplicar el método de Duhamel, el sistema se debe encontrar inicialmente a temperatura nula (formulación adimensional) y estar totalmente homogéneo. La excitación (condición de contorno A2.1b) solo puede ser función del tiempo, no de la posición.

Dada una excitación  $F(t)$ , el teorema de Duhamel establece que la solución al campo de temperatura  $T(x, t)$  viene dada por:

$$T(x, t) = \int_0^t u(x, t - \tau) \frac{dF(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (\text{A2.2})$$

La solución del problema fundamental  $u(x, t)$  se corresponde con la solución del mismo sistema para el caso en el que la excitación es una función escalón unitario. Esta solución se obtuvo en el Anexo 1.

La esencia del teorema de Duhamel es el principio de superposición, es decir, la solución  $T(x, t)$  se construye mediante la adición de soluciones parciales. Para comprobar esto, podemos aproximar la expresión A2.2 como un sumatorio de  $M$  segmentos de amplitud  $\Delta\tau$ .

$$T(x, t) \approx \sum_{i=1}^M u(x, t - \tau_i) \Delta F(\tau_i) \quad (\text{A2.3})$$

Donde  $\tau_i = i \cdot \Delta\tau$  y  $\Delta F(\tau_i)$  representa la magnitud del cambio de  $F(t)$  en el instante  $\tau_i$ .

Puesto que la respuesta fundamental  $u(x, t)$  representa la respuesta del sistema en el instante  $t$  a un escalón unitario en  $x=0$ , el producto  $u(x, t - \tau_i) \Delta F(\tau_i)$  representa la respuesta del sistema en el instante  $t - \tau_i$  a un escalón de amplitud  $\Delta F(\tau_i)$  en el instante  $t = \tau_i$ .

De acuerdo con esto, el sumatorio de la expresión A2.3 puede interpretarse como la superposición de una multitud de escalones infinitesimales que se suceden en el tiempo. En el límite, cuando  $\Delta\tau \rightarrow 0$  y  $M \rightarrow \infty$  se obtiene la expresión integral A2.2.

En el caso de nuestro problema, hay que prestar especial atención a la hora de utilizar la expresión A2.2, ya que como se observa en la figura A2.3, la excitación  $F(t)$  presenta discontinuidades en su derivada temporal. Para poder manejar esta situación, se divide el dominio de la excitación  $F(t)$  en cuatro intervalos.

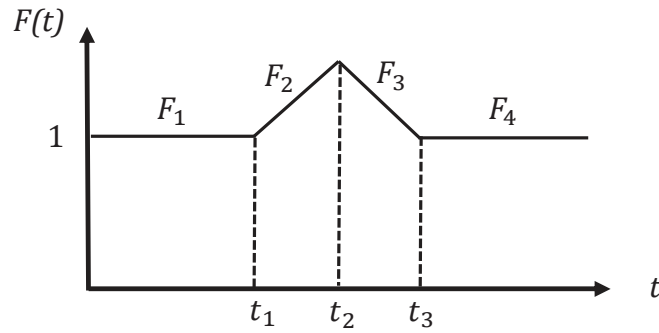


Figura A2.3. Dominio de las funciones  $F_i$

En estos casos, la forma integral A2.2 del teorema de Duhamel puede ponerse [29]:

$$T(x, t) = \Delta F_0 u(x, t) + \sum_{i=1}^M \left( \Delta F_i u(x, t - t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(x, t - \tau) \frac{dF_i}{d\tau} d\tau \right) + \int_{t_M}^t u(x, t - \tau) \frac{dF_{M+1}}{d\tau} d\tau \quad (\text{A2.4})$$

Donde:

$$\Delta F_0 = F_1(t \rightarrow 0) = 1 \quad (\text{A2.5a})$$

$$\Delta F_1 = F_2(t \rightarrow t_1) - F_1(t_1) = 0 \quad (\text{A2.5b})$$

$$\Delta F_2 = F_3(t \rightarrow t_2) - F_2(t_2) = 0 \quad (\text{A2.5c})$$

$$\Delta F_3 = F_4(t \rightarrow t_3) - F_3(t_3) = 0 \quad (\text{A2.5d})$$

Siendo:

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \frac{\Gamma}{2} \quad (\text{A2.6})$$

De acuerdo con la figura A2.3 se tiene:

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{dF_4}{dt} = 0 \quad (\text{A2.7a})$$

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{2A_p}{\Gamma} \quad (\text{A2.7b})$$

$$\frac{dF_3}{dt} = -\frac{2A_p}{\Gamma} \quad (\text{A2.7c})$$

De acuerdo con la expresión (A2.4), para instantes de tiempo tales que  $t \leq t_1$ , el campo de temperatura viene dado por:

$$T(x, t) = \Delta F_0 u(x, t) = 1 \cdot u(x, t) = u(x, t) \quad (\text{A2.8})$$

Siendo  $u(x, t)$  la solución fundamental obtenida en el Anexo 1:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\beta_m x) \cdot e^{-\beta_m^2 t} - x + 1 + \frac{1}{B_i} \quad (\text{A2.9})$$

Donde los coeficientes  $c_m$  vienen dados por:

$$c_m = \frac{2(\beta_m^2 + B_i^2)}{\beta_m^2 + B_i^2 + B_i} \left[ -\frac{1}{B_i \beta_m} \text{sen} \beta_m + \frac{\cos \beta_m - 1}{\beta_m^2} \right] \quad (\text{A1.16})$$

Para instantes de tiempo tales que  $t_1 \leq t \leq t_2$  se tiene:

$$T(x, t) = \Delta F_0 u(x, t) + \Delta F_1 u(x, t - t_1) + \int_0^{t_1} u(x, t - \tau) \frac{dF_1}{d\tau} d\tau + \int_{t_1}^t u(x, t - \tau) \frac{dF_2}{d\tau} d\tau \quad (\text{A2.10})$$

De acuerdo con A2.5b y A2.7a, el segundo y tercer término de A2.10 son nulos.

Teniendo en cuenta ahora A2.7b, la expresión A2.10 queda finalmente:

$$T(x, t) = \Delta F_0 u(x, t) + \int_{t_1}^t u(x, t - \tau) \frac{dF_2}{d\tau} d\tau = u(x, t) + \frac{2A_p}{\Gamma} \int_{t_1}^t u(x, t - \tau) d\tau \quad (\text{A2.11a})$$

Donde de acuerdo con A2.9, el término integral viene dado por:

$$\int_{t_1}^t u(x, t - \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m^2} \cos(\beta_m x) \cdot (1 - e^{-\beta_m^2(t-t_1)}) + (-x + 1 + \frac{1}{B_i})(t - t_1) \quad (\text{A2.11b})$$

Para instantes  $t_2 \leq t \leq t_3$ , se tiene:

$$T(x, t) = u(x, t) + \frac{2A_p}{\Gamma} \int_{t_1}^{t_2} u(x, t - \tau) d\tau + \Delta F_2 u(x, t - t_2) + \int_{t_2}^t u(x, t - \tau) \frac{dF_3}{d\tau} d\tau \quad (\text{A2.13})$$

De acuerdo con A2.5c y A2.7c la expresión anterior queda:

$$T(x, t) = u(x, t) + \frac{2A_p}{\Gamma} \int_{t_1}^{t_2} u(x, t - \tau) d\tau - \frac{2A_p}{\Gamma} \int_{t_2}^t u(x, t - \tau) d\tau \quad (\text{A2.13a})$$

Donde los términos integrales vienen dados por:

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x, t - \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m^2} \cos(\beta_m x) \cdot (1 - e^{-\beta_m^2(t_2-t_1)}) + (-x + 1 + \frac{1}{B_i})(t_2 - t_1) \quad (\text{A2.13b})$$

$$\int_{t_2}^t u(x, t - \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m^2} \cos(\beta_m x) \cdot (1 - e^{-\beta_m^2(t-t_2)}) + (-x + 1 + \frac{1}{B_i})(t - t_2) \quad (\text{A2.13c})$$

Finalmente, para los instantes de tiempo tales que  $t_3 \leq t$  se obtiene:

$$T(x, t) = u(x, t) + \frac{2A_p}{\Gamma} \left( \int_{t_1}^{t_2} u(x, t - \tau) d\tau - \int_{t_2}^{t_3} u(x, t - \tau) d\tau \right) + \int_{t_3}^t u(x, t - \tau) \frac{dF_4}{d\tau} d\tau \quad (\text{A2.14})$$

Expresión, que teniendo en cuenta A2.7a queda:

$$T(x, t) = u(x, t) + \frac{2A_p}{\Gamma} \left( \int_{t_1}^{t_2} u(x, t - \tau) d\tau - \int_{t_2}^{t_3} u(x, t - \tau) d\tau \right) \quad (\text{A2.15a})$$

Donde los términos integrales vienen dados por:

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x, t - \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m^2} \cos(\beta_m x) \cdot (1 - e^{-\beta_m^2(t_2-t_1)}) + \left(-x + 1 + \frac{1}{B_i}\right)(t_2 - t_1) \quad (\text{A2.15b})$$

$$\int_{t_2}^{t_3} u(x, t - \tau) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\beta_m^2} \cos(\beta_m x) \cdot (1 - e^{-\beta_m^2(t_3-t_2)}) + \left(-x + 1 + \frac{1}{B_i}\right)(t_3 - t_2) \quad (\text{A2.15c})$$

En la figura siguiente se representa el campo de temperaturas adimensional  $T(x, t)$  para diferentes valores de  $x$ . Se ha considerado  $A_p=0.15$ ,  $\Gamma=600$  y  $B_i=0.25$ .

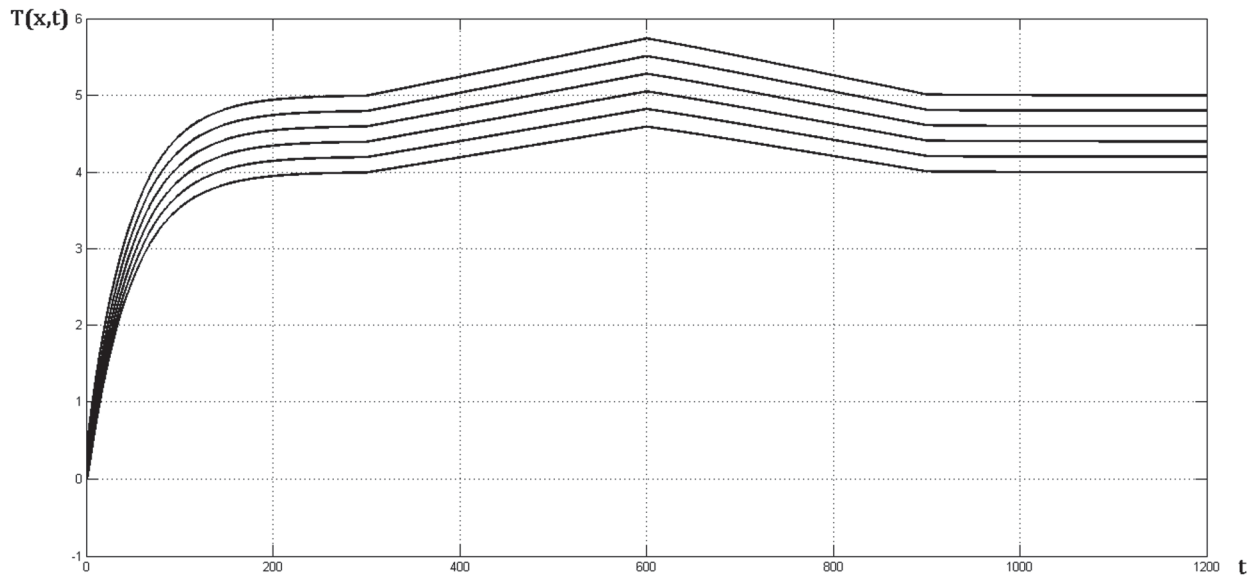


Figura A2.4. Familia de curvas  $T(x, t)$  para escalón unitario de flujo con perturbación



## Anexo 3

### Escalón unitario de temperatura en coordenadas cilíndricas

En este anexo se obtiene la respuesta fundamental equivalente a la que se obtuvo en el apartado 3.3.1, pero para el caso en el que el problema inverso se plantea en coordenadas cilíndricas.

El problema directo formulado dimensionalmente viene dado por:

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'}{\partial r'} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad r_1 \leq r' \leq r_2 \quad (\text{A3.1a})$$

$$k \left. \frac{\partial T'}{\partial r'} \right|_{r_1} = h[(T'(r_1, t') - T_\infty)] \quad (\text{A3.1b})$$

$$T'(r_2, t') = T_s \quad (\text{A3.1c})$$

$$T'(r', 0) = T_\infty \quad r_1 \leq r' \leq r_2 \quad (\text{A3.1d})$$

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son los radios interior y exterior del tubo respectivamente y  $T_s$  la temperatura impuesta en la superficie exterior del tubo. El resto de parámetros se nota de acuerdo con la nomenclatura utilizada en la tesis.

A continuación se definen las siguientes variables adimensionales:

$$T = \frac{T' - T_\infty}{T_s - T_\infty} \quad r = \frac{r'}{(r_2 - r_1)} \quad t = \frac{\alpha t'}{(r_2 - r_1)^2} \quad B_i = \frac{hL}{k} \quad (\text{A3.2})$$

Por lo que la formulación adimensional del problema directo viene dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad a \leq r \leq b \quad (\text{A3.3a})$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} = B_i T(a, t) \quad (\text{A3.3b})$$

$$T(b, t) = 1 \quad (\text{A3.3c})$$

$$T(r, 0) = 0 \quad a \leq r \leq b \quad (\text{A3.3d})$$

Donde  $a = r_1/(r_2 - r_1)$  y  $b = r_2/(r_2 - r_1)$ .

En la figura siguiente se representa el problema adimensional equivalente.

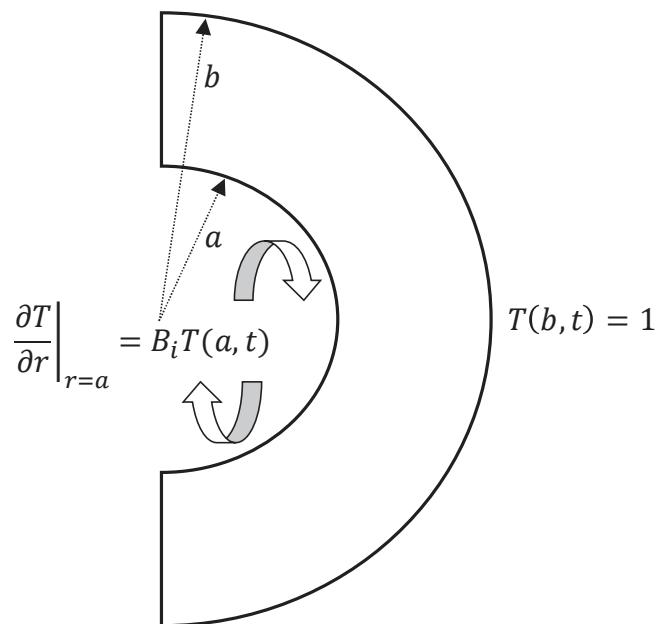


Figura A3.1. Esquema del escalón unitario de temperatura en cilíndricas

Teniendo en cuenta la física del problema, se ensaya una solución que sea superposición de una función estacionaria y otra transitoria.

$$T(r, t) = s(r) + w(r, t) \quad (\text{A3.4})$$

La función estacionaria  $s(r)$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds}{dr} = 0 \quad (\text{A3.5a})$$

$$\left. \frac{ds}{dr} \right|_{r=a} = B_i s(a) \quad (\text{A3.5b})$$

$$s(b) = 1 \quad (\text{A3.5c})$$

Cuya solución es trivial y viene dada por:

$$s(r) = 1 + \frac{aB_i}{1 - aB_i \ln \frac{a}{b}} \cdot \ln \frac{r}{b} \quad (\text{A3.6})$$

La solución transitoria  $w(r, t)$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{A3.7a})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=a} = B_i w(a, t) \quad (\text{A3.7b})$$

$$w(b, t) = 0 \quad (\text{A3.7c})$$

$$w(r, 0) = -s(r) \quad a \leq r \leq b \quad (\text{A3.7d})$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por el método de separación de variables (SOV), para lo cual se ensaya una solución del tipo:

$$w(r, t) = \phi(r) \cdot \Gamma(t) \quad \text{con} \quad \Gamma(t) = C \cdot e^{-\beta^2 t} \quad (\text{A3.8})$$

Donde  $R(r)$  satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \beta^2 \phi = 0 \quad (\text{A3.9a})$$

$$\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=a} = B_i \phi(a) \quad (\text{A3.9b})$$

$$\phi(b) = 0 \quad (\text{A3.9c})$$

Ecuación cuya forma es la de ecuación diferencial de Bessel de orden cero y que tiene como solución general:

$$\phi(\beta r) = A \cdot J_0(\beta r) + B \cdot Y_0(\beta r) \quad (\text{A3.10})$$

Siendo  $J_0$  e  $Y_0$  las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda clase respectivamente.

Si se aplica la condición de contorno (A3.9c) se obtiene:

$$A \cdot J_0(\beta b) + B \cdot Y_0(\beta b) = 0 \quad (\text{A3.11})$$

Por lo que se tiene:

$$B = -A \cdot \frac{J_0(\beta b)}{Y_0(\beta b)} \quad (\text{A3.12})$$

De acuerdo con el resultado anterior, (A3.10) puede ponerse:

$$\phi(\beta r) = \frac{A}{Y_0(\beta b)} \cdot [J_0(\beta r)Y_0(\beta b) - J_0(\beta b)Y_0(\beta r)] \quad (\text{A3.13})$$

Si a continuación se aplica la condición de contorno (A3.9b) se obtiene:

$$\beta \cdot [J_0(\beta b)Y_1(\beta a) - J_1(\beta a)Y_0(\beta b)] = B_i \cdot [J_0(\beta a)Y_0(\beta b) - J_0(\beta b)Y_0(\beta a)] \quad (\text{A3.14})$$

Expresión para la cual se ha tenido en cuenta la siguiente relación entre las funciones de Bessel de orden cero y orden uno.

$$J'_0(z) = -J_1(z) \quad (\text{A3.15a})$$

$$Y'_0(z) = -Y_1(z) \quad (\text{A3.15b})$$

Por tanto, la forma general de  $w(r, t)$  viene dada por:

$$w(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(\beta_m r) e^{-\beta_m^2 t} \quad (\text{A3.16})$$

Donde  $\beta_m$  son los autovalores de la ecuación trascendente (A3.14) y los  $\phi_m$  vienen dados por la expresión:

$$\phi_m(\beta_m r) = [J_0(\beta_m r)Y_0(\beta_m b) - J_0(\beta_m b)Y_0(\beta_m r)] \quad (\text{A3.17})$$

Para calcular los coeficientes  $c_m$  de la expresión (A3.16) se aplica la condición inicial (A3.7d):

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(\beta_m r) = -s(r) \quad (\text{A3.18})$$

Aplicando el operador  $\int_a^b r \phi_m(\beta_m r) dr$  a ambos miembros de la expresión anterior y teniendo en cuenta la condición de ortogonalidad  $\int_a^b r \phi_m(\beta_m r) \phi_n(\beta_n r) dr = \delta_{m,n} \int_a^b r \phi_m^2(\beta_m r) dr$  se obtienen los coeficientes  $c_m$ :

$$c_m = \frac{\int_a^b -s(r) \phi_m(\beta_m r) r dr}{\int_a^b \phi_m^2(\beta_m r) r dr} \quad (\text{A3.19})$$

A continuación, procederemos a resolver las integrales del numerador y denominador de la expresión (A3.19).

La integral del numerador se resuelve por partes:

$$\int_a^b -s(r) \phi_m(\beta_m r) r dr = \frac{1}{\beta_m^2} [rs(r) \phi_m'(\beta_m r)|_a^b - rs'(r) \phi_m(\beta_m r)|_a^b] \quad (\text{A3.20})$$

Obteniéndose:

$$\int_a^b -s(r) \phi_m(\beta_m r) r dr = \frac{b}{\beta_m} [J_0(\beta_m b) Y_1(\beta_m b) - J_1(\beta_m b) Y_0(\beta_m b)] \quad (\text{A3.21})$$

Para la integral del denominador se utiliza la expresión 11.4.2 de [39], que para el caso de funciones de Bessel de orden cero queda:

$$\int_a^b \phi_m^2(\beta_m r) r dr = \left\{ \frac{r^2}{2} [\phi_m^2(\beta_m r) + \phi_m'^2(\beta_m r)] \right\}_a^b \quad (\text{A3.22})$$

Obteniéndose:

$$\int_a^b \phi_m^2(\beta_m r) r dr = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{\pi^2 \beta_m^2} - a^2 \left( 1 + \frac{B_i^2}{\beta_m^2} \right) [J_0(\beta_m a) Y_0(\beta_m b) - J_0(\beta_m b) Y_0(\beta_m a)] \right\} \quad (\text{A3.23})$$

Finalmente, recopilando los resultados anteriores se obtiene la siguiente solución del problema directo:

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(\beta_m r) e^{-\beta_m^2 t} + 1 + \frac{aB_i}{1 - aB_i \ln \frac{a}{b}} \cdot \ln \frac{r}{b} \quad (\text{A3.24a})$$

Donde las funciones  $\phi_m$  vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\phi_m(\beta_m r) = [J_0(\beta_m r)Y_0(\beta_m b) - J_0(\beta_m b)Y_0(\beta_m r)] \quad (\text{A3.24b})$$

Y los coeficientes  $c_m$  por:

$$c_m = \frac{\frac{b}{\beta_m} [J_0(\beta_m b)Y_1(\beta_m b) - J_1(\beta_m b)Y_0(\beta_m b)]}{\frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{\pi^2 \beta_m^2} - a^2 \left( 1 + \frac{B_i^2}{\beta_m^2} \right) [J_0(\beta_m a)Y_0(\beta_m b) - J_0(\beta_m b)Y_0(\beta_m a)] \right\}} \quad (\text{A3.24c})$$

En la gráfica siguiente se representa el campo de temperatura adimensional  $T(r, t)$  para diferentes instantes de tiempo. Se considera  $B_i=0.25$ .

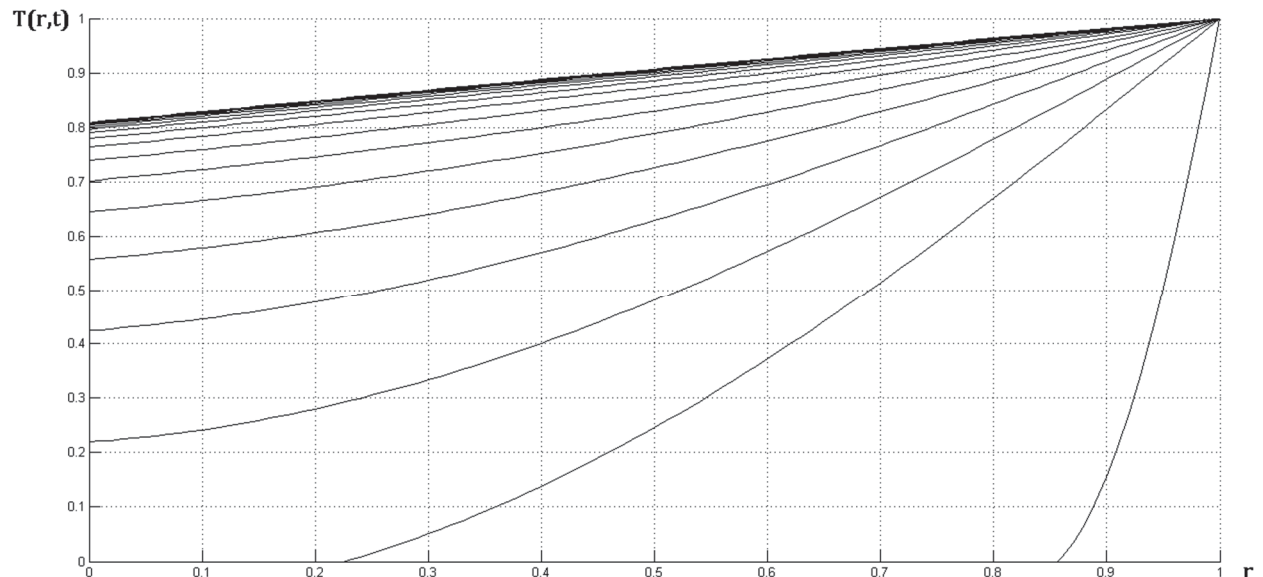


Figura A3.2. Familia de curvas  $T(r, t)$  para escalón unitario de temperatura



## Anexo 4

### **Artículo publicado**

El formalismo matemático desarrollado en esta tesis ha sido publicado en la revista *Heat Transfer Engineering* con el título “*A Hybrid Procedure for the Sequential Estimation of Surface Heat Flux From Measurements of Surface Temperature*”.

En la página siguiente se reproduce la portada de dicho artículo.

*Heat Transfer Engineering*, 37(16):1325–1340, 2016  
 Copyright © Taylor and Francis Group, LLC  
 ISSN: 0145-7632 print / 1521-0537 online  
 DOI: 10.1080/01457632.2016.1133987



# A Hybrid Procedure for the Sequential Estimation of Surface Heat Flux From Measurements of Surface Temperature

JOSÉ M. GUTIÉRREZ,<sup>1</sup> JOSÉ M. AGUADO TEIXE,<sup>2</sup> JUAN A. MARTÍN,<sup>3</sup>  
 and PALOMA R. CUBILLAS<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Physics, University of Cádiz, Cádiz, Spain

<sup>2</sup>Energy Manager and Process Optimization Engineer, CEPESA, Cádiz, Spain

<sup>3</sup>Department of Electrical Engineering, University of Cádiz, Cádiz, Spain

<sup>4</sup>Department of Thermal Engineering, University of Cádiz, Cádiz, Spain

*The sequential estimation of surface heat flux from discrete and noisy data of surface temperature is an ill-posed problem. From Duhamel's theorem and Fourier's law and using a stabilization technique based on the sequential application of the ordinary least squares (SOLS), we obtain a relatively simple but effective method. As the SOLS method uses a least squares fit over  $r$ -future and  $r$ -past temperatures, this method can be compared with the well-known function specification method (FSM). FSM is a more general method, but the numerical validations considered in this study reveal that the SOLS method gives better results. It is also shown that SOLS cannot be guided by the residual principle and consequently cannot be used in a practical scope. The ultimate goal of this study is to obtain a reliable estimation of heat flux history in an on-line industrial process where the tuneable parameter should be a time-variable  $r$ -value and it must be automatically updated from the experimental data. This requires that (i) the corresponding SOLS algorithm must be rewritten in recursive form, (ii) the classical definition of the residual principle is rewritten in recursive form, and (iii) the estimates are obtained from a hybrid procedure based on SOLS and FSM.*

## INTRODUCTION

The most known concept of the inverse heat conduction problem (IHCP) relates to the estimation of an unknown function, such as surface heat flux and/or surface temperature histories, from transient measurements provided by remote temperature sensors placed at interior locations [1]. The main difficulty of this problem is instability. From a mathematical point of view, the IHCP leads to an ill-posed problem, where small perturbations in the measured data (due to the unavoidable measurement errors) may cause great oscillations in the estimated function. This difficulty is related to a low sensitivity of the response with respect to the parameters of the unknown input. This is due to

the diffusive nature of heat flow, so that the thermal response at some distance from boundary is damped and lagged with respect to the active input at the boundary. Many and different methods can be applied in order to get a stable estimation. Among the classic methods the following can be mentioned: Tikhonov regularization [2], iterative regularization [3], mollification [4], and the function specification method (FSM) [1]. Many applications have been resolved on the basis of classical methods [5–7], and many theoretical contributions consider combinations, modifications, and comparisons of the classical methods [8–11].

On the other hand, there are other procedures that have been used in other applications (economics, signal processing, image reconstruction, etc.), and have also been applied successfully to IHCP in order to get a stable estimation. In this frame, the well-known Kalman filtering technique [12] has been used to resolve linear and nonlinear IHCP [13, 14]. The use of an artificial neural network (ANN) has also been considered in IHCP [15].

Address correspondence to Professor J. M. Gutiérrez, Departamento de Física Aplicada, Escuela Politécnica Superior de Algeciras, Avda. Ramón Puyol, s/n. 11202 Algeciras (Cádiz), Spain. E-mail: josemaria.gutierrez@uca.es

## Bibliografía

- [1] Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. J.V. Beck, B. Blackwell, C.R. St. Clair Jr. Wiley-Interscience. 1985.
- [2] Solution of Ill-Posed Problems. A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. V.H. Winston & Sons. 1977.
- [3] Inverse Heat Transfer Problems. O.M. Alifanov. Springer. 1994.
- [4] The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems. D.A. Murio. Wiley-Interscience. 1993.
- [5] Inverse Heat Conduction Problem of Estimating Time-Varying Heat Transfer Coefficient. J. Su, G.F. Hewitt. Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 45, pp. 777-789. 2004.
- [6] Experimental Design and Methodology for Estimation of Local Heat Transfer Coefficient in Jet Impingement Using Transient Inverse Heat Conduction Problem. S.H. Sagheby, F. Kowsary. Experimental Heat Transfer, vol. 22, pp. 300-315. 2009.

- 
- [7] A Study of Intermittent Spray Cooling Process Through Application of a Sequential Function Specification Method. S. Somasundaram, A.O. Tay. *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 20, pp. 553-569. 2012.
- [8] Solution of the Inverse Heat Conduction Problem With a Time-Variable Number of Future Temperatures. G. Blanc, J.V. Beck, M. Raynaud. *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 32, pp. 437-451. 1997.
- [9] Comparison of Some Inverse Heat Conduction Methods Using Experimental Data. J.V. Beck, B. Blackwell, A. Haji-Sheikh. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 39, pp. 3469-3657, 1996.
- [10] Comparison of Two Procedures for the Estimation of Surface Temperature History Using Function Specification Method. A. Corz, J.M. Gutiérrez, J.A. Martín. *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 126, pp. 475-479. 2004.
- [11] Estimation Metrics and Optimal Regularization in a Tikhonov Digital Filter for the Inverse Heat Conduction Problem. K.A. Woodbury, J.V. Beck. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 62, pp. 31-39. 2013.
- [12] A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. R.E. Kalman. *ASME Journal of Basic Engineering Physics*, vol. 82, pp. 35-45. 1960.
- [13] Identification of Time-Variable Coefficients of Heat Transfer by Solving a Nonlinear Inverse Problem of Heat Conduction. Y.M. Matsevityi, V.A. Maliarenko, A.V. Multanovskii. *Journal of Engineering Physics*, vol. 35, pp. 1094-1098. 1979.
- [14] An Inversion Approach for the Inverse Heat Conduction Problems. H. Li, Q. Lei, Q. Liu. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, pp. 4442-4452. 2012.
- [15] Non Iterative Estimation of the Heat Transfer Coefficients Using Artificial Neural Networks Models. S.S. Sablani, A. Kacimov, J. Perret, A.S. Mujumdar, A. Campo. *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 48, pp. 665-679, 2005.

[16] Solution to Inverse Heat Conduction Problems Employing Singular Value Decomposition and Model-Reduction. J.R. Shenefelt, R. Luck, R.P. Taylor, J.T. Berry. *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 45, pp. 67-74, 2002.

[17] A Sequential Algorithm of Inverse Heat Conduction Problems Using Singular Value Decomposition. J.M. Gutiérrez, J.A. Martín, A. Corz. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 44, pp. 235-244. 2005.

[18] Two Dimensional Non-Linear Inverse Heat Conduction Problem Based on the Singular Value Decomposition. J.A. Martín, J.M. Gutiérrez, A. Corz. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 48, pp. 1081-1093. 2009.

[19] Automatic Numerical Differentiation by Discrete Mollification. D.A. Murio. *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 13, pp. 381-386. 1987.

[20] *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*. G.E. Myers. McGraw-Hill. 1971.

[21] *Heat Conduction*. M.N. Özisik. Wiley-Interscience. 1993.

[22] Redundant Data, Future Times and Sensor Location in the IHCP: A Case Study. K.A. Woodbury, S.K. Thakar. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, vol. 2, pp. 319-333. 1996.

[23] Combined Function Specification-Regularization Procedure for Solution of Inverse Heat Conduction Problem. J.V. Beck, D.A. Murio. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, vol. 24, pp. 180-185. 1986.

[24] Combined Mollification-Future Temperatures Procedure for Solution of Inverse Heat Conduction Problem. D.A. Murio, J.R. Paloschi. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 23, pp. 235-244. 1988.

[25] An Analysis of Two-Dimensional Linear Inverse Heat Transfer Problem Using an Integral Method. N. Zabararas, J.C. Liu. *Numerical Heat Transfer*, vol. 13, pp. 527-533. 1990.

- 
- [26] Inverse Heat Conduction Problem of Determining Time-Dependent Heat Transfer Coefficient. S. Chantasiriwan. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 4275-4285. 2000.
- [27] A Temperature-Based Sequential Function Specification Algorithm for the IHCP. K.A. Woodbury, X. Jin. ASME. 1995.
- [28] Conduction Heat Transfer. Notes for MECH 7210. D. W. Mackowski. Mechanical Engineering Department. Auburn University.
- [29] Inverse Heat Transfer. M. N. Özisik, H.R.B. Orlande. Taylor & Francis. 2000.
- [30] Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems. J. Taler, P. Duda. Springer. 2006.
- [31] Handbook of Numerical Heat Transfer. W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, G.E. Schneider, R.H. Pletcher. John Wiley & Sons. 1988.
- [32] Parameter Estimation in Engineering and Science. J.V. Beck, K.J. Arnold. John Wiley & Sons. 1977.
- [33] Aplicación del Problema Inverso de Conducción de Calor a la Estimación de la Temperatura Superficial Interior de Cucharas de Traspase de Acero Líquido en Acerías. J.A. Martín García. Tesis doctoral UCA. 2003.
- [34] A Method of Determining Local Heat Flux in Boiler Furnaces. J. Taler. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 35, pp. 1625-1634. 1992.
- [35] Conduction Heat Transfer. P.J. Schneider. Addison-Wesley. 1957.
- [36] Conduction of Heat in Solids. H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. Oxford Science Publications. 2008.
- [37] Una Introducción a los Métodos Numéricos en Conducción de Calor. F.J. González, J.M. Gutiérrez Cabeza. Servicio de Publicaciones UCA. 2001.

- 
- [38] Fundamentos de Transferencia de Calor. F.P. Incropera, D.P. De Witt. Prentice Hall. 1999.
- [39] Handbook of Mathematical Functions. M. Abramowitz, I.A. Stegun. Dover Publications. 1972.
- [40] A Treatise on the Theory of Bessel Functions (1922). Merchant Books. 2008.
- [41] Análisis Matemático III, Tomo II. M. Valdivia. Universidad Nacional de Educación a Distancia. 1998.
- [42] Optimisation of Energy Consumption. F. Rikhtegar, S. Sadighi. Petroleum Technology Quarterly. Q2 2015.
- [43] Petroleum Refining. P. Trambouze. Editions TECHNIP. 2000.
- [44] Generalized Methods Predicts Fired-Heater Performance. N. Wimpress. Chemical Engineering. May 1978.
- [45] Rating Fired Heaters. R.N. Wimpress. Hydrocarbon Processing & Petroleum Refiner. October 1963.
- [46] Fired Heaters-I. Finding the Basic Design for your Application. H.L. Berman. Chemical Engineering. June 1978.
- [47] Fired Heaters-III. How Combustion Conditions Influence Design and Operation. H.L. Berman. Chemical Engineering. August 1978.
- [48] Rethink Specifications for Fired Heaters. K. Malhotra. Hydrocarbon Processing. October 2015.
- [49] Heat Flux and Film Temperature in Fired, Thermal-Fluid Heaters. R.G. Pelini. Chemical Engineering. December 2008.

- 
- [50] API Standard 530: Calculation of Heater Tube Thickness in Petroleum Refineries. Sixth edition. September 2008.
- [51] Why Vacuum Unit Fired Heaters Coke? T. Barletta. Petroleum Technology Quarterly. Q3 2001.
- [52] Vacuum Unit Fired Heater Coking – Avoid Unscheduled Shutdowns. G.G. Martin, T. Barletta. Petroleum Technology Quarterly. Q2 2001.
- [53] Conditions Influencing Coke Formation. T. Barletta. Petroleum Technology Quarterly. Revamps & Operations. 2004.
- [54] Decrease Tube Metal Temperature in Vacuum Heaters. S. Roy, E. Bright, V. Ramaseshan. Hydrocarbon Processing. January 2014.
- [55] Controlling Film Temperature in Fired Heaters. J. Jiao, Y. Morayko, M. Theilgaard, M. Ho. Petroleum Technology Quarterly. Q1 2013.
- [56] CFD Technique to Calculate Tube Skin Peak Temperatures in Refinery Furnaces. F.A. Díaz, J.A. Castro. Ciencia, Tecnología y Futuro. November 2011.
- [57] Ethylene Furnace Heat Flux Correlations. J. Colannino. Petroleum Technology Quarterly. Q1 2008.
- [58] Minimize Furnace Tubes Carburization. J.M. Aguado Teixe. Hydrocarbon Processing. September 2006.
- [59] Achieve Uniform Heat Flux in a Coker Furnace. A. Gupta, R.C. Patil, V.P. Mishra, A.K. Das. Hydrocarbon Processing. August 2013.
- [60] Fine-Tune Cracking Efficiencies for Larger Olefins Crackers. Z. Yue, C.W. Zheng. Hydrocarbon Processing. April 2006.

- 
- [61] Advances in Delayed Coking Heat Transfer Equipment. K.A. Catala, M.S. Karrs, G. Sieli. Hydrocarbon Processing. February 2009.
- [62] Use Computational Fluid Dynamic Analysis to Revamp Fired Heaters. A. Chilka, A. Garg. Hydrocarbon Processing. May 2016.
- [63] Combustion Hot Spot Analysis for Fired Process Heaters. E. Talmor. Gulf Publishing Company. 1982.
- [64] Evaluation of Radiant Heat Absorption Rates in Tubular Heaters. L.A. Mekler, R.S. Fairall. Petroleum Refiner. 1952.
- [65] Industrial and Process Furnaces. Principles, Design and Operation. P. Mullinger, B. Jenkins. Elsevier. 2008.
- [66] Heat Transfer in Industrial Combustion. C.E. Baukal Jr. CRC Press. 2000.
- [67] The John Zink Combustion Handbook. C.E. Baukal Jr. CRC Press. 2001.
- [68] El Petróleo: Refino y Tratamiento Químico, Tomo II. P. Wuithier. Ediciones CEPESA. 1971.
- [69] The Science of Flames and Furnaces. M.W. Thring. Chapman & Hall. 1962.
- [70] Flow, Mixing and Heat Transfer in Furnaces. K.H. Khalil. Pergamon Press. 1978.
- [71] The Flow of Heat Through Furnace Walls. W.T. Ray, H. Kreisinger. Department of the Interior Bureau of Mines. 1912.
- [72] Mathematical Model for Refinery Furnaces Simulation. Fabian-A. Díaz-Mateus, Jesús-A. Castro-Gualdrón. Ciencia, Tecnología y Futuro. June 2010.
- [73] Modeling in Chemical Engineering. Octave Levenspiel. Pergamon Chemical Engineering Science. 2002.

- 
- [74] Simulation of Heat Transfer in the Convection Section of Fired Heaters. Hassan Al-Haj Ibrahim, Mourhaf Al-Qassimi. Periodica Polytechnica Chemical Engineering. 2009.
- [75] Dynamics and Control of a Gas-Fired Furnace. B. Roffal, J.E. Rijnsdorp. Chemical Engineering Science. 1974.
- [76] Aspen HYSYS Thermodynamics COM. Reference Guide. Version number: V8.8. May 2015.
- [77] MTL830 Series. Multiplexer for Zone 0 Hazardous Area Applications. EPS830 RevF 170510.
- [78] Uncertainty Analysis of Thermocouple Measurements Used in Normal and Abnormal Thermal Environment Experiments at Sandia's Radiant Heat Facility and Lurance Canyon Burn Site. James T. Nakos. April 2004.
- [79] Instrumentación Eléctrica y Sistemas de Medida. B.A. Gregory. Editorial Gustavo Gili, S.A. 1984.
- [80] Sensores y Analizadores. H.N. Norton. Editorial Gustavo Gili, S.A. 1984.
- [81] El Uso de Termopares. Hoja técnica WIKA IN 00.23. 03/2014.
- [82] Fired Heaters-IV How to Reduce your Fuel Bill. H. L. Berman. Chemical Engineering. September 1978.
- [83] Time for Forced Draft Burners? C.K. McCracken. Hydrocarbon Processing. February 1977.
- [84] Is your Facility Operating Energy Efficiently? B.S. Gill. Hydrocarbon Processing. May 2008.
- [85] Ethylene Cracking Furnaces Influence Burner Design. R. Martin. Petroleum Technology Quarterly. Q2 2007.

- 
- [86] Useful Tips for Fired Heater Optimization. N. Bishop, B. Hamilton. Petroleum Technology Quarterly. Q2 2012.
- [87] Improve the Operation of Fired Heaters. K. Malhotra. Hydrocarbon Processing. March 2015.
- [88] Fired Heater Rating. P.G. Talavera. Hydrocarbon Processing. July 2000.
- [89] Typical Fired Heater Problems and Root Causes. S. Patel. Hydrocarbon Processing. March 2007.
- [90] Identify and Control Excess Air from Process Heaters. S. Ahamad, R. Vallavanatt. Hydrocarbon Processing. October 2012.
- [91] Understand the Secrets of Fired Heaters Tuning. K. Vinayagam. Hydrocarbon Processing. October 2007.
- [92] Process Burner Spacing. M. Fleifil, M. Lorra, C.E. Baukal, J.A. Lewallen, D.E. Wright. Petroleum Technology Quarterly. Q2 2006.
- [93] Flame Interaction and Rollover Solutions in Ethylene Cracking Furnaces. R.K. Isaacs. Petroleum Technology Quarterly Gas. 2013.
- [94] Diagnostic Tools and Control Parameters for Refinery Heaters. Y. Aktas, H. Oguz, G. Aksu, D. Uzun, M. Sever. Petroleum Technology Quarterly. Q2 2013.
- [95] Optimizing O<sub>2</sub> Levels in Fired Heaters. S. Patel. Hydrocarbon Processing. May 2006.
- [96] Successfully Design Fired Heaters Using Ultra-low NO<sub>x</sub> Burners. S. Ahamad. Hydrocarbon Processing. January 2013.

