

INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA DE COSTAS

1. Ondas regulares

Juan José Muñoz Pérez

PRÓLOGO

Pronto se cumplirán 20 años desde mis primeras clases en la Facultad de Ciencias del Mar de la Universidad de Cádiz. Por aquel entonces, los catedráticos Luis Tejedor y Paco López Aguayo decidieron asignar la docencia de la asignatura de Ingeniería de Costas a un joven ingeniero de caminos del Estado. Siempre les estaré agradecido por la confianza que me mostraron al principio, al permitirme acceder al gratificante mundo de la enseñanza, y por la desinteresada amistad con que me honraron después.

La pretensión de este libro es de convertirse en algo práctico, con poca teoría y muchos ejercicios resueltos que intenten clarificar los conceptos básicos precisos para entender los rudimentos de la ingeniería de Costas. En algunos casos, se incluyen incluso las herramientas matemáticas necesarias, aspecto éste imprescindible hoy en día en que no se exige un bagaje físico-matemático mínimo para matricularse de algunas carreras de ciencias. Pese a no profundizarse en los desarrollos teóricos, la experiencia ha demostrado que los alumnos interesados tienen garantizada la adquisición de los conocimientos mínimos para seguir con aprovechamiento cualquier curso posterior de perfeccionamiento.

Este manual surge como una necesidad tanto para los alumnos de Ciencias del Mar que no pueden asistir a clase como para todos aquellos que han obtenido su título en el extranjero y quieren convalidarlo por el de CCMM en nuestro país (la asignatura de Ingeniería de Costas forma parte del grupo de materias de las que les es obligatorio examinarse). Esta primera parte publicada, que comprende el oleaje regular, se verá continuada, Dios mediante, por otras que introduzcan al estudio del oleaje irregular, propagación, diques y regeneración de playas entre otros temas. Para ello espero contar, como hasta hora, con la inestimable colaboración de Marina e Isabel que tuvieron la amabilidad de redactar las notas y apuntes de clase y de Jorge, un artista del tratamiento de figuras.

No quiero acabar estas breves líneas sin un reconocimiento específico a los profesores que desinteresadamente intentaron instruirme en los arcanos de este fascinante campo. Mi gratitud personal para Agustín Sánchez Arcilla en la Politécnica de Barcelona, Raúl

Medina, Miguel e Iñigo Losada y César Vidal en Cantabria, y para tantos otros que no menciono por no hacer demasiado extensa la lista. Y todo ello sin olvidar a todos aquellos, jefes o subalternos pero siempre compañeros y amigos, que me enseñaron el oficio. Cualquier cosa buena que se encuentre en este libro será fruto de sus desvelos. Los más que probables fallos y gazapos son únicamente de mi propia cosecha.

ÍNDICE

PRÓLOGO

ÍNDICE

1. HIDRODINÁMICA BÁSICA

- 1.1 Introducción
- 1.2 Movimiento del fluido
- 1.3 Ley de Conservación de la masa ($M=\text{cte.}$)
- 1.4 Ley de Conservación del momentum o de la cantidad de movimiento
- 1.5 Flujo Potencial
- 1.6 Cuestiones resueltas

2. ONDA DE AIRY O DE PEQUEÑA AMPLITUD

- 2.1 Introducción
- 2.2 Elementos de una onda
- 2.3 Hipótesis simplificativas de la onda de Airy
- 2.4 Representación gráfica de la onda de Airy
- 2.5 Condiciones de contorno
- 2.6 Solución al Potencial de la onda de Airy
- 2.7 Aguas profundas y someras
- 2.8 Movimiento de las partículas
 - 2.8.1 Campo de velocidades
 - 2.8.2 Trayectoria de las partículas
- 2.9 La presión
- 2.10 Energía
 - 2.10.1 Energía potencial (E_p)
 - 2.10.2 Energía cinética (E_c)
 - 2.10.3 Energía total del oleaje
 - 2.10.4 Flujo de energía
- 2.11 Problemas resueltos

3. OTRAS ONDAS

3.1 Ondas de orden superior

3.1.1 Valores límite de ciertos parámetros adimensionales

3.2 Ondas de Stokes de 2º orden

3.3 Onda Cnoidal

3.4 Onda solitaria

3.5 Elección de la teoría de onda más adecuada

3.6 Problemas resueltos

BIBLIOGRAFÍA COMENTADA

TEMA 1. HIDRODINÁMICA BÁSICA

TEMA 1. HIDRODINÁMICA BÁSICA

1.1 INTRODUCCIÓN

La **Hidrodinámica** vendría a estar relacionada etimológicamente con las fuerzas que producen el movimiento del agua. En general, se aplica a cualquier fluido líquido, estudiando así mismo las interacciones entre dicho fluido y los contornos que lo limitan. El fundamento de toda la mecánica de fluidos es la **hipótesis del medio continuo**: el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando tanto su estructura molecular como las discontinuidades asociadas a esta. De este modo, se puede considerar que las propiedades del fluido (presión, densidad, temperatura, etc.) son funciones continuas.

Recordemos antes que nada que los fluidos son sustancias que se adaptan a la forma de los recipientes que los contienen. La diferencia principal entre líquidos y gases es que **los líquidos son prácticamente incompresibles** (su densidad es casi constante), mientras que en los gases no se pueden despreciar las variaciones de densidad.

1.2 MOVIMIENTO DEL FLUIDO

El movimiento de un fluido viene dado por un campo vectorial de velocidades “ v ” y un campo escalar de presiones “ p ” en cada punto del mismo.

La **representación del movimiento** de un fluido puede realizarse mediante los planteamientos de *Lagrange* o *Euler*. El planteamiento **Lagrangiano** se basa en seguir a una partícula fluida determinada (como si tuéramos a una partícula en particular) y observáramos su movimiento a lo largo del tiempo. Buscaremos pues unas funciones que nos den la posición, así como las propiedades de dicha partícula en cada instante:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}_t, t) \quad (1.1)$$

Donde \vec{x}_t es la posición de nuestra partícula a lo largo del tiempo

Por el contrario, la descripción **Euleriana** no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido. En esta descripción estudiaremos el valor de “v” y “p” en un punto determinado del espacio y su variación a lo largo del tiempo, despreocupándonos de la partícula fluida que ocupa dicho punto en cada instante.

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}_o, t) \quad (1.2)$$

Donde \vec{x}_o es la posición de nuestro punto de interés, fijo a lo largo del tiempo.

Este criterio es el más usado en ingeniería puesto que normalmente resulta el de mayor interés. Por ejemplo, queremos conocer la altura de ola o la energía en un punto de un dique para saber si el bloque diseñado es estable; o bien la corriente en un punto de la playa para calcular el transporte potencial de sedimento, o si la erosión alcanzará la cimentación de una estructura, etc. Por ello, a partir de este momento siempre supondremos que utilizamos la descripción Euleriana.

1.3 LEY DE CONSERVACIÓN DE LA MASA (M=cte.)

Para encontrar las ecuaciones que rigen la mecánica de fluidos aplicaremos las **leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento**.

Definiremos la masa M de un cuerpo como un número característico suyo y que se obtiene comparándolo con otro cuerpo patrón en una balanza. Consideraremos que esa masa M permanece constante¹. No ocurre lo mismo con el peso de dicho cuerpo W que será función de la gravedad g del lugar en que se encuentre ($W=M \cdot g$)

Dada la complejidad del problema cuando tratamos con un fluido, intentaremos aplicar algunas hipótesis que simplifiquen las ecuaciones y faciliten obtener su solución.

¹ De acuerdo con la teoría de la Relatividad, la masa M aumenta con la velocidad v , pero sólo de manera perceptible cuando dicha v es cercana a la de la luz c

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

1ª Hipótesis: Dado que estamos en Ingeniería de Costas estudiaremos superficies del mar relativamente pequeñas y podremos suponer que **la densidad (ρ) permanece constante (fluido incompresible)**². Como la densidad es igual al cociente entre la masa (M =constante) y el volumen (V), entonces el volumen también es constante:

$$\text{Sabiendo que } \rho = \frac{M}{V}, \quad \rho = \text{cte} \quad \text{y} \quad M = \text{cte} \quad \rightarrow \quad V = \text{cte}.$$

2ª Hipótesis: Observando el mar desde un avión y con buen tiempo, los frentes de onda son paralelos entre sí. Ello nos permite suponer un **sistema bidimensional (2D)**. Para ello, asignaremos un sistema de referencia normal (con unos ejes perpendiculares entre sí) de modo que el eje X sea el de avance de la ola (i.e. perpendicular al frente de onda), el eje Y paralelo a dicho frente, y el eje Z será el vertical.

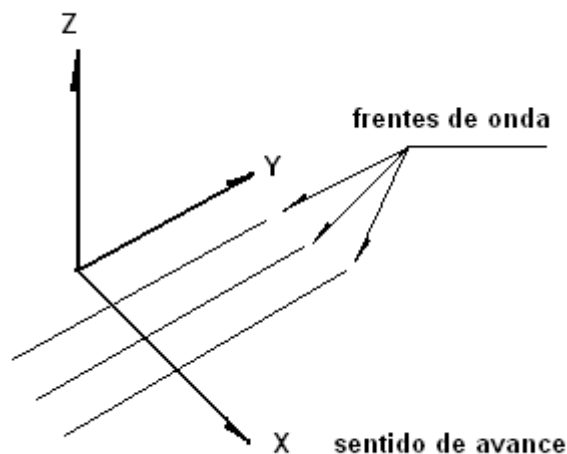


Figura 1.1 Sistema de referencia para las ondas

Supondremos, por tanto, que en este sistema de referencia no hay variaciones en el eje de las Y, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

² Esto no sería posible en Oceanografía, donde se estudian los movimientos de masa de agua entre continentes (v.g. la corriente del Golfo). La densidad del agua de mar depende de la salinidad, de la temperatura y, en menor medida, de la presión (ver la cuestión resuelta 1.7)

Asimismo, al tratarse de un sistema bidireccional de movimiento en el plano XZ, la velocidad en el sentido de las Y será nula. El vector velocidad \vec{v} , vendría expresado en tres dimensiones (3D) como:

$$\vec{v} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad \text{o bien} \quad \vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = \frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k}$$

Admitiendo flujo bidimensional

$$\vec{v} = (u, 0, w) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, 0, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = u\vec{i} + w\vec{k} \quad (1.4)$$

Ejemplo 1.1 Establecer la ecuación de continuidad en un fluido incompresible simplificando a dos dimensiones.

La ecuación de continuidad corresponde a la ecuación de conservación de la masa ($M = cte = \rho \cdot V$); si la densidad (ρ) es constante, entonces un volumen de fluido cualquiera también permanecerá constante. Elegimos como volumen de control uno como el de la figura 1.2, con una geometría fácil de operar. Es un volumen paralelepípedo, diferencial, de dimensiones dx , dz en las direcciones X y Z, y 1 en el eje de las Y.

$$dV = dx \cdot 1 \cdot dz = dx \cdot dz$$

Puesto que en un fluido bidimensional el campo de velocidades viene expresado por

$$\vec{v} = (u, w) = u\vec{i} + w\vec{k}$$

Entonces, el fluido que se mueva a su través lo hará con las velocidades consignadas en la figura. Si, por ejemplo, u es la velocidad con que el fluido entra en el volumen de control en el sentido del eje X, cuando sale por la otra cara (separada una distancia dx) habrá variado un poco, un diferencial de u , esto es:

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$$

Y de modo similar la velocidad w en el eje Z

Si $dV = \text{cte}$, entonces el agua que entra tiene que ser igual al agua que sale:

$$u \cdot dz + w \cdot dx = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dz + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx$$

$$u \cdot dz + w \cdot dx = u \cdot dz + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx \cdot dz + w \cdot dx + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz \cdot dx$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot dz \cdot dx = 0$$

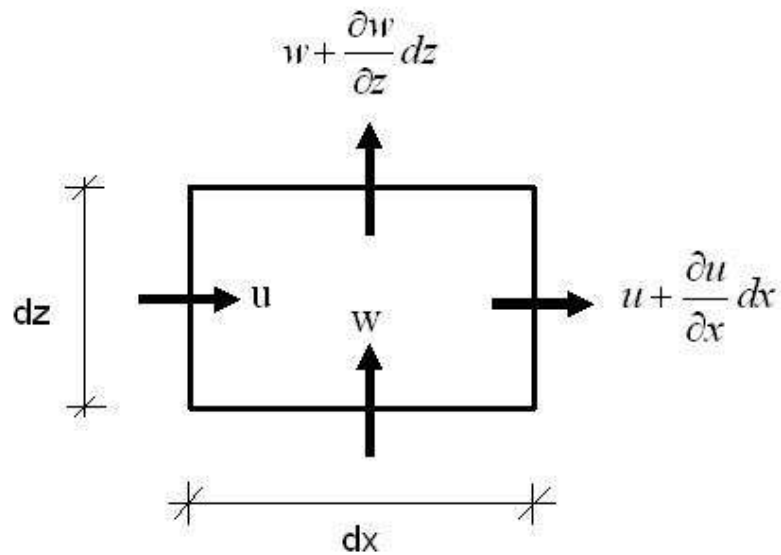


Figura 1.2 Volumen de control para establecer la ecuación de continuidad

Obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

Expresada de otro modo como que la divergencia del campo de velocidades es nula

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

1.4 LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTUM O DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En ausencia de fuerzas exteriores, el momentum o cantidad de movimiento de un sistema aislado de partículas permanece constante. Otra manera de expresarlo es la 2ª ley de Newton: La variación con el tiempo de la cantidad de movimiento de una partícula es proporcional a la resultante de fuerzas que actúan sobre ella y tiene la dirección de ésta.

$$\sum \vec{F} = \frac{d(M \cdot \vec{v})}{dt} \quad (1.7)$$

Operando y puesto que M=cte:

$$\sum \vec{F} = \frac{dM}{dt} \cdot \vec{v} + M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ejemplo 1.2 Establecer las ecuaciones de Navier-Stokes en un fluido incompresible simplificando a dos dimensiones.

Elegimos un volumen de control similar al del ejemplo 1.1, donde hemos ubicado todas las fuerzas posibles: las volumétricas como el peso y las superficiales (normales y tangenciales).

El peso W tendrá sólo una componente en el eje de las Z , siendo negativa por ser su dirección hacia el centro de la Tierra. Su valor será:

$$W = -M \cdot \vec{g} = -\rho \cdot dV \cdot \vec{g} = -\rho \cdot dx \cdot 1 \cdot dz \cdot \vec{g} = -\rho \cdot g \cdot dx \cdot dz \cdot \vec{k}$$

Las fuerzas normales o perpendiculares a las caras del volumen de control se obtienen recordando simplemente la definición de presión. En el caso de la cara perpendicular al eje X situada a la izquierda

$$dF_x = p \cdot dz \cdot 1 = p \cdot dz$$

Igual a como vimos en el ejemplo 1.1, la fuerza aplicada en la cara paralela a ésta y ubicada un dx a la derecha, habrá cambiado un diferencial de p

$$dF_{x+dx} = (p + dp) \cdot dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dz$$

Las fuerzas de presión en el eje de las Z se obtienen de manera similar.

Las **fuerzas tangenciales** son proporcionales a una característica del fluido llamada **viscosidad** ν , que consiste en oponerse precisamente a su flujo cuando se le aplica una fuerza. Los fluidos de alta viscosidad (como el aceite) presentan una cierta resistencia a fluir; los fluidos de baja viscosidad (como el agua) fluyen con mayor facilidad. Por tanto, cuanto mayor sea la viscosidad de un fluido, mayor tendrá que ser la fuerza tangencial que tendremos que efectuar para arrastrarlo.

Esas fuerzas viscosas son proporcionales al gradiente de velocidad (o a la rapidez relativa entre las capas de fluido) si el flujo es laminar. En cambio, son proporcionales al cuadrado de dicha velocidad relativa si el flujo es turbulento.

En nuestro caso, suponiendo flujo laminar,

$$F_{zx} = \nu \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx \quad \text{y de modo similar} \quad F_{xz} = \nu \cdot \frac{dw}{dz} \cdot dz$$

Las componentes en X y Z de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento quedan como sigue:

$$\sum F_x = M \cdot \frac{du}{dt} \quad \sum F_z = M \cdot \frac{dw}{dt}$$

Sustituyendo con los valores de la figura y derivando (aplicando la regla de la cadena)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dz - F_{zx} = \rho \cdot dx \cdot dz \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} \right)$$

Simplificando, encontramos por fin las ec's de Navier-Stokes en 2D

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dz - F_{zx} = \rho \cdot dx \cdot dz \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad \text{en el eje X} \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx - F_{xz} - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dz \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad \text{en el eje Z} \quad (1.9)$$

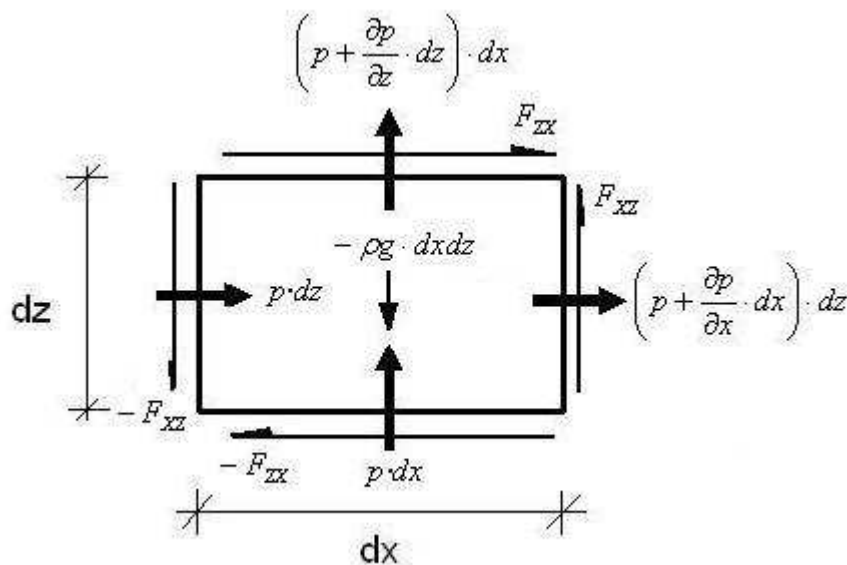


Figura 1.3 Volumen de control para conservación de la cantidad de movimiento

Ejemplo 1.3 Establecer las ecuaciones de Euler.

Hemos visto que las ec's de Navier-Stokes son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales para las que no se dispone de una solución analítica en general. Normalmente, habremos de recurrir a soluciones numéricas aproximadas. Sin embargo, si aplicamos las ecuaciones anteriores al caso particular del agua, podremos simplificar las ec's de Navier-Stokes. Supondremos que las fuerzas viscosas son despreciables, dada su relativa escasa importancia (3ª Hipótesis).

$$F_{zx} = v \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx \approx 0 \quad \text{y de modo similar} \quad F_{xz} = v \cdot \frac{dw}{dz} \cdot dz \approx 0$$

Simplificando:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dz \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx - \rho \cdot g \cdot dx \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dz \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot w + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Operando, obtenemos las ec's de Euler

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (1.10)$$

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - g = \left(u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (1.11)$$

Ahora disponemos de 3 ec's (las dos de Euler junto con la de continuidad) y 3 incógnitas: las velocidades (u, w) y la presión p .

1.5 FLUJO POTENCIAL

Todavía pueden simplificarse más las ec's de continuidad y de Euler adoptando la teoría del potencial. Para ello asumiremos una 4ª Hipótesis: Supondremos que el campo de velocidades (un vector) proviene del gradiente de una función potencial (un escalar):

$$\vec{v} = (u, w) = \nabla \cdot \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (1.12)$$

Matemáticamente, es lo mismo que decir que el rotacional del campo de velocidades es nulo. Es decir:

$$\vec{v} = \nabla \cdot \phi \Leftrightarrow \text{rot} \cdot \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = 0 \quad (1.13)$$

Y ello equivale a afirmar que el laplaciano del campo de velocidades es nulo

$$\Delta \cdot \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.14)$$

En cuanto a las 2 ec's de Euler, se transforman en la ec de Bernouilli

$$g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

Donde ahora disponemos de 2 ec's (Laplaciano y Bernouilli) para encontrar 2 incógnitas: la función potencial Φ y la presión p .

Ejemplo 1.4. Demuestra que la ecuación de continuidad equivale a la de Laplace cuando se adopta la Teoría del Potencial.

Según la ecuación de continuidad (1.5):

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Puesto que $v = \nabla \phi$, entonces

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Sustituyendo encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Es decir, la Ecuación de Laplace:

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

Ejemplo 1.5. Demuestra que en un fluido irrotacional las derivadas parciales cruzadas del campo de velocidades son iguales

$$\text{rot} \cdot \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

Recordando que estamos considerando un flujo bidimensional ($\frac{\partial}{\partial y} = 0, v = 0$), el único menor no nulo del determinante será el de la componente en \vec{j}

$$\text{rot} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & 0 & w \end{bmatrix} = \left(0, -\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right), 0 \right) = (0,0,0)$$

Por consiguiente, las derivadas parciales cruzadas son iguales $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$

Ejemplo 1.6. Encuentra la ecuación de Bernoulli partiendo de las ec's de Euler

Recordemos en primer lugar la expresión de las ecuaciones de Euler:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - g = \left(u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Por otra parte, si se cumple que existe una función potencial tal que $\vec{v} = \nabla \cdot \phi$, entonces el flujo de velocidades es irrotacional y, por tanto (ejemplo 1.5)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Sustituyendo en las ec's de Euler, obtenemos:

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) - g = \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Integrando respecto a z la segunda ecuación:

$$\int -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot dz - \int g \cdot dz = \int \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \cdot dz$$

Puesto que ρ y g son constantes, y operando en el término de la derecha

$$-\frac{p}{\rho} - g \cdot z = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(u^2)}{\partial z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) \cdot dz$$

$$-\frac{p}{\rho} - g \cdot z = \frac{1}{2} \cdot (u^2 + w^2) + \int \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \right) \cdot dz$$

Recordando que $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + g \cdot z + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Integrando la primera ecuación de Euler respecto a x hubiéramos obtenido el mismo resultado haciendo que la constante de integración valiera $g \cdot z$.

1.6 CUESTIONES RESUELTAS

1.1. ¿Cuál es la interpretación física del rotacional de un campo vectorial?

El **rotacional** de un campo de velocidades muestra la tendencia de dicho campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto. Normalmente, el rotacional da cuenta de la existencia de "remolinos" en un campo vectorial. Sin embargo, puede haber casos en que el rotacional de un campo alrededor de un punto sea distinto de cero y ello no suponga necesariamente rotación. En cambio, un fluido donde veamos girar a las partículas no puede tener un rotacional nulo y, por tanto, no sería correcta la aplicación de la teoría del potencial.

1.2. ¿Es irrotacional el flujo de un fluido en una tubería?

El campo de velocidades de un fluido que circula por una tubería (conocido como perfil de Poiseuille) posee un rotacional no nulo en todas partes (salvo en el eje central), pese a que la corriente fluye en línea recta. Si colocáramos una rueda de paletas infinitamente pequeña (para que su presencia no alterara el flujo) observaríamos como giraría (excepto en el eje) debido a la diferente magnitud de los vectores velocidad a uno y otro lado.

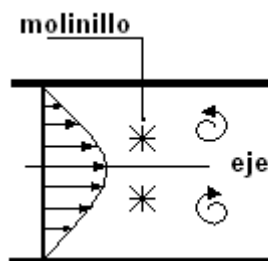


Figura 1.4 Esquema de flujo en tubería con rotacional no nulo

1.3. ¿Cómo es el rotacional en un disco que gira con una velocidad angular ω ?

En un campo vectorial que describa las velocidades lineales de cada parte individual de un disco que rota, el rotacional tendrá un valor constante en todas las partes del disco.

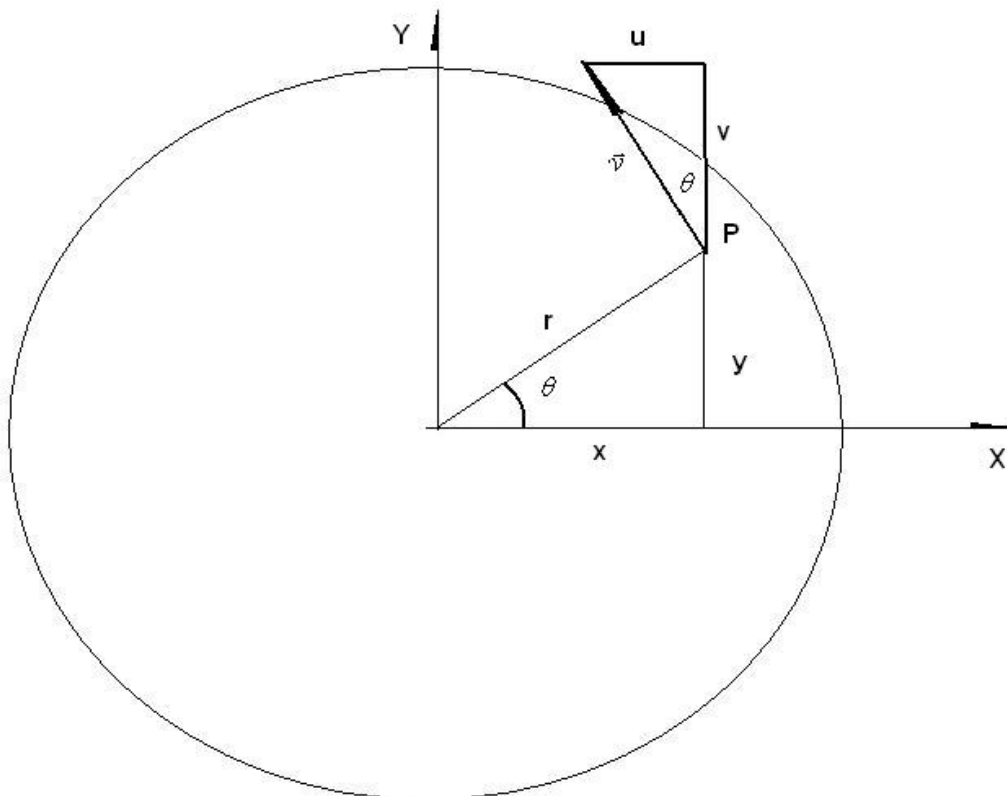


Figura 1.5 Rotacional en un disco que gira con velocidad angular constante

La posición de un punto cualquiera del disco P viene dada por

$$P(x, y) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$$

La velocidad v en dicho punto será perpendicular al radiovector y tendrá un módulo

$$|\vec{v}| = r \cdot \omega$$

donde ω es la velocidad angular y no debemos confundirla con la componente w de la velocidad en el eje z que es nula

$$\vec{v} = (u, v, w) = (-r \cdot \omega \cdot \text{sen}\theta, r \cdot \omega \cdot \text{cos}\theta, 0)$$

Calculemos el rotacional del campo de velocidades

$$\text{rot} \cdot \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Puesto que u y v son funciones de r y θ , veamos primero cómo calcular las derivadas parciales respecto a x e y . Para ello derivaremos las ecuaciones de posición de la partícula.

$$x = r \cdot \text{cos}\theta$$

$$y = r \cdot \text{sen}\theta$$

Derivando respecto a x , $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \text{cos}\theta + r \cdot (-\text{sen}\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \text{sen}\theta + r \cdot \text{cos}\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Multiplicando a la primera ec. por $\text{cos}\theta$ y a la segunda por $\text{sen}\theta$

$$\text{cos}\theta = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \text{cos}^2\theta + r \cdot (-\text{sen}\theta \cdot \text{cos}\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \text{sen}^2\theta + r \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Sumando ambas ec's

$$\text{cos}\theta = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot (\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$

$$\text{Es decir } \frac{\partial r}{\partial x} = \text{cos}\theta$$

y sustituyendo

$$0 = \cos \theta \cdot \text{sen}^2 \theta + r \cdot (\text{sen} \theta \cdot \cos \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \text{sen} \theta + r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{de donde se deduce} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \text{sen} \theta$$

De manera similar, derivando respecto a y, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \text{sen} \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cdot \cos \theta$$

Ahora ya podemos calcular

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(r \cdot \omega \cdot \cos \theta)}{\partial x} - \frac{\partial(-r \cdot \omega \cdot \text{sen} \theta)}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \omega \cdot \cos \theta + r \cdot \omega \cdot (-\text{sen} \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \omega \cdot \text{sen} \theta + r \cdot \omega \cdot (\cos \theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} =$$

$$= \cos \theta \cdot \omega \cdot \cos \theta + r \cdot \omega \cdot (-\text{sen} \theta) \cdot \left(\frac{-1}{r} \cdot \text{sen} \theta\right) + \text{sen} \theta \cdot \omega \cdot \text{sen} \theta + r \cdot \omega \cdot (\cos \theta) \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos \theta =$$

$$= \omega(\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) + \omega(\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = \omega + \omega = 2 \cdot \omega$$

Luego el $\text{rot} \cdot \vec{v} = (0, 0, 2 \cdot \omega)$

1.4. ¿Es irrotacional el flujo de vehículos en una autopista rectilínea?

En una autopista rectilínea en la que sólo hubiera velocidad u en la dirección de las X, y el eje de las Y fuera el transversal a la calzada, el rotacional valdría

$$\text{rot} \cdot \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Si los coches estuvieran parados o circularan todos con la misma velocidad entonces no habría variación transversal de la velocidad y el flujo sería irrotacional. Por el contrario, el rotacional sería no nulo si los coches circularan a distinta velocidad por cada carril

1.5. Expón algunos casos donde el agua del mar no sea incompresible y cual sería la consecuencia

Todas aquellas situaciones en las que el agua se vea mezclada con el aire: la rotura del oleaje, la cavitación producida por las hélices de una embarcación... La hipótesis de densidad constante la utilizamos al establecer la ecuación de continuidad por lo que en caso de no ser cierta, ninguna de las ecuaciones de este capítulo serían válidas.

1.6. ¿Puede variar la densidad del agua del mar a lo largo del día en un mismo sitio? ¿Por qué?

La pleamar puede traer agua de diferente temperatura y, por tanto, diferente densidad. En Gravesend, por ejemplo, donde la creciente de la marea trae agua más templada, la densidad es de 1.019 en pleamar y 1.014 en bajamar.

1.7. Busca datos sobre la salinidad/densidad del agua en un mar frío y otro más cálido y explica la diferencia.

La densidad es directamente proporcional a la salinidad, pero inversamente proporcional a la temperatura. Así, un descenso de 5° puede incrementar la densidad en un 1 %. Por otra parte, cuanto más caliente esté el agua del mar, tanto mayor será su evaporación y su salinidad por consiguiente. El efecto de la presión es menor, un 1% por cada 20 atmósferas o 200 metros. Algunos valores de salinidad pueden consultarse en la tabla adjunta

Nombre del Mar	Salinidad (‰)
Rojo	40
Mediterráneo	38
Negro	18
Báltico	8
Valor medio de los océanos	35

1.8. Consideremos un dominio fluido en reposo. Un tren de olas de pequeña amplitud es generado. Demostrar que si el fluido es irrotacional la velocidad horizontal u en las proximidades del fondo es aproximadamente independiente de la coordenada vertical z .

$$\text{rot } \vec{v} = (\nabla \cdot \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & 0 & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

Como se trata de un flujo bidimensional: $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, entonces: $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

El fondo del mar puede ser de un material impermeable o no. Si no lo es, las fisuras en la roca o los huecos intersticiales entre granos estarán llenos de agua. En cualquier caso no puede haber flujo hacia el interior del planeta. Es decir, en el fondo (condición de contorno)

$$w = 0 \Big|_{z=-d} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Por lo tanto, u es independiente de z en las proximidades del fondo (q.e.d).

**TEMA 2. ONDA DE AIRY O
DE PEQUEÑA AMPLITUD**

TEMA 2. ONDA DE AIRY O DE PEQUEÑA AMPLITUD

2.1 INTRODUCCIÓN

Una de las razones prácticas que justifican el estudio del oleaje es la energía liberada durante su proceso de rotura. Dicha energía es la principal causante de diferentes fenómenos que configuran la línea de costa tales como la erosión de los acantilados, los cambios en la forma en planta y perfil de las playas, la inestabilidad de escolleras y bloques de diques y espigones, la destrucción de infraestructuras, etc.

En la figura 2.1 puede apreciarse la energía acumulada por las distintas ondas en función de su frecuencia. Vemos, por ejemplo, que pese a que los tsunamis tienen mayor potencia (liberan más cantidad de energía en menor tiempo) son relativamente poco frecuentes. Ello implica que sean las olas gravitatorias las que acumulan mayor energía.

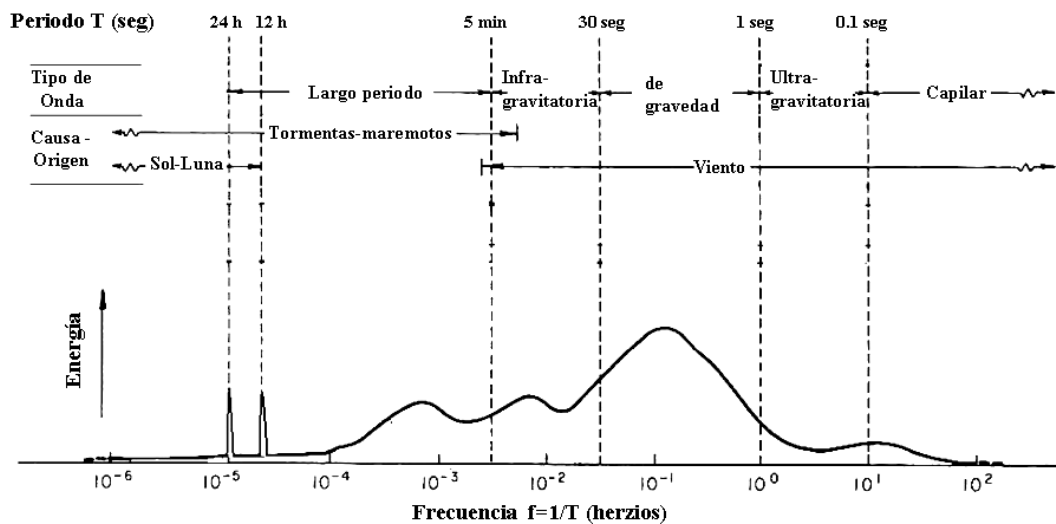


Figura 2.1 Distribución de la energía de las olas por frecuencias (abajo) y periodos (arriba) En el eje vertical denominación, y fuerzas generadora y restauradora principales.

De este modo, las olas se diferencian en función de su frecuencia en ondas de marea (con periodos de más de 12 horas), tsunamis (de 12 horas a 5 minutos entre dos olas consecutivas), ondas infragravitatorias también conocidas como ondas de grupo (con periodos de 30 segundos a 5 minutos), ondas gravitatorias (con un periodo de entre 1 hasta 30 segundos), ondas ultragravitatorias (de 0,1 a 1 segundos) y ondas capilares ($<0,1$ seg). Cabe recordar que bajos periodos indican altas frecuencias.

Cuando la tormenta que ha generado el oleaje que observamos en la orilla se encuentra allí mismo, las olas vienen entonces de diversas direcciones y tienen diferentes alturas y periodos. A este tipo de oleaje caótico le llamaremos de tipo SEA o de tormenta y no puede ser abordado analíticamente. Por el contrario, si los vientos estaban actuando a cientos o miles de kilómetros, las olas pueden haber estado viajando durante días por la superficie del mar y eso les ha dado tiempo para clasificarse por su velocidad. Es el oleaje que vemos en la playa un día “bueno”, trenes de ondas similares con parecido periodo y altura de ola. A este tipo de oleaje se le conoce como SWELL o mar de fondo y sí puede estudiarse de manera analítica.

El modelo matemático de la Onda de Airy, también conocido como el de las ondas de pequeña amplitud u ondas sinusoidales, es uno de los de mayor aplicación en la ingeniería de costas, debido a su sencillez y fácil aplicación. Posteriormente, estudiaremos cuales son las hipótesis en las que se basa y que limitan su campo de validez. Veremos que cerca de la orilla los resultados obtenidos con la Onda de Airy dejan de tener una completa fiabilidad. Para esos casos, se han desarrollado otro tipo de modelos: Stokes, Cnoidal y onda solitaria, entre otros, que se presentan en el capítulo 3 de Otras Ondas.

2.2 ELEMENTOS DE UNA ONDA

Empezaremos examinando los diferentes elementos de una onda de Airy, introduciendo la terminología utilizada para su descripción y que se presenta en la figura 2.2.

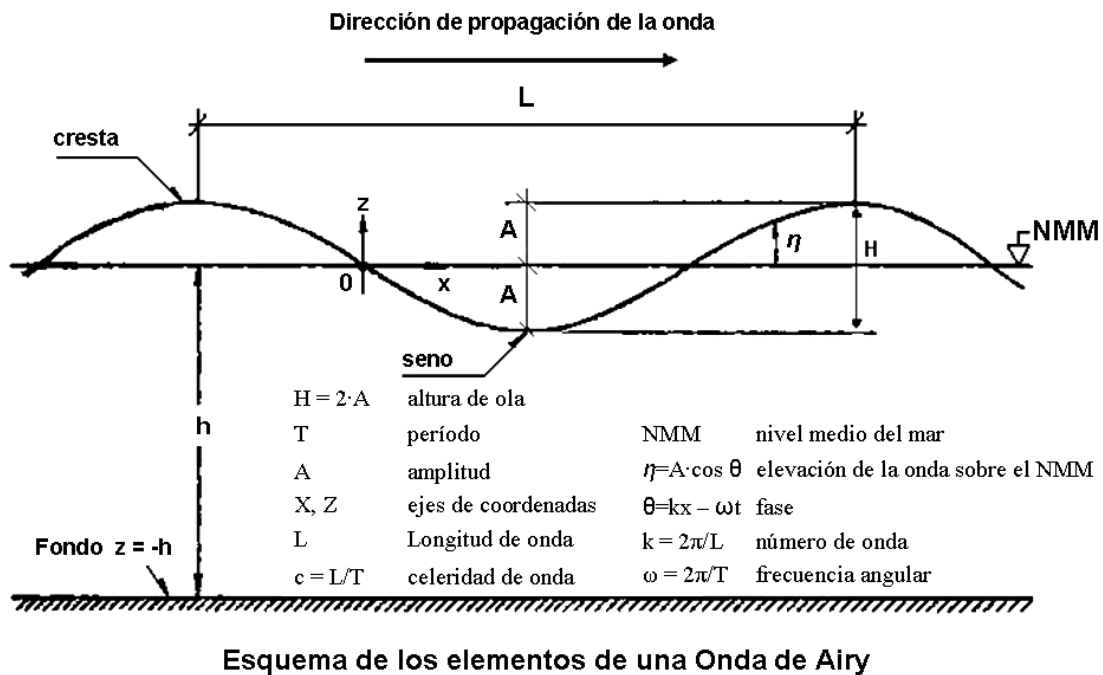


Figura 2.2 Perfil de una onda sinusoidal mostrando sus diferentes componentes

La **cresta** de la onda es su punto más alto, mientras que el más bajo se denomina **seno**. La **altura de ola** H es la distancia vertical entre la cresta y el seno. La **amplitud** A es la distancia vertical entre el Nivel Medio del Mar NMM y la cresta o el seno. Obviamente, la altura de ola es el doble de la amplitud.

La **longitud de onda** L es la distancia entre dos crestas o senos consecutivos. La **profundidad** h , también expresada como d (depth) en la bibliografía anglosajona, expresa la distancia entre el NMM y el fondo. El eje X se ubica en la superficie del mar, en lo que sería su nivel medio. El eje Z es el eje vertical, de modo que $z=0$ es la superficie del agua y $z=-h$ ó $z=-d$ será el fondo del mar.

El **periodo** T es el tiempo que tardan dos crestas o senos consecutivos en pasar por un mismo punto y es un valor constante. La **frecuencia** f es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} \tag{2.1}$$

El **peralte** s o *steepness* nos relaciona la altura con la longitud de onda, dando una idea de la pendiente de la misma:

$$s = \frac{H}{L} \quad (2.2)$$

La **celeridad de onda** c es la velocidad a la que se desplaza o propaga la onda, y se calcula dividiendo la longitud de onda entre el período:

$$c = \frac{L}{T} \quad (2.3)$$

La **fase** θ (theta) de una onda, que varía entre 0 y $2\cdot\pi$, nos permitirá conocer en que punto del movimiento ondulatorio se encuentra una partícula. Combina en una sola variable el espacio y el tiempo y se expresa del siguiente modo:

$$\theta = \frac{2\cdot\pi}{L}x - \frac{2\cdot\pi}{T}t \quad (2.4)$$

Un **frente de onda** (la línea de la cresta de la onda vista desde un avión) es por tanto una curva de fase constante, y la dirección de propagación será ortogonal a dicho frente de onda.

Introduciremos dos nuevos parámetros: la **frecuencia angular** ω (omega), mucho más utilizada en teoría de ondas que f , y el **número de onda** k

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.5)$$

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.6)$$

Si sustituimos estos parámetros en la ecuación (2.4), se obtiene una expresión mucho más sencilla para la fase:

$$\theta = k \cdot x - \omega \cdot t \quad (2.7)$$

2.3 HIPÓTESIS SIMPLIFICATIVAS DE LA ONDA DE AIRY

La Onda de Airy se basa en la resolución de la teoría del potencial, pero teniendo en cuenta una serie de hipótesis complementarias que permiten la simplificación del sistema de ecuaciones diferenciales. Expondremos aquí las hipótesis contempladas hasta ahora así como las nuevas y las limitaciones que conlleva cada una de ellas

1ª hipótesis: *La profundidad (h) es constante.* Esto implica que en puntos cercanos a la costa, donde la pendiente del fondo es relativamente importante, el error cometido puede alcanzar el 20%. Este porcentaje es en ocasiones del mismo orden que la indeterminación de la altura de la ola u otros parámetros, por lo que suele seguirse aplicando esta teoría con las debidas precauciones.

2ª hipótesis: *Se trabaja en un medio bidimensional (2D).* Por lo tanto si el eje de las X es el de propagación de la onda y el eje Z es el vertical, la variación en el eje de las Y será nula ($\partial/\partial y = 0$).

Esta hipótesis implica que la onda de Airy sólo puede ser utilizada para oleajes tipo SWELL, excluyendo las olas tipo SEA debido a la imposibilidad de tener en cuenta unas condiciones en 3D.

3ª hipótesis: *La forma de las olas es constante.* Esto no se ajusta a la realidad, pues como todos sabemos, las olas se peraltan y posteriormente rompen a medida que se acercan a la orilla. Su forma sinusoidal sólo permanece invariable en alta mar, a grandes profundidades.

4ª hipótesis: *Se trata de un fluido incompresible.* Esto significa que la densidad (ρ) es siempre constante. En el caso que se mezclaran dos fluidos, uno compresible (como el aire) y otro incompresible (como el agua), el fluido resultante resultaría también compresible. Por lo tanto, cuando exista aire dentro del agua, como en el caso de la

rotura del oleaje, hélices en cavitación, etc. (se advierte fácilmente por la presencia de espuma), no se pueden aplicar ni las ecuaciones de Euler, ni el Laplaciano o la ec. de Bernoulli (derivadas de la teoría del Potencial) ni por consiguiente la Onda de Airy.

5ª hipótesis: ***El fluido es no viscoso.*** Se trata de un fluido ideal con viscosidad (ν) nula. Esta hipótesis es válida fuera de la capa límite del fondo.

6ª hipótesis: ***Se desprecia la tensión superficial del agua.*** Esta simplificación sólo sería un problema a la hora de realizar un modelo a muy pequeña escala, ya que las fuerzas de tensión superficial no tienen tanta importancia a escala 1:1 (en la realidad) si las comparamos, por ejemplo, con las gravitatorias.

7ª hipótesis: ***El peralte es muy pequeño.*** Se asume que el peralte (s) es mucho más pequeño que 1 .

$$s = \frac{H}{L} \ll 1 \quad (2.8)$$

Recordemos que el peralte nos da idea de la inclinación de la ola. Consideraremos que esta condición se cumple en la práctica cuando es inferior a 0.01. Posteriormente veremos que esto nos permitirá desprestigiar los términos cuadráticos y linealizar las ecuaciones diferenciales, simplificándolas muchísimo.

Ejemplo 2.1 Encuentra la relación entre la pendiente de la ola y el peralte.

El peralte es la mitad de la pendiente de la ola ya que como se aprecia en la figura

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{L/2} = 2 \cdot \frac{H}{L} = 2 \cdot s$$

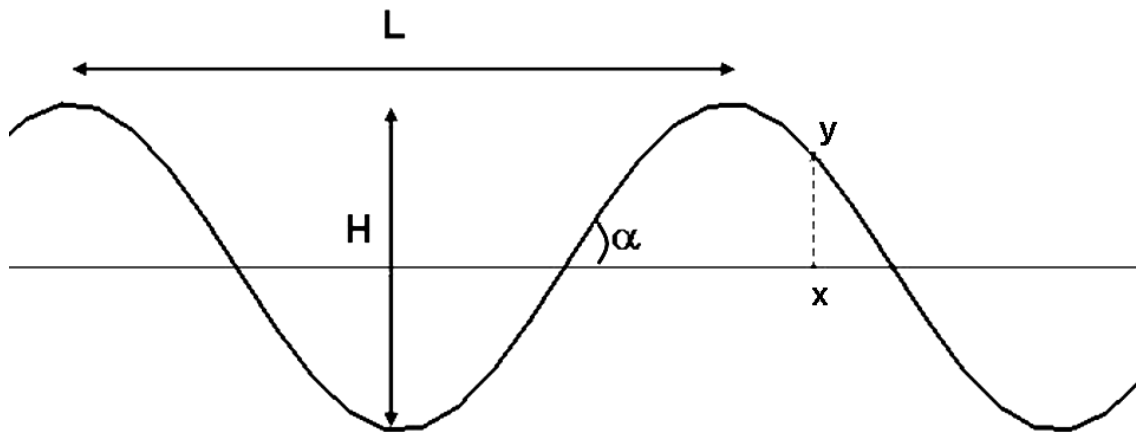


Fig. 2.3 Relación entre pendiente y peralte en una onda sinusoidal

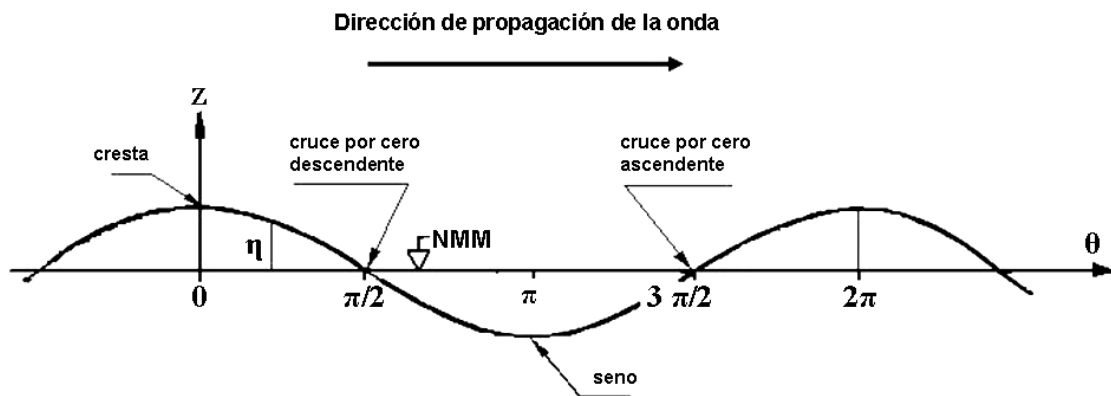
2.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ONDA DE AIRY

En la Onda de Airy, la **superficie libre** se representa con la letra griega η (eta). Significa la elevación de una partícula de agua respecto al NMM al paso de una onda y se calcula mediante:

$$\eta = A \cdot \cos(\theta) = \frac{H}{2} \cdot \cos(\theta) = \frac{H}{2} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.9)$$

Recordando que la amplitud A es la mitad de la altura de ola H

Ejemplo 2.2 *Identifica los valores de θ y η en los puntos más representativos de la onda*



$$\eta = A \cdot \cos(\theta) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

0	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
η	A	0	$-A$	seno	A

Fig. 2.4 La onda de Airy en función de la fase con sus puntos más representativos

2.5 CONDICIONES DE CONTORNO

Centrándonos en las ecuaciones de Conservación de la Masa y de la Cantidad de Movimiento, que para un flujo potencial se convertían en el Laplaciano y en la ec. de Bernoulli obteníamos:

Ecuación de Laplace:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

Ecuación de Bernoulli³:

³ Recordemos la diferencia de notación entre la derivada segunda y el cuadrado de la derivada primera, siendo este último un término cuadrático: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \neq \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x}$

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

Establecemos un contorno sencillo (ver fig. 2.5), rectangular, de fácil integración, limitado por el fondo del mar, la superficie o interfase océano-atmósfera y dos laterales coincidentes con las crestas de la onda (fases 0 y 2π)

– *En el fondo:* Supondremos que el fondo no es permeable al flujo de agua: bien porque es rocoso o bien porque es arenoso, en cuyo caso tendría huecos pero rellenos ya de agua. En ambos casos, la componente vertical w de la velocidad es igual a 0, es decir:

$$w = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \Big|_{z=-h} \quad (2.12)$$

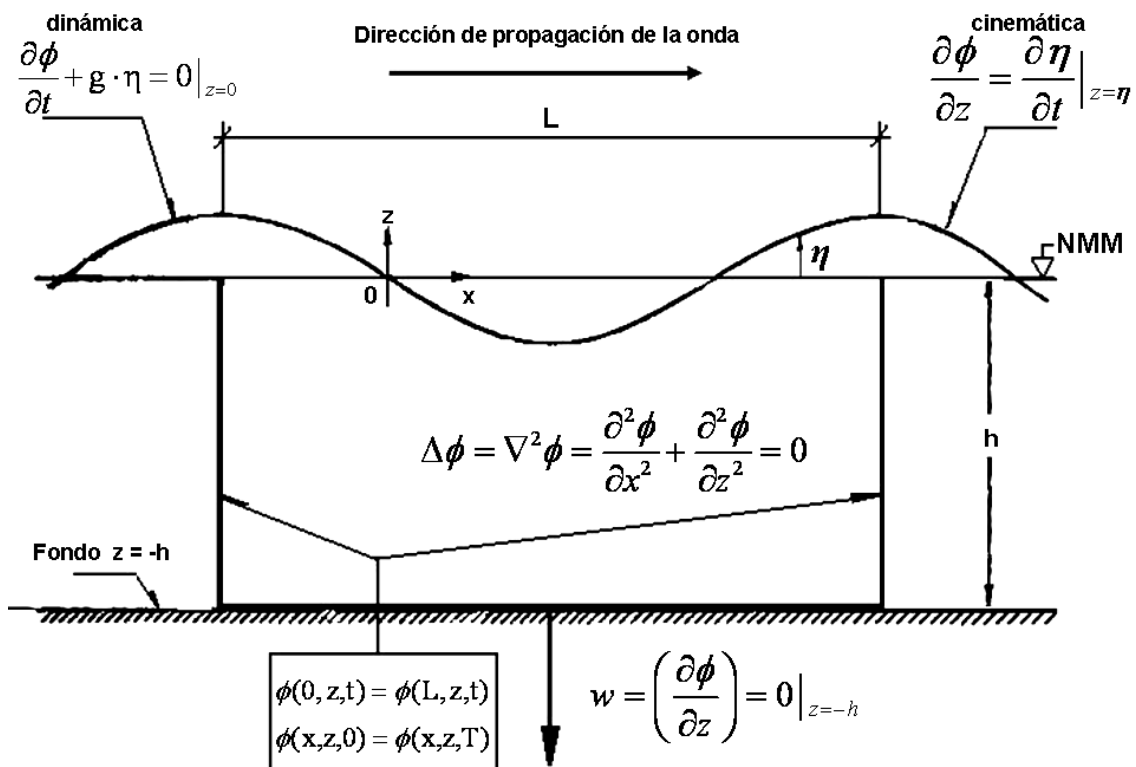


Figura. 2.5 Condiciones de contorno de una onda sinusoidal

– En la superficie:

- La condición dinámica supone que existe la misma presión en cada lado de la interfase. Para el caso de Ingeniería de Costas (donde la superficie de estudio abarca unos pocos km²) asumiremos que la presión atmosférica es constante. La tomaremos como presión de referencia e igual a 0 (p=0) en la superficie del mar (z=η). Así, basándonos en la ecuación de Bernouilli (2.11), obtendremos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g \cdot \eta = 0 \Big|_{z=\eta} \quad (2.13)$$

Si $s \ll 1$ (ec. 2.8, hipótesis 7^a), podremos eliminar los términos cuadráticos⁴ y linealizar la expresión:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \cdot \eta = 0 \Big|_{z=0} \quad (2.14)$$

- En la condición cinemática se asume que la interfase que separa el agua del aire es una película irrompible y por tanto una función continua en el espacio-tiempo, de modo que:

$$z = \eta (x,t)$$

Por lo tanto:

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} \quad (2.15)$$

Y recordando que $w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ y $u = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, entonces:

⁴ Si el peralte ($s=H/L$) es muy pequeño (condición definitoria de una Onda de Airy), cualquier variación como por ejemplo la del eje z con respecto al tiempo ($w=dz/dt$) será también pequeña (del orden de 0.01 o menor). Si multiplicamos dos factores similares, el orden resultante será aún mucho más pequeño (del orden de 0.0001) y por tanto productos de ese tipo (denominados cuadráticos) serán despreciables.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.16)$$

Suponiendo nuevamente que el peralte ($s=H/L$) es muy pequeño, despreciaremos el término cuadrático:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx 0$$

Resultando de este modo una ecuación linealizada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta} \quad (2.17)$$

– *En los contornos laterales:* Si el flujo de velocidades deriva de un potencial ϕ que depende de (x,z,t) , y ambas paredes laterales coincidían en puntos homólogos como las crestas, entonces existirá una periodicidad en el espacio:

$$\phi(0, z, t) = \phi(L, z, t) \quad (2.18)$$

y en el tiempo:

$$\phi(x, z, 0) = \phi(x, z, T) \quad (2.19)$$

Ejemplo 2.3 *¿Podríamos combinar las dos ecuaciones linealizadas de la superficie libre (cinemática y dinámica) en una sola?*

Efectivamente, podemos despejar el valor de η de la condición dinámica (2.14), derivar con respecto a t y sustituir en la condición cinemática (2.17), obteniendo:

$$\text{De } \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \cdot \eta = 0 \Big|_{z=0} \text{ despejamos } \eta = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ derivando } \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Y sustituyendo en (2.17)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{z=\eta} \quad (2.20)$$

2.6 SOLUCIÓN AL POTENCIAL DE LA ONDA DE AIRY

Tenemos que resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales (el laplaciano y la ecuación de Bernoulli) que se cumplen en todo el fluido junto con las condiciones de contorno definidas en el apartado anterior. La metodología completa a seguir para resolver la Onda de Airy se escapa de los objetivos de este curso, pero puede consultarse en cualquiera de las fuentes citadas en la bibliografía. Aquí proveeremos al lector simplemente de algunas pistas interesantes desde el punto de vista pedagógico para una mejor comprensión del problema.

Vemos que las incógnitas son: el potencial $\phi = \phi(x, z, t)$ y la presión $p = p(x, z, t)$ (que dependen ambas de tres variables), y la elevación de la superficie del mar al paso de la onda $\eta = \eta(x, t)$ que obviamente no depende de z . Pero recordemos que habíamos introducido una nueva variable, la fase $\theta = k \cdot x - \omega \cdot t$, que relacionaba la variable espacial de la dirección de propagación x con el tiempo t . Con ello simplificamos el número de variables

$$\phi(x, z, t) = \phi(\theta, z)$$

$$\eta(x, t) = \eta(\theta)$$

El siguiente paso sería suponer que la función potencial ϕ es el producto de dos funciones de variables separadas:

$$\phi(\theta, z) = F(\theta) \cdot Z(z) \quad (2.20)$$

Las funciones que cumplen la ec. 2.20 son las del tipo sinusoidal e hiperbólica⁵.

⁵ Veamos aquí la definición de las funciones hiperbólicas. Para recordar sus características puede acudir a cualquier libro de Cálculo, aunque alguna de ellas se presentan en los ejercicios resueltos del final del capítulo

$$F(\theta) = A \cdot \sin \theta \quad (2.21)$$

$$Z(z) = C \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \quad (2.22)$$

Donde los coeficientes A y C surgen de las condiciones de contorno. Finalmente, se obtendría la ecuación conocida como **Relación de Dispersión**:

$$\omega^2 = gk \cdot tgh(kh) \quad (2.23)$$

Que también puede expresarse como

$$L = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot tgh\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot h\right) \quad (2.24)$$

La expresión de la superficie es

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \quad (2.25)$$

Y la del potencial resulta:

$$\phi = \frac{H \cdot c}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot sen(kx - \omega t) \quad (2.26)$$

Observamos 5 incógnitas en esta ecuación: H , h , k ($k = 2\pi/L$), ω ($\omega = 2\pi/T$) y c . Sin embargo, puesto que la celeridad de onda c depende de L y T , y disponemos de la ecuación (2.24) que las relaciona, habrá que encontrar únicamente 3 parámetros independientes para definir la onda: la altura de ola H , la profundidad h y otro más a elegir entre L , T o c (normalmente será T por su fácil determinación).

$$sh(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} \quad ch(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \quad tgh(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$$

Dado que en la ecuación de dispersión (2.24) la L no puede despejarse por encontrarse dentro del argumento de una función trascendente (la tangente hiperbólica), se resolverá por iteraciones sucesivas en un ordenador o una calculadora de bolsillo. También puede usarse la tabla que se adjunta al final de este capítulo, y cuya utilización viene explicada en los ejemplos que se acompañan, o bien utilizar las fórmulas aproximadas que se presentan en el siguiente párrafo para los casos particulares de aguas reducidas y profundas.

Debemos mencionar aquí otra formulación simplificada encontrada por Eckart (1952) cuyo error máximo es del 5% (suficiente en muchos casos en la ingeniería de costas)

$$L = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \sqrt{\operatorname{tgh}\left(\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot T^2} \cdot h\right)} \quad (2.27)$$

Ejemplo 2.4 Encuentra la relación de dispersión (2.24), en función de la longitud de onda L , a partir de la ec (2.23)

Sustituimos las ec's (2.5) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y (2.6) $k = \frac{2\pi}{L}$ en la ec. (2.23) y obtenemos

$$\frac{(2 \cdot \pi)^2}{T^2} = g \cdot \frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot h\right) \rightarrow L = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot h\right) \quad (q.e.d)$$

2.7 AGUAS PROFUNDAS Y SOMERAS

Se entiende por **aguas someras** aquellas que son poco profundas, también denominadas en el lenguaje anglo-sajón como *shallow waters*. No obstante, la profundidad a la que se encuentra una ola determinada es función de su longitud de onda. Precisaremos pues definir una profundidad adimensional h/L o d/L que nos permita señalar los límites de validez de estas simplificaciones (ver figura 2.6). De este modo, aguas someras serán aquellas para las que $h/L < 1/20$ (o bien $d/L < 1/25$ en la literatura anglosajona).

Recordando que en aguas someras $h \rightarrow 0$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tgh}(x) = x$ entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot h\right) = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot h\right) = \frac{g \cdot T^2}{L} \cdot h$$

Simplificando:

$$L^2 = g \cdot T^2 \cdot h \Rightarrow \frac{L^2}{T^2} = g \cdot h \Rightarrow c^2 = g \cdot h \Rightarrow c = \sqrt{g \cdot h} \quad (2.28)$$

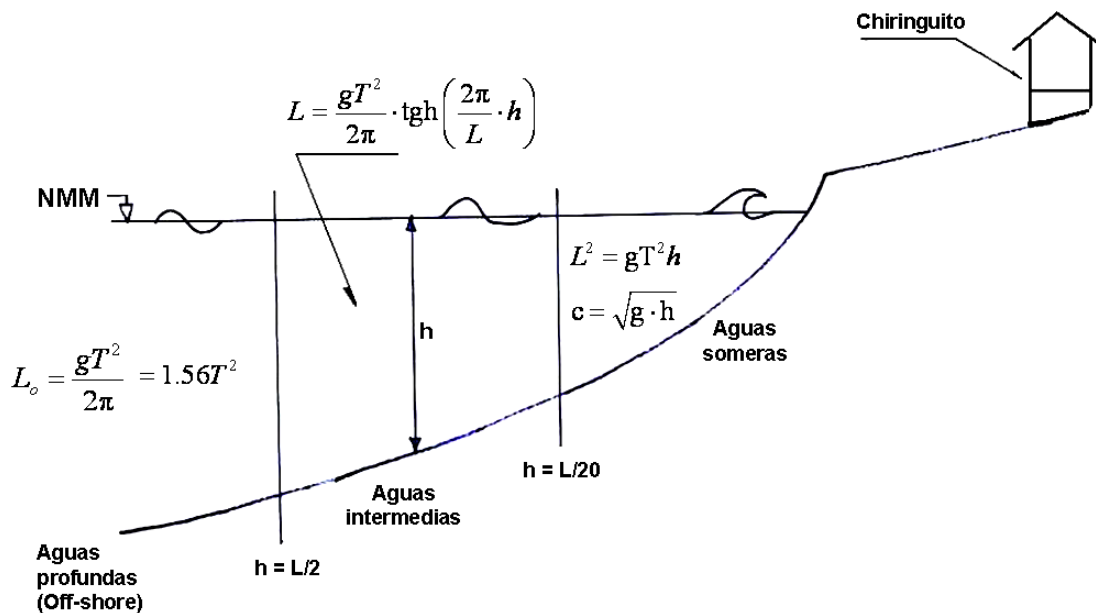


Figura 2.6 Delimitación de los campos de validez para aguas someras y profundas

Es importante hacer notar que la ec. 2.28 ($c = \sqrt{g \cdot h}$) sirve para $h < L/20$ o dicho de otra manera, para cuando $L > 20 \cdot h$. Es decir, para **ondas largas** cuya longitud de onda es mucho mayor que la profundidad a la que se desplazan. La marea o los tsunamis serían casos particulares de ondas que siempre viajan en aguas reducidas.

Las **aguas profundas** (*off-shore* o *deep water* en la literatura anglosajona) corresponden a profundidades superiores a la mitad de la longitud de onda ($h > L/2$). Cualquier valor relacionado con estas aguas se designará con el subíndice “o” (de off-shore) que en castellano se lee “sub cero”

Puesto que en aguas profundas $h \rightarrow \infty$ y recordando que $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh}(x) = 1$

$$L_o = \lim_{h \rightarrow \infty} L = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot h\right) = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)}$$

o bien usando el sistema MKS de unidades y sustituyendo $g = 9.81$ y $\pi = 3.14$ encontraremos L_o en metros introduciendo T en segundos mediante

$$L_o = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} = 1.56T^2 \quad (2.29)$$

A la zona de transición entre aguas profundas y aguas someras se la denomina de **aguas intermedias**.

Ejemplo 2.5 *Demuestra que la celeridad de la onda $c=L/T$ es directamente proporcional al periodo en contra de lo que pudiera parecer a priori.*

Efectivamente, utilizando la ec. 2.29:

$$c_o = \frac{L_o}{T} = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{T} = \frac{g \cdot T}{2\pi} = 1.56 \cdot T$$

Es decir, que cuanto mayor sea el periodo de una onda mayor será su celeridad.

Ejemplo 2.6 *¿A partir de qué profundidad se puede considerar que la marea es una onda larga en el Golfo de Cádiz? ¿Y para una onda de 10 segundos de periodo? Encuentra, para esta última, un valor aproximado de su velocidad y de su longitud de onda en el borde de la plataforma continental ($h=200m$) y algo más cerca de la orilla ($h=10m$). ¿Podemos usar en este último caso la fórmula simplificada para aguas someras?*

La marea en el golfo de Cádiz es semidiurna por lo que su periodo es de aproximadamente medio día lunar, unas 12.5 horas o 45000 segundos. La longitud de onda en grandes profundidades sería de acuerdo a (2.29)

$$L_o = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} = 1.56T^2 = 1.56 \cdot 45000^2 = 3159 \cdot 10^6 m$$

Por lo tanto, la onda de marea viajará en profundidades reducidas para

$$h < \frac{L}{20} = \frac{3159 \cdot 10^6}{20} = 158 \cdot 10^6 m$$

Así pues, en el Golfo de Cádiz⁶ la onda de marea se podrá considerar siempre una onda larga.

En cuanto a la onda de $T=10$ seg,

$$L_o = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} = 1.56T^2 = 1.56 \cdot 10^2 = 156m,$$

El límite de aguas profundas es $L_o/2=78m$, por lo que puesto que $h=200m > 78$ estaremos efectivamente en grandes profundidades y la celeridad de la onda

$$c_o = \frac{L_o}{T} = \frac{156m}{10s} = 15.6 m/s$$

Para encontrar el valor de la longitud de onda en la profundidad de 10 m, usaremos la fórmula aproximada (2.27)

$$L = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \sqrt{\operatorname{tgh}\left(\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot T^2} \cdot h\right)} = 1.56 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{\operatorname{tgh}\left(\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot 10^2} \cdot 10\right)} = 31.3m$$

En cuanto al límite de aguas poco profundas recordemos que es $L/20 = 31.3/20 \approx 1.5m$.

Dado que $h=10m > 1.5m$ no estamos en aguas reducidas sino intermedias

$$c = \frac{L}{T} = \frac{31.3m}{10s} = 3.1 m/s$$

⁶ Y en el resto del planeta dado que la mayor profundidad conocida, la fosa de las Aleutianas es de unos 11000 metros solamente.

Si hubiéramos utilizado en este caso la formulación aproximada de aguas someras hubiéramos cometido un error muy importante

$$c = \sqrt{g \cdot h} = \sqrt{9.81 \cdot 10} = 9.9 \text{ m/s}$$

2.8 MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS

2.8.1 Campo de velocidades

El campo de velocidades de las partículas se describe en el eje “x” con velocidad u y con w en el eje “z”. Las expresiones, que sirven para todo el fluido y no sólo para la superficie, se obtienen del gradiente del potencial ϕ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (2.30)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{sh[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.31)$$

Las direcciones del campo de velocidades de una partícula en la superficie del mar al paso de una Onda de Airy pueden observarse en la figura 2.7

El campo de aceleraciones de las partículas se obtendría derivando las velocidades, pero su cálculo no se incluye aquí por no ser necesario para este curso introductorio.

Ejemplo 2.7 Encuentra los valores máximos de la velocidad horizontal tanto en la superficie del mar como en el fondo y particulariza los resultados para una onda de amplitud $A=0.5\text{m}$, $T=8\text{seg}$ en una profundidad $h=10\text{m}$

El valor máximo de u (velocidad horizontal) en la superficie ($z=0$) se conseguirá cuando $\cos \theta = \cos(kx - \omega t) = 1$. Sustituyendo en la ec. 2.30

$$u|_{z=0} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[kh]}{sh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[kh]}{sh(kh)}$$

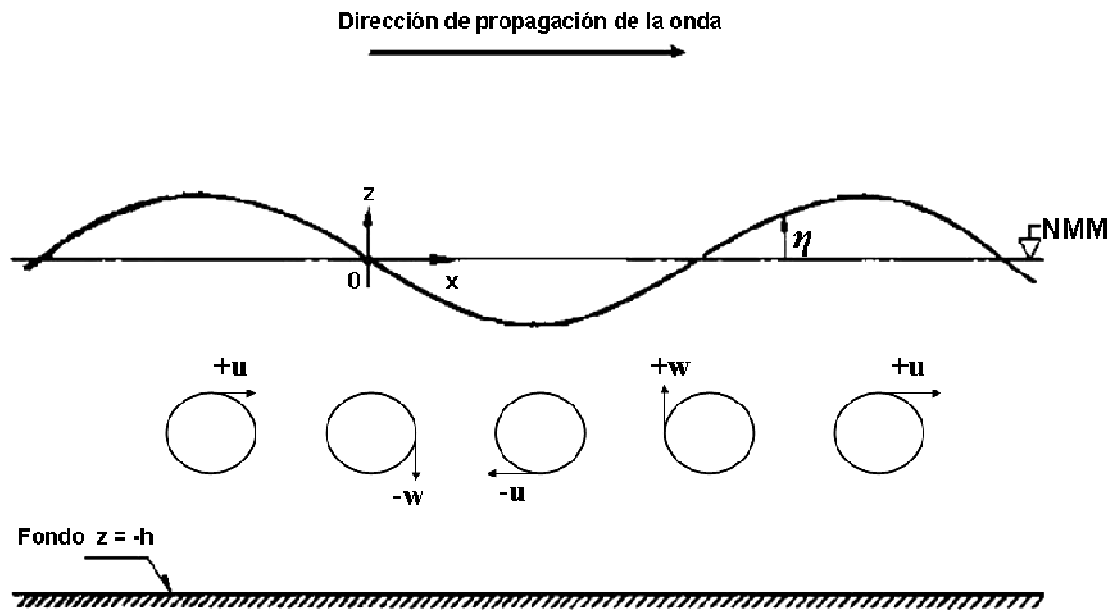


Figura 2.7 Direcciones del campo de velocidades de una partícula de agua en la superficie al paso de una Onda de Airy

En el fondo del mar ($z=-h$)

$$u|_{z=-h} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[k(-h+h)]}{sh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch(0)}{sh(kh)} \cdot 1 = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{1}{sh(kh)}$$

Ya que

$$ch(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \Rightarrow ch(0) = \frac{(e^0 + e^{-0})}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

En el caso de nuestra onda $A=0.5m$, $T=8seg$, $h=10m$ y aproximadamente (2.27)

$$L = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \sqrt{tgh\left(\frac{4 \cdot \pi^2}{g \cdot T^2} \cdot h\right)} = \frac{9.8 \cdot 8^2}{(2 \cdot \pi)} \cdot \sqrt{tgh\left(\frac{4 \cdot \pi^2}{9.8 \cdot 8^2} \cdot 10\right)} = 74.5m$$

$$Y \text{ por tanto } kh = \frac{2\pi}{L} \cdot h = \frac{2 \cdot 3.14}{74.5} \cdot 10 = 0.843$$

Si la amplitud es 0.5m, la altura vale $H=2A=1m$. Sustituyendo y operando⁷:

$$u|_{z=0} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[kh]}{sh(kh)} = \frac{1 \cdot \pi}{8} \cdot \frac{ch[0.843]}{sh(0.843)} = 0.393 \frac{1.38}{0.946} = 0.57 \text{ m/s}$$

$$u|_{z=-h} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{1}{sh(kh)} = \frac{1 \cdot \pi}{8} \cdot \frac{1}{sh(0.843)} = 0.393 \frac{1}{0.946} = 0.42 \text{ m/s}$$

2.8.2 Trayectorias de las partículas

Encontraremos las posiciones de las partículas integrando el campo de velocidades (ec's 2.30 y 2.31).

$$\vec{u} = (u, v) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned} x = \int u dt &= \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \int \cos(kx - \omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) = \\ &= -\frac{1}{2\pi/T} \cdot \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Esto es:

$$x = \int u dt = -\frac{H}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \quad (2.32)$$

Análogamente:

$$x = \int u dt = -\frac{H}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \quad z = \int w dt = +\frac{H}{2} \cdot \frac{sh[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (2.33)$$

En profundidades indefinidas (ver fig 2.8), las trayectorias de las partículas de agua corresponden a órbitas circulares, cuyo diámetro disminuye con h hasta que casi se anula para $h = L_0/2$.

⁷ En este ejercicio, conviene que el lector utilice su calculadora para acostumbrarse al uso de las funciones hiperbólicas. Recordar que un valor conocido, como $ch(0)=1$, nos permitirá comprobar si hemos acertado en el funcionamiento de las teclas. Posteriormente se practicará la utilización de las tablas incluidas al final de este capítulo

Cerca de la orilla, para profundidades intermedias o someras, las órbitas son elípticas. En este caso, al aumentar h disminuye la excentricidad de la elipse (se va achatando). En el fondo del mar lo que tenemos es ya simplemente un movimiento de vaivén.

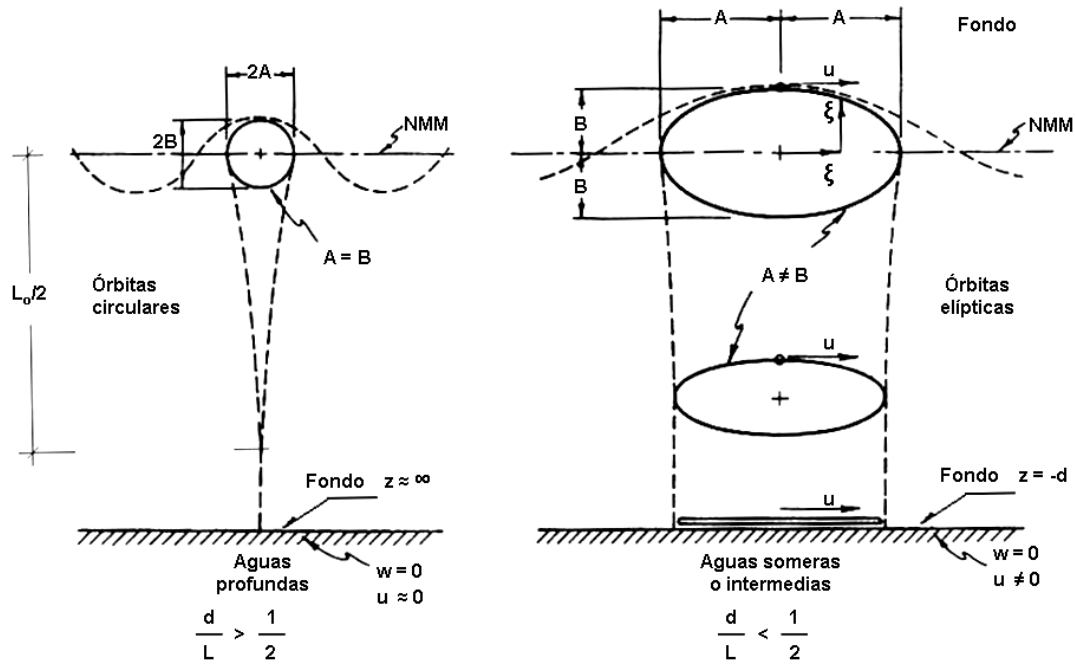


Figura 2.8 Desplazamiento de las partículas de agua en grandes profundidades (izquierda, órbitas circulares) y cerca de la orilla (derecha, elipses)

Ejemplo 2.8 Demuestra que las trayectorias de las partículas son elipses

Operamos con las ec's (2.32) y (2.33) despejando las funciones trigonométricas y elevándolas al cuadrado

$$\text{sen}^2(kx - \omega t) = \text{sen}^2\theta = \frac{x^2}{\left(-\frac{H}{2} \cdot \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)}\right)^2} = \frac{x^2}{A^2} \quad \text{donde} \quad A = \left(-\frac{H}{2} \cdot \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)}\right)$$

$$\cos^2(kx - \omega t) = \cos^2 \theta = \frac{z^2}{\left(\frac{H}{2} \cdot \frac{\text{sh}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)}\right)^2} = \frac{z^2}{B^2} \quad \text{donde} \quad B = \left(\frac{H}{2} \cdot \frac{\text{sh}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)}\right)$$

Sumando miembro a miembro las anteriores igualdades y puesto que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1$$

Ecuación de una elipse donde A y B son los semiejes horizontal y vertical respectivamente

2.9 LA PRESIÓN

La presión aparece en la ecuación de Bernouilli (2.11), con lo que despejando:

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

La sobrepresión dinámica p^+ por el paso de la ola será la variación de presión respecto a la hidrostática ($-\rho g z$). Por consiguiente y despreciando los términos cuadráticos, tenemos que $p^+ = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Sustituyendo el potencial por su expresión (2.26):

$$p^+ = \rho g \frac{H}{2} \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{ch}(kh)} \cos(kx - \omega t) = \rho g \eta \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{ch}(kh)} \quad (2.34)$$

Mientras que la presión hidrostática es nula en la superficie y aumenta con la profundidad a razón de 1 atmosfera cada 10 metros, la sobrepresión debida al oleaje disminuye con la profundidad y es máxima en la superficie (e igual al peso de la columna de agua de la ola, $p^+ = \rho g \eta$) (ver figura 2.9). Nótese que esa expresión puede permitirnos obtener el valor de la elevación del nivel del mar y por consiguiente de la altura de ola mediante un sensor que mida la presión.

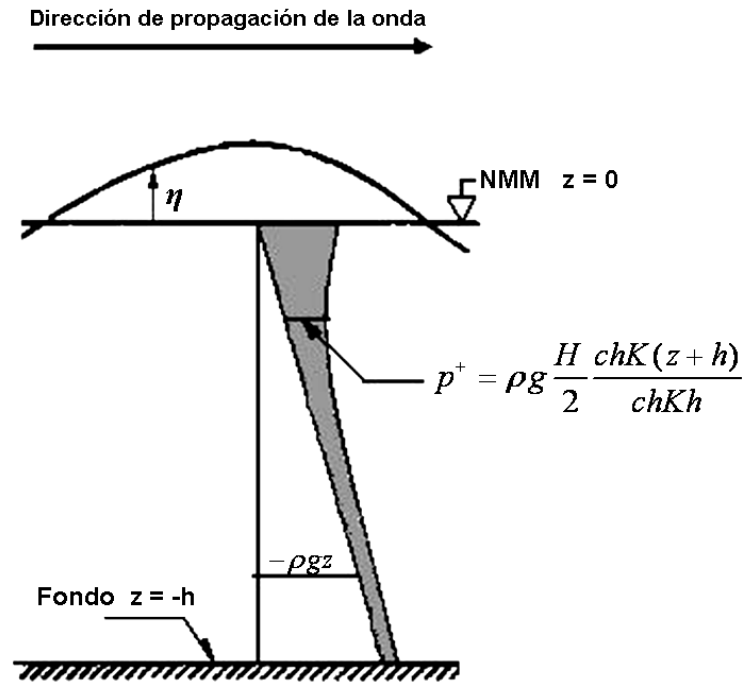


Figura 2.9 Esquema de la evolución de la presión hidrostática y de la sobrepresión con la profundidad

. **Ejemplo 2.9** *Calcula para la ola del ejemplo 2.6 el valor máximo de la presión hidrostática y de la sobrepresión tanto en la superficie como a 3, 6 y 10 m de profundidad.*

Tomaremos la densidad del agua del mar como 1025 kg/m^3 . Del ejemplo 2.6 obtenemos $k=0.0843$, $H=1\text{m}$, $h=10\text{m}$, $ch(kh)=1.38$

Profundidad $z(\text{m})$	Presión hidrostática $-\rho g z \text{ (N/m}^2\text{)}$	Sobrepresión $(\rho g \frac{H}{2} \frac{ch[k(z+h)]}{ch(kh)})$
0	0	5022
-3	30165	4291
-6	60331	3847
-10	100550	3639

2.10 ENERGÍA

2.10.1 Energía Potencial (E_p):

Para encontrar la energía potencial integraremos la columna de agua de la ola, desde el NMM hasta la superficie

$$E_p(\theta) = \int_0^{\eta} \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \eta^2$$

Promediaremos a lo largo de toda una fase θ (de 0 a 2π) y teniendo en cuenta que

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \theta$$

$$\langle E_p(\theta) \rangle = \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 = \frac{1}{2} \rho g \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{H^2}{4} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{16} \rho g H^2$$

2.10.2 Energía Cinética (E_c):

De manera similar, pero integrando en toda la columna de agua desde el fondo hasta la superficie y teniendo en cuenta las expresiones 2.30 y 2.31

$$E_c(\theta) = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) dz$$

$$\langle E_c(\theta) \rangle = \frac{1}{16} \rho g H^2$$

2.10.3 Energía total del oleaje

La energía total del oleaje será la suma de la energía cinética más la potencial

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (2.35)$$

Ejemplo 2.10 *Calcula y compara las energías de oleajes de 1, 2 y 3 m de altura*

Usando la fórmula 2.35 y recordando que la densidad del agua del mar es 1025 kg/m^3 :

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 = \frac{1}{8} \cdot 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot H^2 = 1257 \cdot H^2 \text{ julios/m}^2$$

Al ser la energía función del cuadrado de la altura de ola, la energía de $H=2m$ es 4 veces la de $H=1m$, la de $H=3m$ es 9 veces la de $H=1m$, ... la de $H=10m$ sería 100 veces superior a la de $H=1m$, etc.

$H (m)$	$E (julios/m^2)$
1	1257
2	5028
3	11313

2.10.4 Flujo de energía

Recordemos que el flujo de una variable es el producto de dicha variable por la velocidad a la que se desplaza. Así pues, el flujo de energía (E_f) es el producto de la energía por la velocidad a la que se desplaza dicha energía⁸. Así pues,

$$E_f = E \cdot c_g \quad (2.36)$$

Donde c_g , la **celeridad de grupo**, es la velocidad con la que se transmite la energía

$$c_g = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2kh}{sh(2kh)} \right) = \frac{c}{2} \cdot (1 + G) \quad (2.37)$$

Y a G se le conoce como número generador y viene tabulado para facilitar los cálculos

Al igual que con la longitud de onda en la relación de dispersión, también podemos encontrar fórmulas simplificadas para la celeridad de grupo.

En aguas profundas,

$$c_{g_o} = \frac{c_o}{2} \quad (2.38)$$

mientras que en aguas reducidas

$$c_g = c = \sqrt{gh} \quad (2.39)$$

⁸ Es, asimismo, la energía que se transmite a través de una sección vertical fija, de ancho unidad, perpendicularmente al frente de onda.

Ejemplo 2.11 Demuestra las simplificaciones de la celeridad de grupo 2.38 y 2.39 para aguas profundas y someras respectivamente

En aguas profundas, tomando límites aparece una indeterminación del tipo ∞/∞ , así que aplicaremos la regla de L'Hopital

$$Cg_o = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2kh}{sh(2kh)} \right) = \frac{c_o}{2} \cdot \left(1 + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2kh}{sh(2kh)} \right) = \frac{c_o}{2} \cdot \left(1 + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{2k}{2k \cdot ch(2kh)} \right) = \frac{c_o}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{c_o}{2}$$

En aguas someras $\lim_{h \rightarrow 0} sh(2kh) = 2kh$

Comprobémoslo, desarrollando las exponenciales en serie de McLaurin

Recordando que $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0} sh(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

Operando:

$$Cg = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2kh}{sh(2kh)} \right) = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2kh}{2kh} \right) = \frac{c}{2} \cdot (1+1) = c$$

2.11 PROBLEMAS RESUELTOS

2.1. ¿Se puede especificar una onda de pequeña amplitud por h , L y T ? Justificar la respuesta.

El potencial del campo de velocidades de una onda de pequeña amplitud es (ec. 2.26):

$$\phi = \frac{H \cdot c}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot sen(kx - \omega t)$$

Donde:

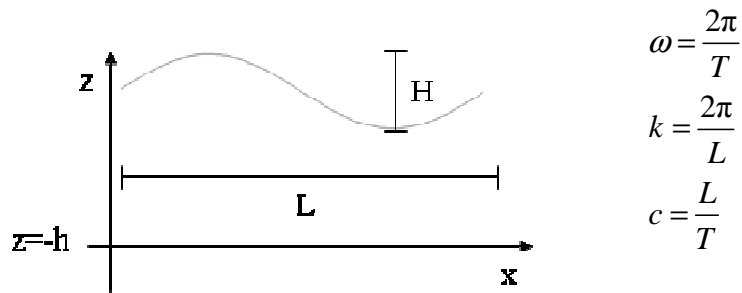


Figura 2.10 Variables que definen una onda de Airy

El potencial queda definido cuando se conocen las siguientes variables: H , c , k , h y ω . Sin embargo, estas variables no son independientes, pues existen dos ecuaciones que las relacionan:

La relación de dispersión: $\omega^2 = g \cdot k \cdot \operatorname{tgh}(k \cdot h)$ (a)

La definición de la celeridad de onda $c = \frac{L}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k}$ (b)

Cualquier combinación de tres parámetros servirá para especificar la onda siempre y cuando sean independientes. Veamos si h , L y T lo son. Sustituyendo en (a):

$$\frac{(2\pi)^2}{T^2} = g \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi}{L} \cdot h\right)$$

$$T^2 = \frac{2\pi \cdot L}{g} \cdot \frac{1}{\operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi}{L} \cdot h\right)}$$

$T = f(h, L)$ luego NO cumple

Deberán utilizarse siempre H y h para definir una onda. De la terna restante c , L o T , suele utilizarse T por ser la de más fácil medida.

2.2. Para encontrar Lo (2.29) fue necesario suponer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh}(x) = 1$. Demuéstralo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1/e^x}{e^x + 1/e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

2.3. Si una onda de pequeña amplitud que viaja hacia la derecha se puede expresar por $\eta(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t)$ y se refleja en una pared vertical, ¿Cuál será la expresión matemática de la superficie libre al superponer ambas ondas?

Si la onda incidente viaja hacia la derecha, su expresión es:

$$\text{Onda incidente: } \eta_i(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

Si no se pierde energía en la reflexión, la onda que viaja hacia la izquierda tendrá la misma amplitud, longitud de onda y periodo que la incidente por lo que será:

$$\text{Onda reflejada: } \eta_r(x,t) = A \cdot \cos(kx + \omega t)$$

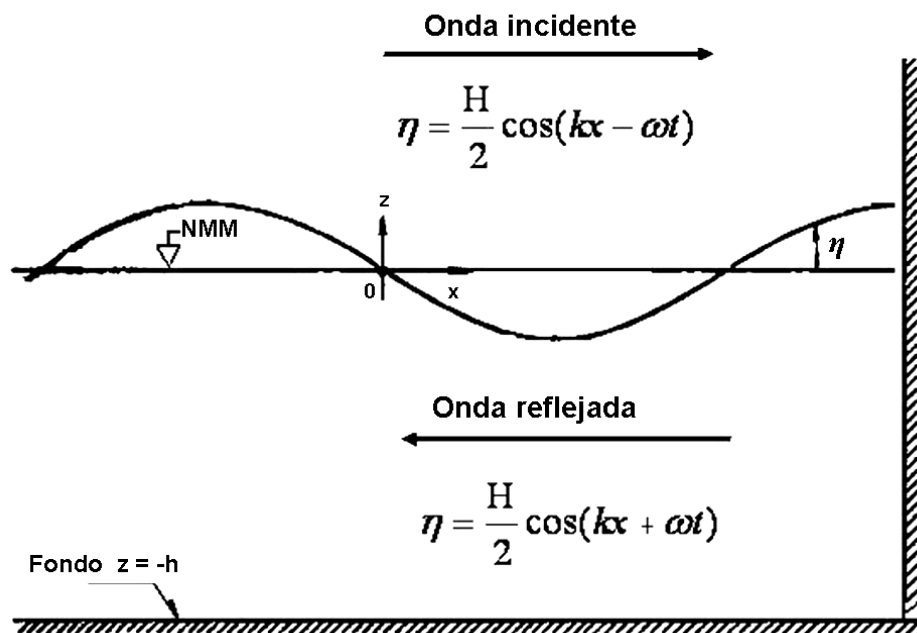


Figura 2.11 Onda reflejada sobre una pared vertical

La onda resultante de la interacción de ambas será:

$$\eta_T(x,t) = \eta_i(x,t) + \eta_r(x,t) = A [\cos (kx-\omega t) + \cos (kx+\omega t)]$$

Recordando que $\cos (a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

Y que $\cos (a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$$\eta_T(x,t) = A [\cos kx \cdot \cos \omega t + \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t + \cos kx \cdot \cos \omega t - \operatorname{sen} kx \cdot \operatorname{sen} \omega t] = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t$$

Al desaparecer el término $\cos (kx-\omega t)$ ya no tenemos una onda que se desplaza, sino únicamente oscilaciones de la superficie del agua en altura, de ahí su nombre: **onda estacionaria**. Nótese que la amplitud de la oscilación resultante es 2 veces la amplitud de la onda incidente inicial.

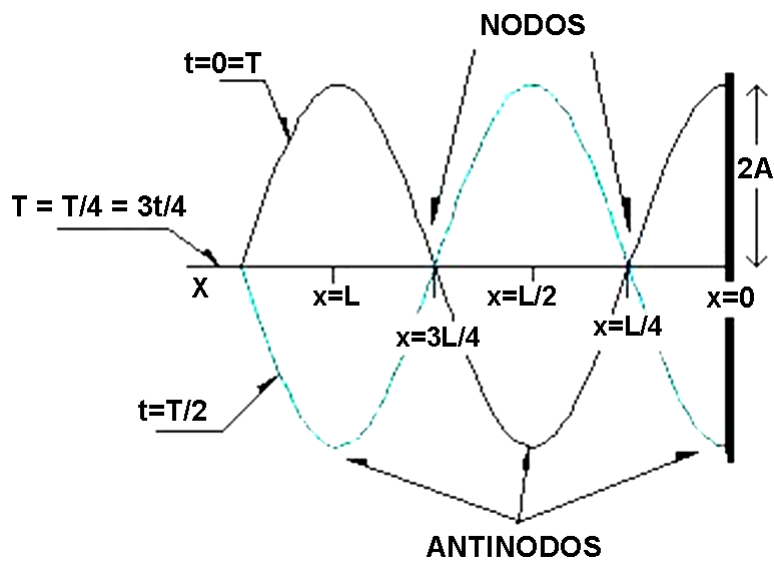


Figura 2.12 Ubicación de nodos y antinodos en una onda estacionaria frente a un muelle

- Los puntos sobre el eje x para los que para cualquier instante de tiempo $\eta=0$ se denominan **nodos**. Determinaremos su posición en relación con la pared ($x=0$):

$$\eta = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t = 0, \quad \forall t \text{ (para cualquier } t)$$

$\eta=0 \Rightarrow$ el único valor que puede anularse siempre es el que no depende de t

$$2A = \text{cte.} \Rightarrow \cos kx = 0 \Leftrightarrow kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2, \dots (2n+1) \cdot \pi/2 \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Dado que } k = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow \frac{2\pi}{L} \cdot x = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1) \cdot \frac{L}{4} \quad n=0,1,2,3\dots$$

\Rightarrow Los nodos están pues en $x=L/4, 3L/4, 5L/4 \dots$ (ver figura)

- Los **antinodos** son, por contra, los puntos cuya amplitud es siempre máxima. Esto es:

$$\eta = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t = \text{máximo}, \forall t$$

\Rightarrow Para que η sea siempre máxima requiere que lo sea $\cos kx$

$$\Rightarrow \cos kx = \text{máx} \Rightarrow \cos kx = 1 \Rightarrow kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots n \cdot \pi \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Dado que } k = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow \frac{2\pi}{L} \cdot x = n \cdot \pi \Rightarrow x = n \cdot \frac{L}{2} \quad n=0,1,2,3\dots$$

\Rightarrow Los antinodos están pues en $x=0, L/2, L, 3L/2 \dots$ (ver figura)

Así pues, el primer antinodo está en la pared. En el caso de que dicha pared reflejante fuera el muelle de un puerto, vemos que el punto de máximo movimiento vertical coincide con el punto de amarre de los buques. El problema consiguiente es una posible rotura de estachas junto con una dificultad añadida para las grúas de retirada de la carga del barco. Las soluciones pasan por diseñar muelles no reflejantes y lograr el que la ola incidente sea lo menor posible.

2.4. Ídem que el caso anterior pero para dos trenes de onda que se propagan en la misma dirección, de la misma amplitud, pero de periodos y longitudes de onda ligeramente diferentes.

En este caso, las dos ondas viajan hacia la derecha con la misma amplitud A

$$\eta_1(x,t) = A \cdot \cos (k_1x - \omega_1t)$$

$$\eta_2(x,t) = A \cdot \cos (k_2x - \omega_2t)$$

Puesto que las longitudes de onda y los periodos son ligeramente diferentes

$$\Rightarrow k_1 - k_2 = \Delta k \quad \text{y} \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta \omega \quad \text{o lo que es lo mismo}$$

$$k_1 = k + \Delta k/2 \quad \omega_1 = \omega + \Delta \omega/2$$

$$k_2 = k - \Delta k/2 \quad \omega_2 = \omega - \Delta \omega/2$$

Donde k y ω son los valores medios de (k_1, k_2) y de (ω_1, ω_2) respectivamente

La onda resultante de la interacción de ambas será:

$$\eta_T = \eta_1 + \eta_2 = A \cdot \cos[(k + \Delta k/2) \cdot x - (\omega + \Delta \omega/2) \cdot t] + A \cdot \cos[(k - \Delta k/2) \cdot x - (\omega - \Delta \omega/2) \cdot t]$$

$$\eta_T = A \cdot [\cos[(k + \Delta k/2) \cdot x - (\omega + \Delta \omega/2) \cdot t] + \cos[(k - \Delta k/2) \cdot x - (\omega - \Delta \omega/2) \cdot t]]$$

Por trigonometría sabemos que:

$$\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}\right)$$

Entonces resulta:

$$\eta_T = 2A \cdot \cos\frac{1}{2} \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) \cdot t + \left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot x - \left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) \cdot t \right] \cdot \cos\frac{1}{2} \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) \cdot t - \left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) \cdot x + \left(\omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) \cdot t \right]$$

Simplificando:

$$\eta_T = 2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

Donde, si $\cos(kx - \omega t)$ es la onda progresiva entonces $2A \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right)$ es una

amplitud modulada que varía entre 0 y $2A$ (ver figura). Esta es la **onda de grupo** y su

celeridad es $c_g = \Delta \omega / \Delta k$. También se las conoce como ondas infragravitatorias y su

periodo varía entre 30 segundos y 5 minutos (ver fig. 2.1)

Vemos en la figura adjunta que cuando las dos ondas (η_1 y η_2) están en fase, las amplitudes se suman y las olas tienen una altura doble de la que tenían por separado. Por el contrario, cuando están desfasadas 180° , las amplitudes se anulan. Tenemos así unos lapsos de mar muy agitada seguidos de otros en calma y todo ello de manera periódica. Esta estructura del oleaje es la que ha dado lugar al comentario popular de que las olas grandes vienen de tres en tres (las tres Marías). Este proceso es muy típico cuando la zona de generación del oleaje está suficientemente lejos de la orilla. Ello permite a las olas agruparse por celeridades (o periodos) casi idénticos, de manera similar a lo expresado en el enunciado del ejercicio.

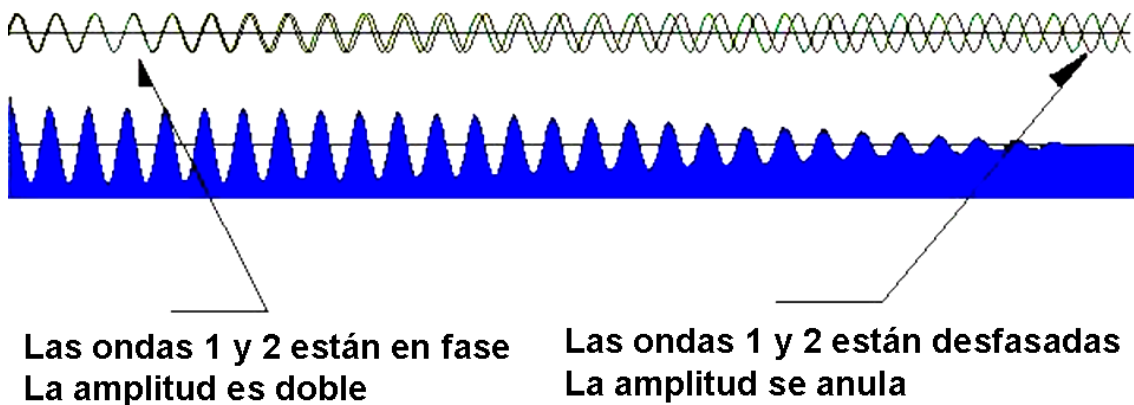


Figura 2.13 Resultado de la confluencia de dos ondas de similar periodo y longitud de onda

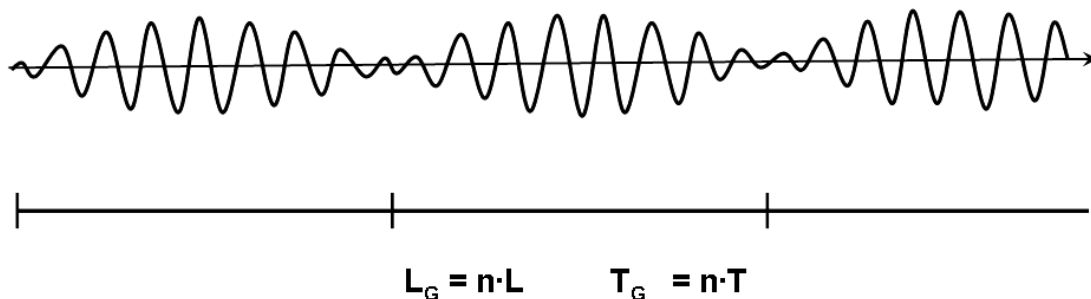


Figura 2.14 Onda de grupo o infragravitatoria

2.5. Supongamos que una borrasca ha generado una tormenta con un frente de 100 km que incide perpendicularmente sobre una costa de igual longitud. Consideremos que la ola tipo se puede representar como una onda de Airy con $H=2.5$ m, $T=10$ s, $h=10.1$ m. Calcular la energía por segundo que llega a la costa.

Nos piden energía por unidad de tiempo, luego, estamos hablando de Potencia (Flujo de energía E_f):

$$E_f = E \cdot c_g = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) = E \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot (1+G)$$

Para usar la tabla de funciones hiperbólicas (ver apéndice 2.1 al final del capítulo) debemos entrar con $\frac{h}{L_o}$ y puesto que:

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} = \frac{9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 10^2 \text{ s}^2}{2\pi} = 156 \text{ m}$$

Entonces:

$$\frac{h}{L_o} = \frac{10.1}{156} = 0.065$$

Buscando en la tabla:

$$\text{tgh}(kh) = 0.595$$

$$\frac{h}{L} = 0.109 \rightarrow L = \frac{h}{0.109} = \frac{10.1}{0.109} = 92.7 \text{ m} \rightarrow c = \frac{L}{T} = \frac{92.7 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 9.27 \text{ m/s}$$

$$kh = 0.686$$

$$\text{sh}(kh) = 0.741$$

$$G = 0.744$$

Sustituyendo:

$$E_f = \frac{1}{8} \cdot 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2.5^2 \text{m}^{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9.27 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (1 + 0.744) = 63500 \text{ W/m lineal}$$

Al tratarse de 300 km de longitud del frente de onda, la potencia total será:

$$\text{Potencia} = E_f \cdot L = 63500 \frac{\text{W}}{\text{m}} \cdot 300000 \text{ m} = 1.91 \cdot 10^{10} \text{ W}$$

$$\text{Potencia} = 19100 \text{ MW}$$

Como orden de magnitud cabe recordar que la potencia de una central nuclear standard es del orden de 1.000 Megawatios.

2.6. Utilizando las tablas numéricas para ondas de pequeña amplitud y para una ola tal que: $H=1.0 \text{ m}$, $T=8.0 \text{ s}$, $h=11.0 \text{ m}$. Determinar:

a) L , c , c_g , E , E_f

b) u , w , presión en la superficie libre y en el fondo.

a) Al igual que en el ejercicio anterior, debemos entrar en las tablas con $\frac{h}{L_o}$:

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} = \frac{9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 8.0^2 \text{ s}^2}{2\pi} = 100.0 \text{ m}$$

$$\frac{h}{L_o} = \frac{11.0}{100.0} = 0.11 \rightarrow \frac{h}{L} = 0.15 \rightarrow L = \frac{h}{0.15} = \frac{11.0}{0.15} = 73.3 \text{ m}$$

$$\text{tabla} \rightarrow kh = 0.94 \rightarrow \text{sh}(kh) = 1.08 \rightarrow \text{ch}(kh) = 1.48 \rightarrow G = 0.587$$

$$c = \frac{L}{T} = \frac{73.3 \text{ m}}{8.0 \text{ s}} = 9.2 \text{ m/s} \rightarrow c_g = \frac{c}{2} \cdot (1 + G) = \frac{9.2 \text{ m/s}}{2} \cdot (1 + 0.587) = 7.3 \text{ m/s}$$

$$E = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 = \frac{1}{8} \cdot 1025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1.0^2 \text{ m}^2 = 1257 \text{ J/m}^2$$

$$E_f = E \cdot c_g = 1257 \text{ J/m}^2 \cdot 7.3 \text{ m/s} = 9176 \text{ W/m}$$

b) Recordando las ecuaciones 2.30 , 2.31 y 2.34:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{sh}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)} \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$p^+ = \rho g \frac{H}{2} \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{ch}(kh)} \cos(kx - \omega t) = \rho g \eta \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{ch}(kh)}$$

Calculamos k y ω :

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{73.3} = 0.086 \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8.0} = 0.785$$

En la superficie libre $z = 0$:

$$u = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{ch}(kh)}{\text{sh}(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) = \frac{\pi \cdot 1.0}{8.0} \cdot \frac{1.48}{1.08} \cdot \cos(kx - \omega t) = 0.53 \cdot \cos(0.086 \cdot x - 0.785 \cdot t) \text{ m/s}$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{sh}(kh)}{\text{sh}(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) = \frac{\pi \cdot 1.0}{8.0} \cdot 1 \cdot \sin(kx - \omega t) = 0.39 \cdot \sin(0.086 \cdot x - 0.785 \cdot t) \text{ m/s}$$

$$p^+ = 1025 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.0}{2} \cdot \frac{\text{ch}(kh)}{\text{ch}(kh)} \cdot \cos \theta = 5028 \cdot \cos(0.086 \cdot x - 0.785 \cdot t) \text{ N/m}^2$$

En el fondo $z = -h$:

$$u = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{ch}(0)}{\text{sh}(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) = \frac{\pi \cdot 1.0}{8.0} \cdot \frac{1.0}{1.08} \cdot \cos(kx - \omega t) = 0.36 \cdot \cos(0.086 \cdot x - 0.785 \cdot t) \text{ m/s}$$

$$w = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{sh}(0)}{\text{sh}(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) = \frac{\pi \cdot 1.0}{8.0} \cdot 0 \cdot \sin(kx - \omega t) = 0 \text{ m/s}$$

$$p^+ = 1025 \cdot 9.81 \cdot \frac{1.0}{2} \cdot \frac{\text{ch}(0)}{\text{ch}(kh)} \cdot \cos \theta = 3397 \cdot \cos(0.086 \cdot x - 0.785 \cdot t) \text{ N/m}^2$$

2.7. Demostrar que el límite de $\operatorname{tgh}(x)=x$ cuando x tiende a 0

De modo similar al ejemplo 2.11, hay que demostrar que en aguas someras

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tgh}(x) = x$$

Utilizando los desarrollos en serie de McLaurin para las exponenciales:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots$$

Y despreciando los términos cuadráticos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tgh}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1+x+\dots) - (1-x+\dots)]}{[(1+x+\dots) + (1-x+\dots)]} = \frac{2x}{2} = x \quad (q.e.d.)$$

2.8. Una borrasca situada a 1000 km de nuestro litoral ha generado olas de entre 5 a 10 seg de periodo. ¿Qué olas llegarán primero a nuestra costa? ¿Cuándo?

Lo primero que debemos de tener en cuenta es que las olas generadas en alta mar no son las mismas que llegan a nuestras playas. Al viajar desde la zona de bajas presiones, cruzan una superficie de océano en calma donde van cediendo la energía almacenada por el viento hasta que de manera gradual se van disipando. En esas zonas de calma, donde no llegó a actuar la borrasca, se van generando nuevas ondas con la energía cedida y de características similares a las que pasaron en un principio. Así, las olas que llegan a nuestra costa son las “tataranietas” de las generadas por el temporal. Como consecuencia, la velocidad neta con la que la energía del oleaje se traslada (conocida como celeridad de grupo) es inferior a la celeridad de onda. Su cálculo se efectuará en general para una profundidad h mediante la ec. 2.37.

$$c_g = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2kh}{sh(2kh)} \right) = \frac{c}{2} \cdot (1 + G)$$

Sin embargo, la distancia que estas ondas viajan en grandes profundidades es comparativamente mucho mayor a la que recorren en profundidades intermedias o

reducidas, por lo que en primera aproximación podremos utilizar la simplificación de la ec. 2.38

$$c_{g_o} = \frac{c_o}{2}$$

En segundo lugar, es imprescindible recordar (ejemplo 2.5) que la celeridad de la onda $c=L/T$ es directamente proporcional al periodo

$$c_o = \frac{L_o}{T} = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{T} = \frac{g \cdot T}{2\pi} = 1.56 \cdot T$$

En nuestro caso, serán las ondas de 10 segundos las de mayor celeridad y, por tanto, las que lleguen primero a la orilla.

$$c_o = 1.56 \cdot T = 1.56 \cdot 10 = 15.6 \text{ m/s} \Rightarrow c_{g_o} = \frac{c_o}{2} = \frac{15.6}{2} = 7.8 \text{ m/s}$$

Para saber cuánto tardarán, basta aplicar

$$\text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} \approx \frac{1000 \text{ km}}{c_{g_o}} = \frac{10^6 \text{ m}}{7.8 \text{ m/s}} = 128200 \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 35.6 \text{ h} \approx 1.5 \text{ dias}$$

2.9. Demuestra que las trayectorias de las partículas de agua generadas por una onda de Airy son círculos lejos de la orilla (en grandes profundidades u offshore)

De modo parecido al usado en el ejemplo 2.8, particularizaremos las ec's (2.32) y (2.33) para grandes profundidades ($h \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} x_o &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[-\frac{H}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \text{sen}(\theta) \right] = -\frac{H}{2} \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{(e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}) / 2}{(e^{kh} - e^{-kh}) / 2} \right] = \\ &= -\frac{H}{2} \text{sen}(\theta) \cdot \left[\frac{e^{k(z+h)}}{e^{kh}} \right] = -\frac{H}{2} \text{sen}(\theta) \cdot e^{k(z+h)-kh} = -\frac{H}{2} \text{sen}(\theta) \cdot e^{kz} \\ z_o &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[+\frac{H}{2} \cdot \frac{sh[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \cos(\theta) \right] = \frac{H}{2} \cos(\theta) \cdot e^{kz} \end{aligned}$$

Despejamos las funciones trigonométricas y elevamos al cuadrado

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{x^2}{\left(-\frac{H}{2} \cdot e^{kz}\right)^2} \quad \cos^2 \theta = \frac{z^2}{\left(\frac{H}{2} \cdot e^{kz}\right)^2}$$

Sumando miembro a miembro las anteriores igualdades y puesto que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{H}{2} \cdot e^{kz}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{H}{2} \cdot e^{kz}\right)^2} = 1$$

Ecuación de una circunferencia con radio igual a $\left(\frac{H}{2} \cdot e^{kz}\right)$

En el caso particular $z=0$ (superficie) el radio R valdrá $\frac{H}{2}$

2.10. Dada una dársena con una distancia “l” entre muelles verticales que propician la creación de una onda estacionaria, calcula su periodo de resonancia y dibuja un esquema explicativo. Estudia el caso particular de un puerto deportivo con una dársena $h=6m$ y $l=50m$. ¿Qué problemas podrían generarse a los buques amarrados?

Una onda estacionaria en resonancia es aquella que induce la máxima elevación del nivel del agua en la pared vertical del muelle. Ello significa que la mayor parte del agua de la dársena está subiendo por una de las paredes y, por consiguiente, está bajando en la otra. Es decir, que la cresta de la onda está en un muelle y el seno de la onda en el opuesto. Puede producirse cuando el periodo de la onda es similar al de resonancia. Vamos a dibujar la dársena con la onda estacionaria.

Del esquema se deduce que la distancia entre los muelles verticales coincide con la semilongitud de onda. Así pues y suponiendo que estamos en profundidades reducidas

$$\text{profndidades reducidas} \Leftrightarrow L \geq 20 \cdot h = 20 \cdot 6 = 120m$$

$$l = \frac{L}{2} \quad \text{además, } c = \frac{L}{T} = \sqrt{g \cdot h} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{T}{2} \sqrt{g \cdot h} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2l}{\sqrt{g \cdot h}}$$

$$T = \frac{2l}{\sqrt{g \cdot h}} = \frac{2 \cdot 50m}{\sqrt{9.8m/s^2 \cdot 6m}} = 13.1s$$

Al tratarse de un periodo con una probabilidad de ocurrencia no despreciable, se debería proceder al rediseño de la dársena (por ejemplo aumentando el ancho l)

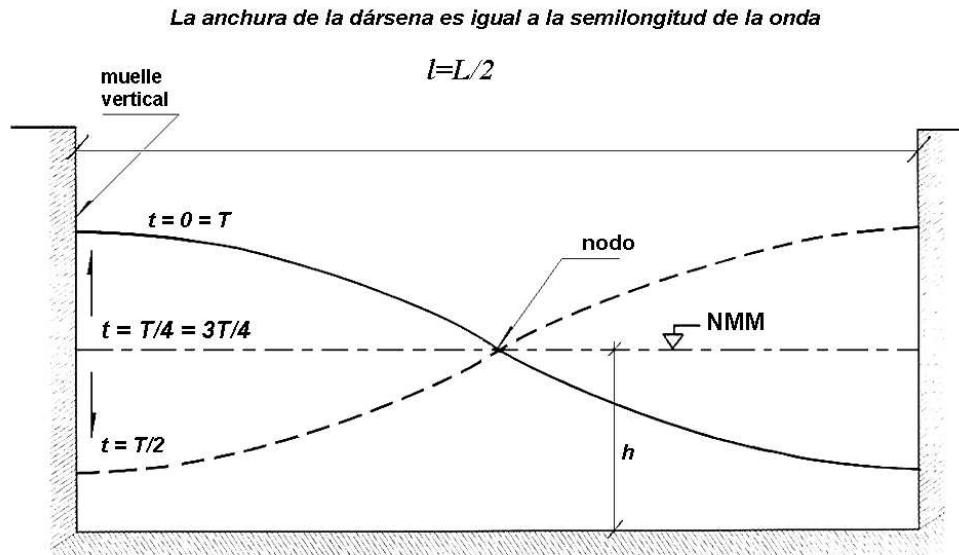


Figura 2.15 Onda en resonancia entre muelles

El problema de la onda estacionaria estriba en que el antinodo se genera pegado al muelle vertical. Ello supone que las amarras pueden romperse. Además, si la onda entra en resonancia, puede suceder que el barco sobrepase el cantil y quede varado sobre el muelle en la cresta del antinodo. O bien, que choque con el fondo y sufra daños en el casco durante el seno.

2.11. Ídem que el ejercicio anterior pero en un puerto abierto al mar, con una distancia “ l ” entre la bocana y el muelle vertical.

De manera similar al caso anterior, dibujamos una sección longitudinal del puerto. Del esquema se deduce que la distancia entre el muelle vertical y la bocana del puerto coincide con la cuarta parte de la longitud de onda. De este modo:

$$l = \frac{L}{4} \quad \text{además,} \quad c = \frac{L}{T} = \sqrt{g \cdot h} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{T}{4} \sqrt{g \cdot h} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{4l}{\sqrt{g \cdot h}}$$

Particularizando:

$$T = \frac{4l}{\sqrt{g \cdot h}} = \frac{4 \cdot 50m}{\sqrt{9.8m/s^2 \cdot 6m}} = 26.1s$$

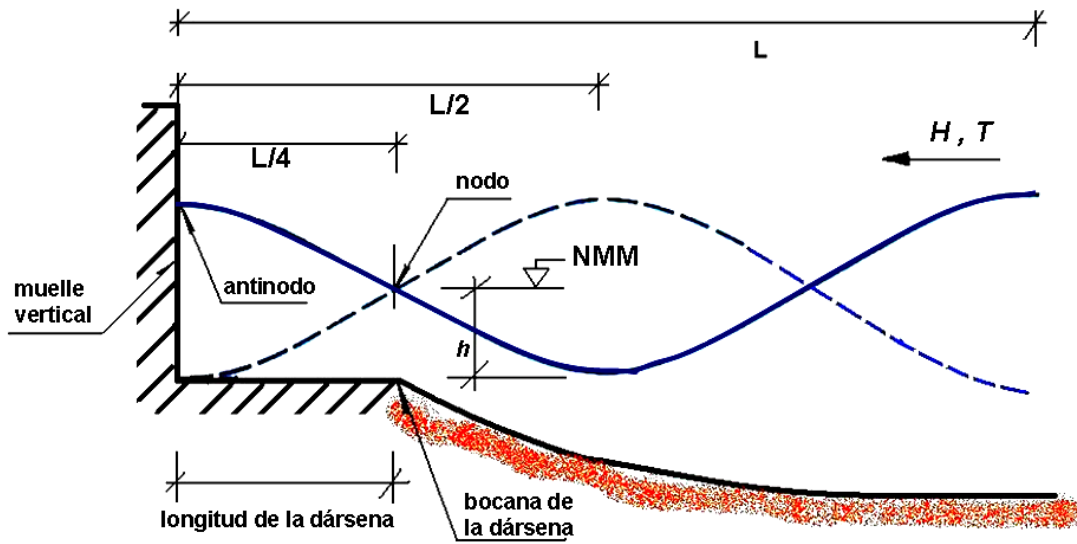


Figura 2.16 Onda en resonancia en un puerto abierto al mar

APÉNDICE 2.1 - TABLA DE LA ONDA DE AIRY O SINUSOIDAL

h/Lo	tanh kh	h/L	kh	senh kh	cosh kh	G	Ks
0,000	0,000	0,0000	0,000	0,000	1,000	1,000	∞
0,002	0,112	0,0179	0,112	0,113	1,006	0,992	2,120
0,004	0,158	0,0253	0,159	0,160	1,013	0,983	1,786
0,006	0,193	0,0311	0,195	0,197	1,019	0,975	1,620
0,008	0,222	0,0360	0,226	0,228	1,026	0,967	1,513
0,010	0,248	0,0403	0,253	0,256	1,032	0,959	1,434
0,015	0,302	0,0496	0,312	0,317	1,049	0,938	1,306
0,020	0,347	0,0576	0,362	0,370	1,066	0,918	1,225
0,025	0,386	0,0648	0,407	0,418	1,084	0,897	1,169
0,030	0,420	0,0713	0,448	0,463	1,102	0,878	1,125
0,035	0,452	0,0775	0,487	0,506	1,121	0,858	1,092
0,040	0,480	0,0833	0,523	0,548	1,140	0,838	1,064
0,045	0,506	0,0888	0,558	0,587	1,160	0,819	1,042
0,050	0,531	0,0942	0,592	0,627	1,180	0,800	1,023
0,055	0,554	0,0993	0,624	0,665	1,201	0,781	1,007
0,060	0,574	0,1040	0,653	0,701	1,221	0,763	0,991
0,065	0,595	0,1090	0,685	0,740	1,244	0,744	0,980
0,070	0,615	0,1140	0,716	0,779	1,268	0,725	0,972
0,075	0,634	0,1190	0,748	0,819	1,293	0,706	0,964
0,080	0,649	0,1230	0,773	0,852	1,314	0,690	0,954
0,085	0,666	0,1280	0,804	0,894	1,341	0,671	0,949
0,090	0,680	0,1320	0,829	0,928	1,364	0,655	0,941
0,095	0,697	0,1370	0,861	0,971	1,394	0,636	0,939
0,10	0,709	0,1410	0,886	1,006	1,419	0,620	0,933
0,11	0,736	0,1500	0,942	1,088	1,478	0,586	0,927
0,12	0,759	0,1580	0,993	1,164	1,535	0,556	0,920
0,13	0,782	0,1670	1,049	1,253	1,603	0,523	0,919
0,14	0,800	0,1750	1,100	1,335	1,668	0,494	0,915
0,15	0,818	0,1830	1,150	1,420	1,737	0,466	0,912
0,16	0,836	0,1920	1,206	1,521	1,820	0,436	0,914
0,17	0,850	0,2000	1,257	1,614	1,899	0,410	0,913
0,18	0,863	0,2080	1,307	1,712	1,983	0,385	0,913
0,19	0,862	0,2070	1,301	1,700	1,972	0,388	0,886
0,20	0,888	0,2250	1,414	1,934	2,177	0,336	0,918

h/Lo	tanh kh	h/L	kh	senh kh	cosh kh	G	Ks
0,20	0,888	0,2250	1,414	1,934	2,177	0,336	0,918
0,21	0,900	0,2340	1,470	2,060	2,290	0,312	0,922
0,22	0,909	0,2420	1,521	2,178	2,397	0,291	0,923
0,23	0,918	0,2510	1,577	2,317	2,524	0,270	0,927
0,24	0,926	0,2590	1,627	2,447	2,643	0,252	0,929
0,25	0,933	0,2680	1,684	2,600	2,786	0,232	0,933
0,26	0,940	0,2770	1,740	2,762	2,938	0,214	0,937
0,27	0,946	0,2850	1,791	2,913	3,080	0,200	0,938
0,28	0,951	0,2940	1,847	3,092	3,250	0,184	0,942
0,29	0,957	0,3030	1,904	3,281	3,430	0,169	0,945
0,30	0,961	0,3120	1,960	3,481	3,621	0,156	0,949
0,31	0,965	0,3210	2,017	3,691	3,824	0,143	0,952
0,32	0,969	0,3300	2,073	3,913	4,039	0,131	0,955
0,33	0,972	0,3390	2,130	4,148	4,267	0,120	0,958
0,34	0,975	0,3490	2,193	4,424	4,536	0,109	0,962
0,35	0,978	0,3580	2,249	4,688	4,794	0,100	0,964
0,36	0,980	0,3670	2,306	4,967	5,067	0,092	0,966
0,37	0,983	0,3770	2,369	5,295	5,389	0,083	0,970
0,38	0,984	0,3860	2,425	5,609	5,697	0,076	0,972
0,39	0,986	0,3950	2,482	5,940	6,024	0,069	0,973
0,40	0,988	0,4050	2,545	6,330	6,409	0,063	0,976
0,41	0,989	0,4150	2,608	6,746	6,820	0,057	0,979
0,42	0,990	0,4240	2,664	7,142	7,212	0,052	0,980
0,43	0,991	0,4340	2,727	7,610	7,675	0,047	0,982
0,44	0,992	0,4430	2,783	8,056	8,118	0,043	0,983
0,45	0,993	0,4530	2,846	8,583	8,641	0,038	0,985
0,46	0,994	0,4630	2,909	9,143	9,198	0,035	0,986
0,47	0,995	0,4720	2,966	9,678	9,730	0,031	0,987
0,48	0,995	0,4820	3,028	10,309	10,357	0,028	0,988
0,49	0,996	0,4920	3,091	10,980	11,026	0,026	0,989
0,50	0,996	0,5020	3,154	11,695	11,738	0,023	0,991
∞	1.000	∞	∞	∞	∞	0,000	1.000

TEMA 3. OTRAS ONDAS

TEMA 3. OTRAS ONDAS

3.1 ONDAS DE ORDEN SUPERIOR

Estas ondas de orden superior son más exactas que la onda de Airy debido a que se tienen en cuenta los términos cuadráticos. Sin embargo, esto conlleva un trabajo de más al tener que utilizar teorías no lineales. Por otra parte, puesto que en ocasiones introducimos una cierta inexactitud en nuestros cálculos, al usar valores de H y T medidos de un modo un tanto impreciso, ello nos puede inducir a pensar que no merece la pena dicho esfuerzo extra⁹. Es por tanto imprescindible establecer un criterio objetivo que nos permita decidir cuando se justifica el uso de estas teorías más complejas.

3.1.1. Valores límite de ciertos parámetros adimensionales

Para ayudarnos en la decisión de elegir una u otra teoría, utilizaremos el gráfico de Le Mehaute (1969) que se introduce al final de este capítulo, tras la presentación de las diferentes teorías de orden superior. Para establecer los distintos campos de validez de cada modelo, precisamos definir primero algunos parámetros adimensionales y sus valores límite.

- Peralte (s)

El peralte de una ola (ver ec. 2.2) tiene un valor límite de $1/7$ (0.142). Si la ola supera esta pendiente rompe. Este valor máximo de $1/7$ corresponde a grandes profundidades. Cerca de la orilla disminuye con la profundidad h , de acuerdo con (Miche, 1944):

$$s = \frac{H}{L} \leq 0.142 \cdot \operatorname{tgh} \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \quad (3.1)$$

- Ursell (U_R)

Se debe abandonar la teoría del potencial y aplicar teoría de Boussinesq cuando el valor del parámetro de Ursell sea mayor de 26.

⁹ El trabajo extra desaparece obviamente en cuanto se utiliza un programa de ordenador. Sin embargo, la metodología aquí presentada, aunque más laboriosa, es más formativa desde el punto de vista pedagógico

$$U_R = \frac{HL^2}{h^3} < 26 \quad \Rightarrow \text{Teoría del Potencial} \quad (3.2)$$

- Rotura por fondo (H/h)

Este parámetro nos relaciona la altura de la ola con la profundidad a la que se encuentra. El valor límite del parámetro de rotura que introducimos aquí es 0.78. Es un valor teórico calculado por Mac Cowan (1891) para la onda solitaria¹⁰. Sin embargo, lo utilizaremos siempre como primera aproximación.

$$\frac{H}{h} < 0.78 \quad (3.3)$$

Por tanto, a partir de ahora, supondremos que la altura de ola máxima en rotura será

$$H_{b \text{ max}} = 0.78 \cdot h_b \quad (3.4)$$

Donde el subíndice “b” (del inglés breaking) significa “en rompientes”.

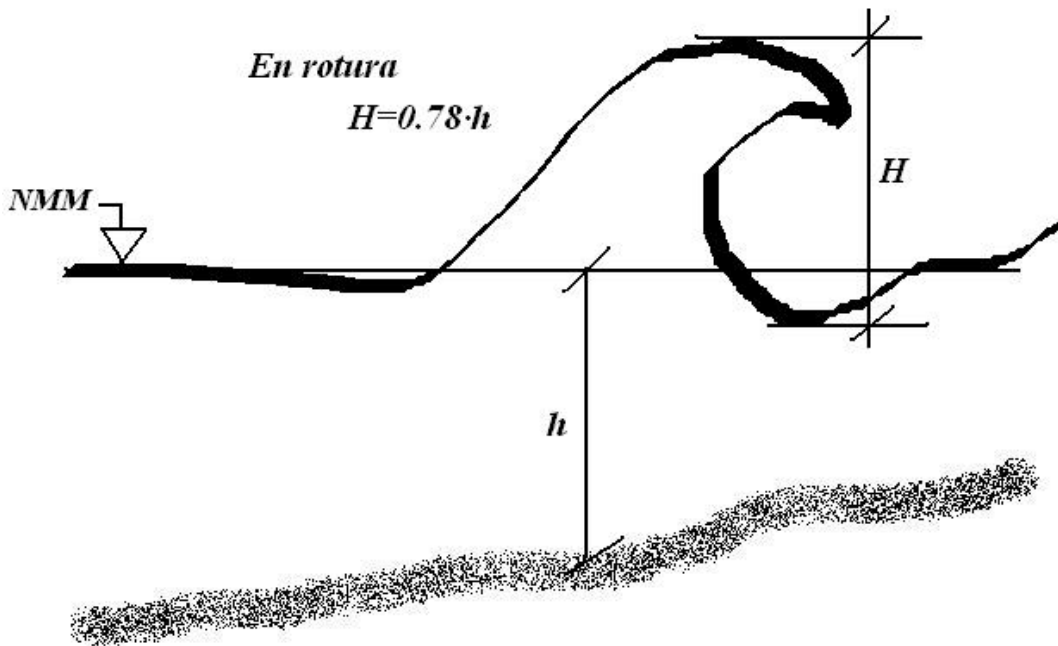


Figura 3.1 Esquema de una ola en rotura por fondo

¹⁰ Simplificación bastante aproximada para fondo plano y que utilizaremos a lo largo de este manual introductorio pese a que la relación H/h sea función de la pendiente del fondo y pueda llegar hasta 1.3.

3.2 ONDAS DE STOKES DE SEGUNDO ORDEN

Recordemos que en el primer capítulo, tras aplicar la teoría del potencial, establecimos un sistema de ecuaciones diferenciales con unas condiciones de contorno no lineales. Para resolverlo optamos por linealizar dichas ecuaciones despreciando los términos cuadráticos. Fue necesario entonces suponer, entre otras cosas, que el peralte del perfil de la ola era muy pequeño ($s < 0.01$) y, sin embargo, hemos visto que el límite superior del peralte es de 0.142. Además, existe un fenómeno natural de peraltamiento de la ola aparte del viento. A medida que la ola se acerca a la orilla y disminuye la profundidad, la cresta se hace más picuda y el seno se aplana (ver figura 3.2)

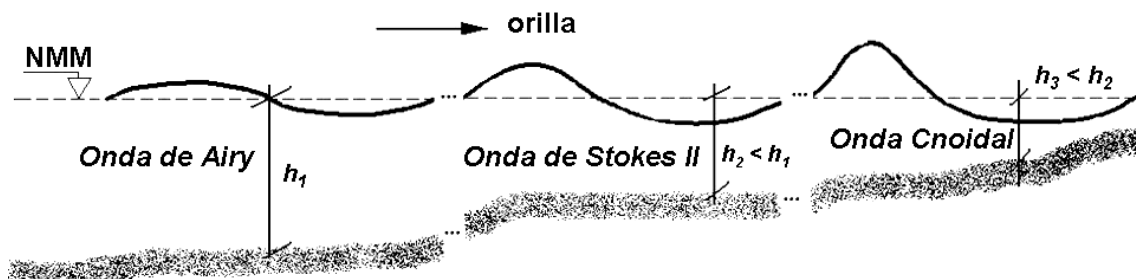


Figura 3.2 Evolución del peraltamiento del perfil de una ola a medida que disminuye la profundidad en su propagación hacia la orilla. Se apuntan los modelos más adecuados

Para estos casos, será preciso solucionar el sistema de ecuaciones con otro método, bien numérico (diferencias o elementos finitos) o bien analítico como el de los desarrollos en serie de potencias. Supondremos para este último caso que el potencial puede expresarse como

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\frac{H}{L} \right)^i = \phi_1 \left(\frac{H}{L} \right) + \phi_2 \left(\frac{H}{L} \right)^2 + \phi_3 \left(\frac{H}{L} \right)^3 + \dots$$

Donde:

$\phi_1 \left(\frac{H}{L} \right)$ es el potencial de la Onda de Airy

ϕ_2 es nuestra incógnita actual que deberemos despejar

$\left(\frac{H}{L}\right)^2$ no lo eliminaremos en este caso puesto que intentamos incluir precisamente los efectos de 2º orden.

Sí que despreciamos el término de 3er orden $\left(\frac{H}{L}\right)^3$ por ser muy pequeño frente al de 2º

Actuaríamos de manera análoga con p^+ y $\eta = \eta_1 \frac{H}{L} + \eta_2 \left(\frac{H}{L}\right)^2 + \dots$

No presentaremos aquí la resolución de las ecuaciones. Baste saber que se introducen los desarrollos anteriores en las ecuaciones de Laplace, Bernoulli y las condiciones de contorno, sustituyendo ϕ_1 , p_1^+ y η_1 por los valores encontrados para la Onda de Airy y despejando ϕ_2 , p_2^+ y η_2 . Tendremos así, incluyendo los términos infinitesimales de orden dos y despreciando los de orden tres $O(H^3)$, la teoría de **Stokes II**.

Soluciones Stokes de 2º orden

Para determinar la superficie libre (η) disponemos de la siguiente ecuación:

$$\eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L}\right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta) \quad (3.5)$$

Donde el primer término corresponde a la aproximación lineal (la Onda de Airy) y el segundo a la aproximación de 2º orden. Debido a esto obtenemos una diferencia con respecto a la onda de Airy donde la cresta y el seno eran iguales. En este caso la cresta de la onda es más alta y el seno más aplanado.

Por otra parte, al resultar $c_2 = 0$, la celeridad y la longitud de la onda de Stokes II coinciden con la de Airy

$$\begin{aligned} c_{II} &= c_I = \frac{gT}{2\pi} \cdot tgh(kh) \\ L_{II} &= L_I = \frac{gT^2}{2\pi} \cdot tgh(kh) \end{aligned} \quad (3.6)$$

El campo de velocidades de las partículas sí que cambia:

$$u_{II} = u_1 + u_2 = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \cos(\theta) + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 c \cdot \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^4(kh)} \cos(2\theta) \quad (3.7)$$

$$w_{II} = w_1 + w_2 = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{sh[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot \cos(\theta) + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 c \cdot \frac{sh[2k(z+h)]}{sh^4(kh)} \cos(2\theta) \quad (3.8)$$

En cuanto a los desplazamientos horizontales (x) y verticales (z) resultan:

$$x = x_{airy} + \frac{\pi H^2}{8L} \frac{1}{sh^2(kh)} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} \right\} \cos(2\theta) + \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{ct}{2} \cdot \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} \quad (3.9)$$

$$z = z_{airy} + \frac{3}{16} \frac{\pi H^2}{L} \frac{sh[2k(z+h)]}{sh^4(kh)} \cos(2\theta) \quad (3.10)$$

Hay que destacar el último término de la ec. 3.9. No tiene ninguna componente del tipo $\sin(\theta)$ o $\cos(\theta)$ por lo que no resulta periódico y además, el factor ct hace que dependa linealmente del tiempo. Ello implica que hay un desplazamiento neto de las partículas del fluido en la dirección de propagación de la ola y hasta llegar a la costa (ver problema resuelto 3.5). Esa acumulación de agua en la orilla producirá una elevación del nivel con el consiguiente gradiente de presión que compensará el mencionado transporte de masa con una corriente de retorno.

Por último, la presión se calculará mediante:

$$p = p^+_{airy} - \rho g z + \frac{3}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{tgh[kh]}{sh^2(kh)} \left\{ \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} - \frac{1}{3} \right\} \cos(2\theta) - \frac{1}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{tgh[kh]}{sh^2(kh)} \left\{ ch \frac{[2k(z+h)]}{L} - 1 \right\} \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.1 *Compara los perfiles de una onda ($H=1m$, $T=8$ seg, $h=5m$) de acuerdo con las teorías de Airy y Stokes II.*

La ecuación del perfil (3.5) es:

$$\eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta)$$

Donde la primera parte es la componente de primer orden o de Airy

$$\eta_I = \frac{H}{2} \cos(\theta) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = 0.5 \cos(\theta)$$

$$\eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta)$$

Para encontrar el valor de L y kh entraremos en las tablas de la onda sinusoidal (apéndice 2.1)

$$\frac{h}{L_o} = \frac{h}{1.56 \cdot T^2} = \frac{5}{1.56 \cdot 8^2} = 0.05 \Rightarrow$$

$$\frac{h}{L} = 0.094 \quad (\rightarrow L = 53.1m), \quad kh = 0.592, \quad sh(kh) = 0.627 \quad ch(kh) = 1.18 \quad ch(2kh) = 1.79$$

Sustituyendo:

$$\eta_{II} = 0.5 \cos(\theta) + \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{8 \cdot 53.1} \right) \frac{1.18}{(0.627)^3} [2 + 1.79] \cos(2\theta) = 0.5 \cos(\theta) + 0.13 \cos(2\theta)$$

Expresiones que en la cresta ($\theta=0$) y en el seno ($\theta=\pi$) suponen los valores:

	Airy	Stokes II
Cresta ($\theta=0$)	+0.5	+0.63
Seno ($\theta=\pi$)	-0.5	-0.37

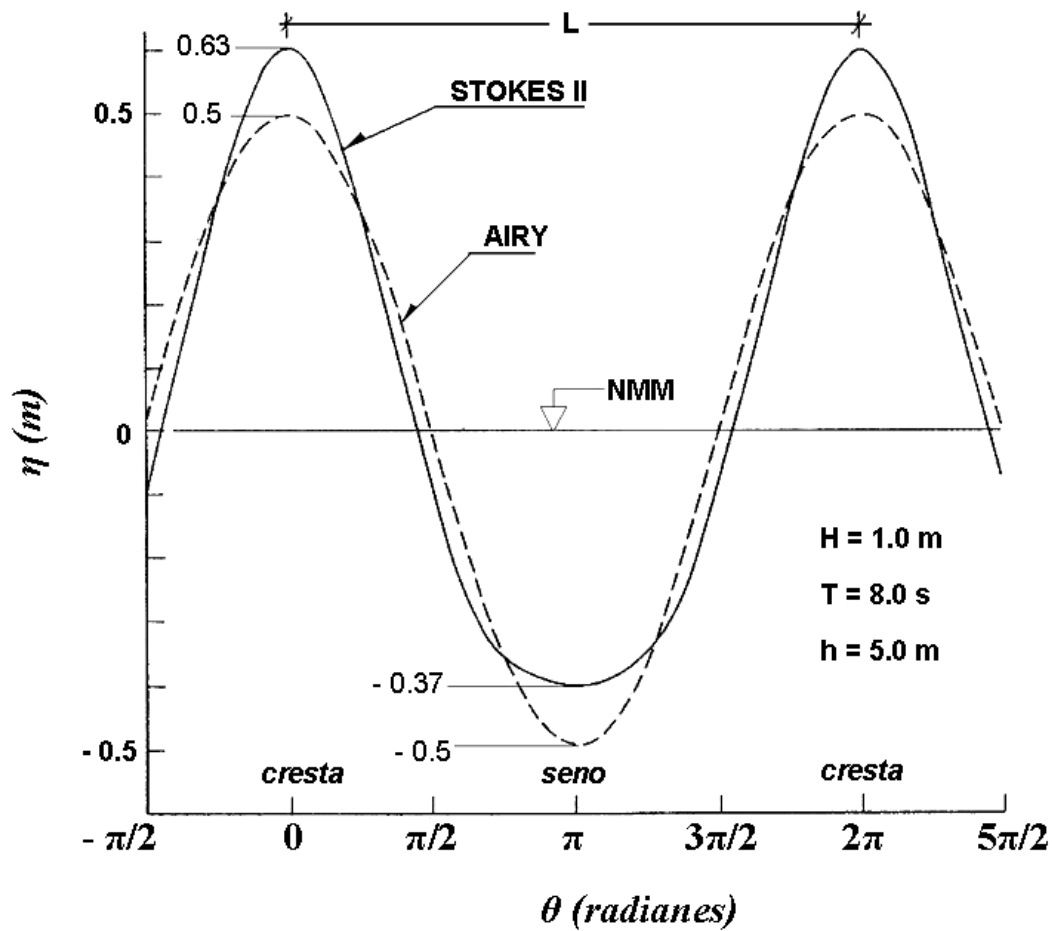


Figura 3.3 Comparación de los perfiles de Airy y Stokes II para una misma ola ($H=1m$, $T=8s$) en una profundidad $h=5m$

Ejemplo 3.2 Compara u_I y u_{II} (velocidad horizontal de las partículas) en la superficie del mar, tanto en la cresta como en el seno, para la onda del ejemplo 3.1

En la superficie del mar ($z=0$) la ecuación 3.7 queda

$$u_{II} = u_1 + u_2 = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{ch[kh]}{sh(kh)} \cdot \cos(\theta) + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 c \cdot \frac{ch[2kh]}{sh^4(kh)} \cos(2\theta)$$

Usando los valores de las tablas encontrados en el ejemplo 3.1

$$u_H = u_1 + u_2 = \frac{\pi \cdot 1}{8} \cdot \frac{1.18}{0.627} \cdot \cos(\theta) + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi \cdot 1}{53.1} \right)^2 \cdot \frac{53.1}{8} \cdot \frac{1.79}{0.627^4} \cos(2\theta) = 0.74 \cdot \cos(\theta) + 0.20 \cos(2\theta)$$

<i>Velocidad horizontal en la superficie del mar (m/s)</i>		
	<i>Airy</i>	<i>Stokes II</i>
<i>Cresta ($\theta=0$)</i>	+0.74	+0.94
<i>Seno ($\theta=\pi$)</i>	-0.74	-0.54

Vemos que a medida que nos acercamos a la costa y la ola se peralta, la velocidad en la cresta (positiva y por tanto, hacia la orilla) es superior a la existente en el seno (negativa, i.e. de retorno hacia el mar).

3.3 ONDA CNOIDAL

La onda cnoidal es la que mejor describe las ondas largas, de amplitud finita y forma constante en aguas someras. El cálculo, desarrollado por Korteweg y DeVries en 1895, no se basa en la teoría del potencial sino en la de Boussinesq. Su nombre proviene de la función que las representa, el coseno elíptico de Jacobi que usualmente se representa con las letras cn.

El campo de validez se encuentra definido por:

$$\begin{aligned} \text{profundidad} \quad \frac{h}{L} &\leq \frac{1}{8} \\ \text{Ursell} \quad \frac{HL^2}{h^3} &\geq 26 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Cuando la longitud de onda tiende a infinito, la solución de la onda cnoidal tiende a la de la onda solitaria (ver apartado 3.4). Cuando la relación H/h tiende a 0 (grandes

profundidades y pequeña amplitud), entonces la solución de la onda cnoidal tiende a la onda de Airy.

Dado que esta onda sólo se utiliza en aguas reducidas, la ordenada de la superficie del mar se mide desde el fondo (figura 3.4). Además se designa con la letra y en vez de z . Se utilizan en la formulación los valores de y_c y de y_t , ordenadas de la cresta y del seno (trough en inglés) respectivamente

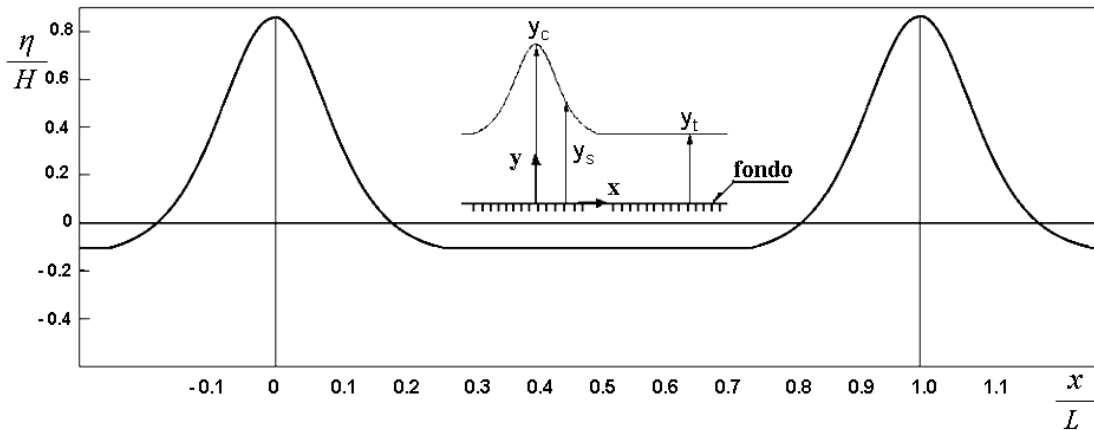


Figura 3.4 Esquema de la onda Cnoidal donde se aprecia su perfil tipo. El origen de coordenadas se sitúa en el fondo del mar en vez de en la superficie

Dada la complejidad de los cálculos de esta teoría, que se escapan del objetivo de este manual, utilizaremos una serie de gráficos de fácil manejo (preparados por Wiegell, 1960) que facilitan la tarea y minimizan los errores. Las características de la onda vienen expresadas en función del módulo k^2 de la integral elíptica, que no debe confundirse con el número de onda de la teoría del potencial. La utilización de los mismos se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3 Dada una onda con una altura $H = 1.0$ m y un periodo $T = 15$ seg y que se desplaza en una profundidad $h = 3$ m.

- a) Comparar L encontrada según Airy y la teoría Cnoidal.
- b) Ídem la celeridad de onda c .
- c) Determinar las ordenadas de la cresta " y_c " y del seno " y_t ".

a) Para encontrar la longitud de onda de acuerdo a la teoría sinusoidal o de Airy, usando las tablas del apéndice 2.1, precisamos del valor h/L_0

Conociendo el periodo podemos calcular L_0

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 1.56 \cdot T^2 = 1.56 \cdot 15^2 = 351m \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{L_0} = \frac{3}{351} = 0.0085$$

Interpolando entre 0.008 y 0.010

$$\Rightarrow \frac{h}{L} = 0.037 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{Airy}} = \frac{3}{0.037} = 81.1 \text{ m}$$

Para aplicar la teoría cnoidal utilizaremos la figura 3.5

$$\frac{H}{h} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$T\sqrt{\frac{g}{h}} = 15\sqrt{\frac{9.8}{3}} = 27.1 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 1 - 10^{-5}$$

Y entrando en la figura 3.6 con ese valor de k^2 obtendremos el parámetro de Ursell.

Obtenido U_R podemos deducir el valor de la longitud de onda L según la teoría cnoidal

$$U_R = \frac{HL^2}{h^3} \approx 260 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{cnoidal}} \approx \sqrt{260 \cdot \frac{3^3}{1}} = 83.8m$$

La diferencia porcentual entre ambas estimaciones de L no es muy grande en este caso particular:

$$\frac{L_{\text{cnoidal}} - L_{\text{Airy}}}{L_{\text{Airy}}} = \frac{83.8 - 81.1}{81.1} = \frac{2.7}{81.1} = 3.3\%$$

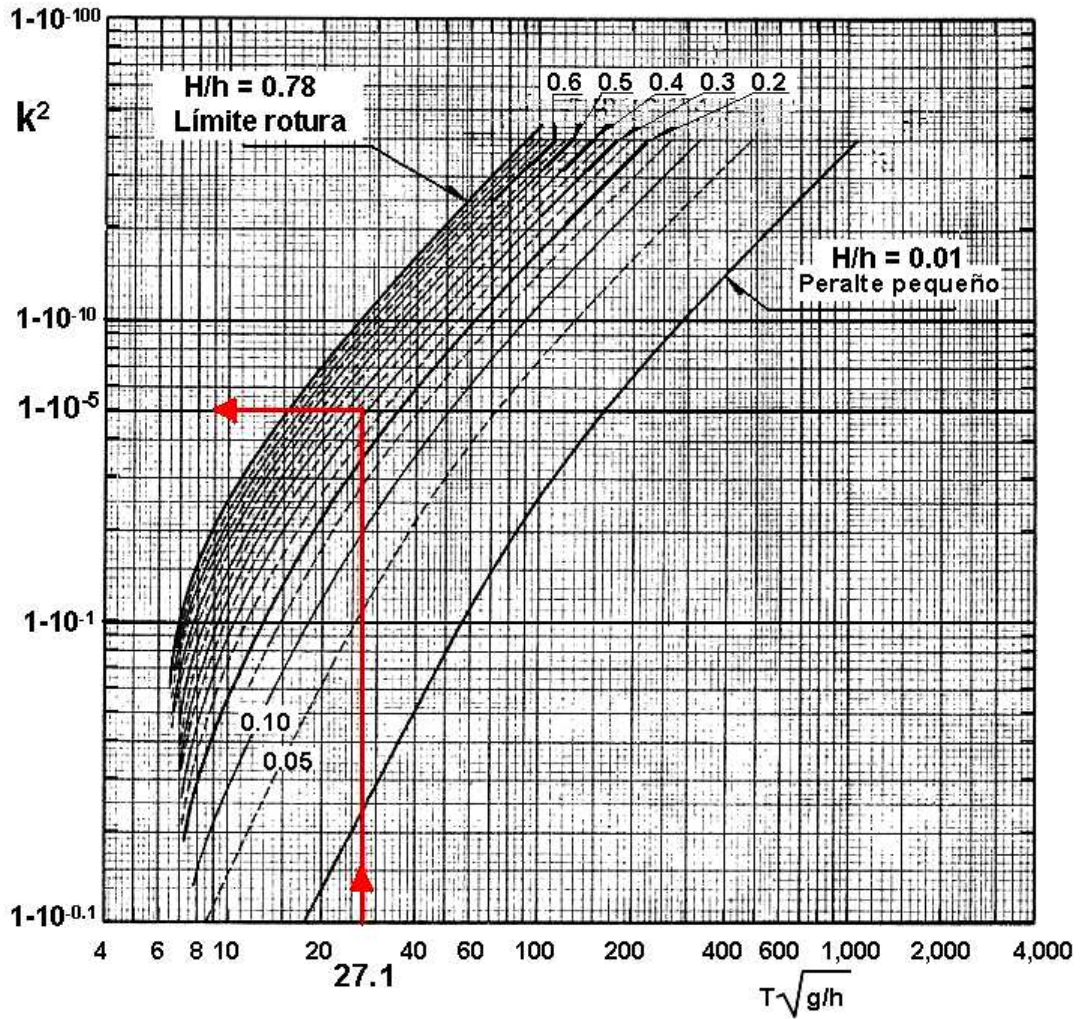


Figura 3.5 El parámetro k^2 en función de H/h y de $T\sqrt{g/h}$

b) En cuanto a la celeridad de onda:

Teoría de Airy: $c = L/T = 81.1/15 = 5,4\text{m/s}$

Teoría Cnoidal: $c = L/T = 83.8/15 = 5,6\text{m/s}$

c) Posteriormente, podemos deducir el valor de y_c de la figura 3.7

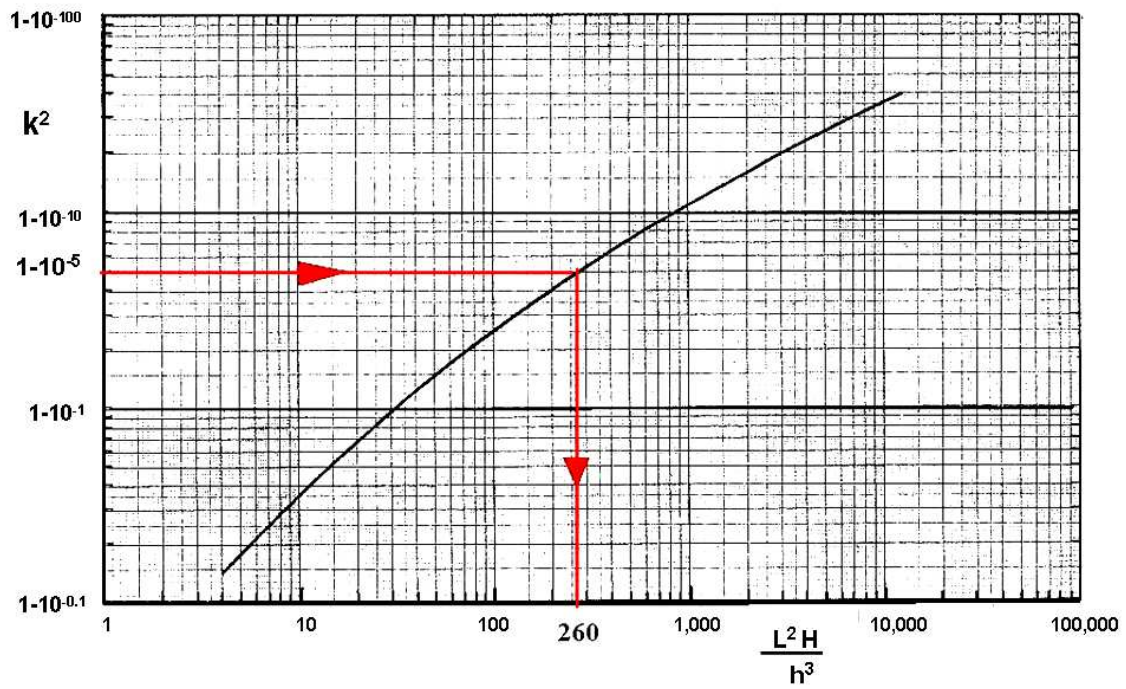


Figura 3.6 Ursell en función de k^2

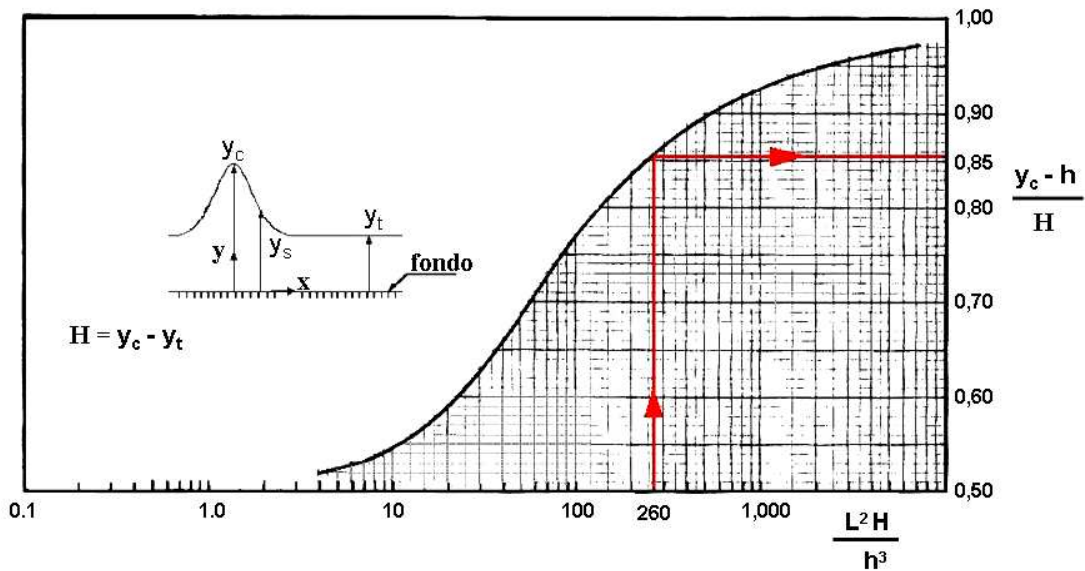


Figura 3.7 Ordenada en la cresta de la onda cnoidal en función de Ursell

En nuestro caso:

$$U_R = \frac{HL^2}{h^3} \approx 260 \Rightarrow \frac{y_c - h}{H} = \frac{y_c - 3}{1} = 0.85 \Rightarrow y_c = 3.85 \Rightarrow y_t = y_c - H = 2.85$$

En la forma del perfil de la onda sí que se aprecia una gran diferencia entre ambos modelos. Mientras que la onda de Airy muestra la cresta y el seno a igual distancia vertical (0.5 m) respecto al nivel medio del mar (NMM), la cresta de la onda cnoidal se encuentra mucho más elevada (0.85 m) y el seno mucho más cercano al NMM (0.15 m).

3.4 ONDA SOLITARIA

Esta teoría sirve para describir ondas no oscilatorias y sin seno apreciable como los tsunamis, ya sea generados por maremotos o por grandes deslizamientos de tierra. La primera observación de este tipo de onda, sin seno apreciable (ver fig. 3.8), la realizó y describió Russell en 1844, persiguiendo la onda a caballo a lo largo de un canal, y denominándola con el poco aceptado nombre de Onda de Traslación. Sus estudios empíricos validaron los cálculos teóricos posteriores de Boussinesq (1872), Rayleigh (1876) o Mc Cowan (1891). Para ello supusieron el caso límite de una onda cnoidal con $k^2 = 1$.

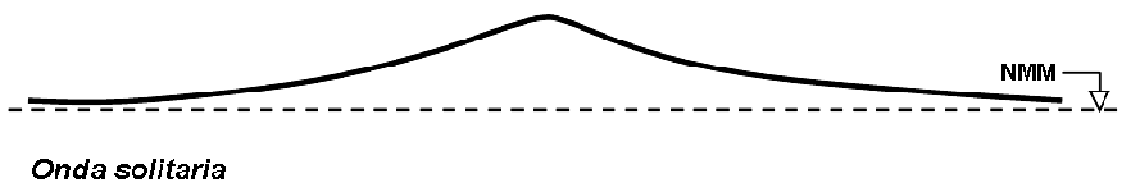


Figura 3.8. Perfil tipo de una onda solitaria

El volumen de agua (V) por metro lineal de cresta corresponde a:

$$V = \left[\frac{16}{3} h^3 H \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

Y la velocidad a la que se desplaza la onda es:

$$c = \sqrt{g(H+h)} \quad (3.14)$$

Que se puede simplificar, puesto que salvo muy cerca de la orilla H es despreciable frente a h , como:

$$\begin{matrix} h \gg H \\ \Rightarrow \end{matrix} c = \sqrt{g \cdot h} \quad (3.15)$$

Que resulta ser la ya conocida fórmula de la celeridad para ondas largas como la marea o como cualquier otra onda en profundidades reducidas (ver ec. 2.28)

Para calcular el tiempo que tarda un tsunami en recorrer una cierta distancia no tendremos más que aplicar $c=dx/dt$ (ver problema resuelto 3.7)

Ejemplo 3.4 *A qué velocidad viaja un tsunami a las siguientes profundidades: 5000m (una profundidad media en el Pacífico), 2000m (ídem en el Atlántico), 200m (en el borde de la plataforma continental) y 20 m (a punto de romper)*

Aplicando la fórmula 3.15 $c \approx \sqrt{g \cdot h}$

<i>Profundidad (m)</i>	<i>Velocidad (m/s)</i>	<i>Velocidad (km/h)</i>
5000	221	797
2000	140	504
200	44	159
20	14	50

3.5 ELECCIÓN DE LA TEORÍA DE ONDA MÁS ADECUADA

Para determinar qué onda utilizar nos basaremos en la figura 3.9, donde vienen reflejadas las regiones de validez para los distintos tipos de ondas, acotadas por la altura de ola, su periodo y la profundidad a la que se encuentra.

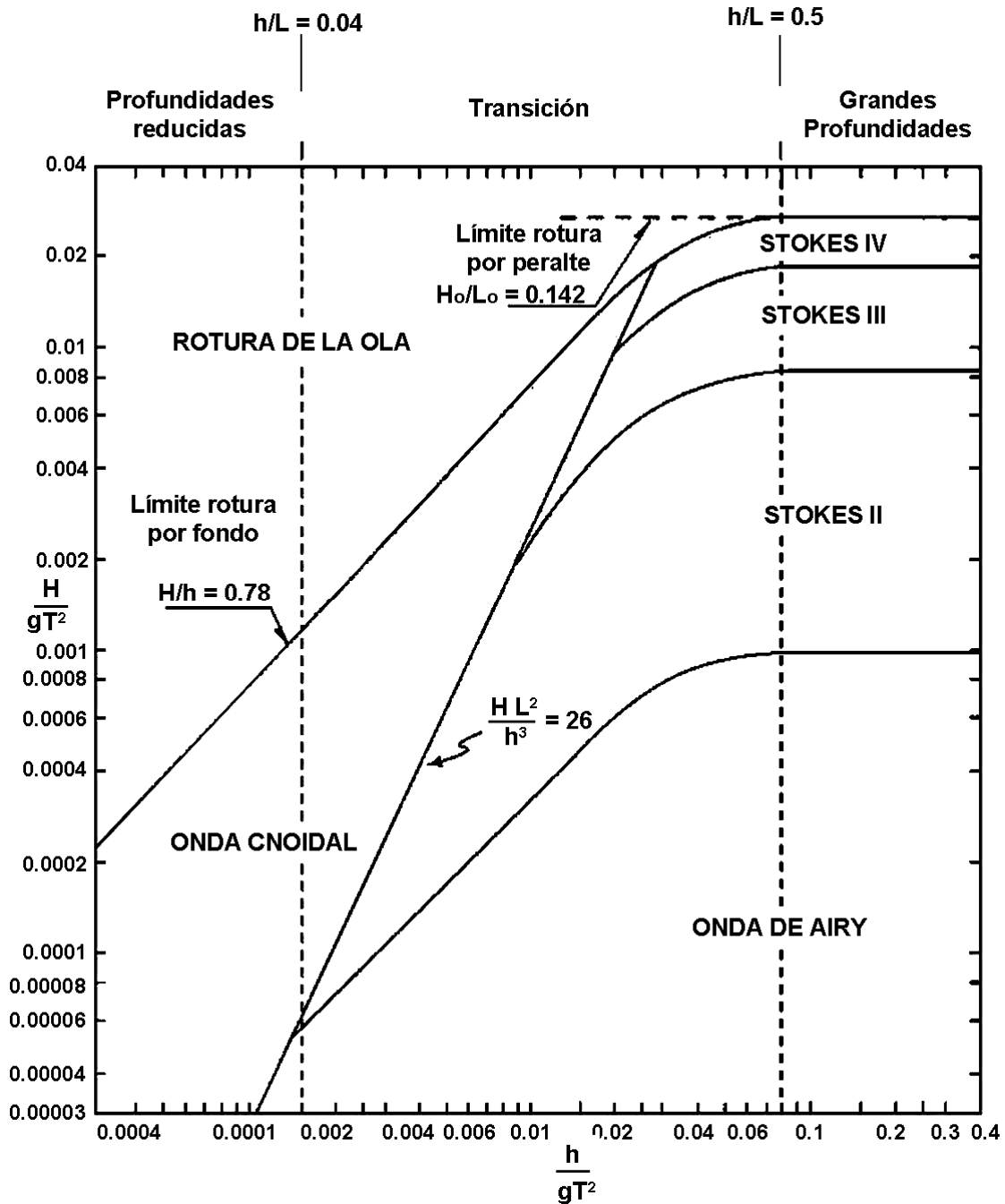


Figura 3.9. Gráfico de Le Mehaute con regiones de validez para varias teorías de onda

Se trata de una gráfica logarítmica donde concurren la Teoría Cnoidal y la Teoría del Potencial. Dentro de esta última se distingue entre la Teoría de Airy, la de Stokes II, Stokes III o Stokes IV. Cada una de ellas será adecuada para una determinada forma de la ola (proporcional al peralte) en función de que se encuentre en aguas someras, transitorias o profundas.

Ejemplo 3.6 Demuestra que $\frac{H}{gT^2}$ y $\frac{h}{gT^2}$ son parámetros adimensionales e identifícalos

Recordando la expresión de la longitud de onda en la teoría de Airy (2.24) y su simplificación para grandes profundidades (2.29)

$$L_o = \frac{g \cdot T^2}{(2 \cdot \pi)} \Rightarrow g \cdot T^2 = 2 \cdot \pi L_o$$

$$\text{luego } \frac{H}{g \cdot T^2} = \frac{H}{2 \cdot \pi L_o} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{H}{L_o} = \frac{1}{2\pi} \cdot s_0$$

Es decir, que H/gT^2 coincide con el peralte de la ola en grandes profundidades (s_0) salvo un factor numérico ($1/2\pi$)

Lo mismo sucede para la profundidad h (ó d).

Dos rectas nos definen el campo de existencia de las ondas:

- Una recta horizontal puesto que las olas no pueden tener un peralte superior a $1/7$. A partir de ese valor (0.14) se establece el fenómeno de rotura (BREAKING) y dejan de existir como tales.
- Una recta inclinada originada por la condición de rotura por fondo ($\frac{H}{h} \leq 0.78$) o lo que es lo mismo:

$$\frac{H}{gT^2} \leq 0.78 \cdot \frac{d}{gT^2}$$

Por encima de ese límite las olas rompen nuevamente, dejando de existir como tales, por lo que no es posible aplicarles ninguna teoría de onda.

Una tercera recta, la definida por $U_R=26$, nos permite distinguir entre los campos de validez de la teoría del Potencial y la de Boussinesq (cnoidal):

$$U_R = \frac{HL^2}{h^3} < 26 \text{ Teoría del Potencial (Onda de Airy, Stokes I, Stokes II, Stokes III...)}$$

$$U_R = \frac{HL^2}{h^3} > 26 \text{ Teoría de Boussinesq (Onda Cnoidal, solitaria...)}$$

Ejemplo 3.7 *Determina la teoría de onda más adecuada para las olas de un temporal caracterizado con los siguientes parámetros: $H= 5 \text{ m}$, $T= 10 \text{ s}$, en cuatro profundidades diferentes $h_1= 5 \text{ m}$, $h_2= 10 \text{ m}$, $h_3= 15 \text{ m}$, $h_4= 40 \text{ m}$. ¿Con qué altura de ola podríamos utilizar la Onda de Airy en cada profundidad?*

Veamos cuáles serán los parámetros $\frac{H}{gT^2}$ y $\frac{h}{gT^2}$ con los que determinar el tipo de teoría de onda:

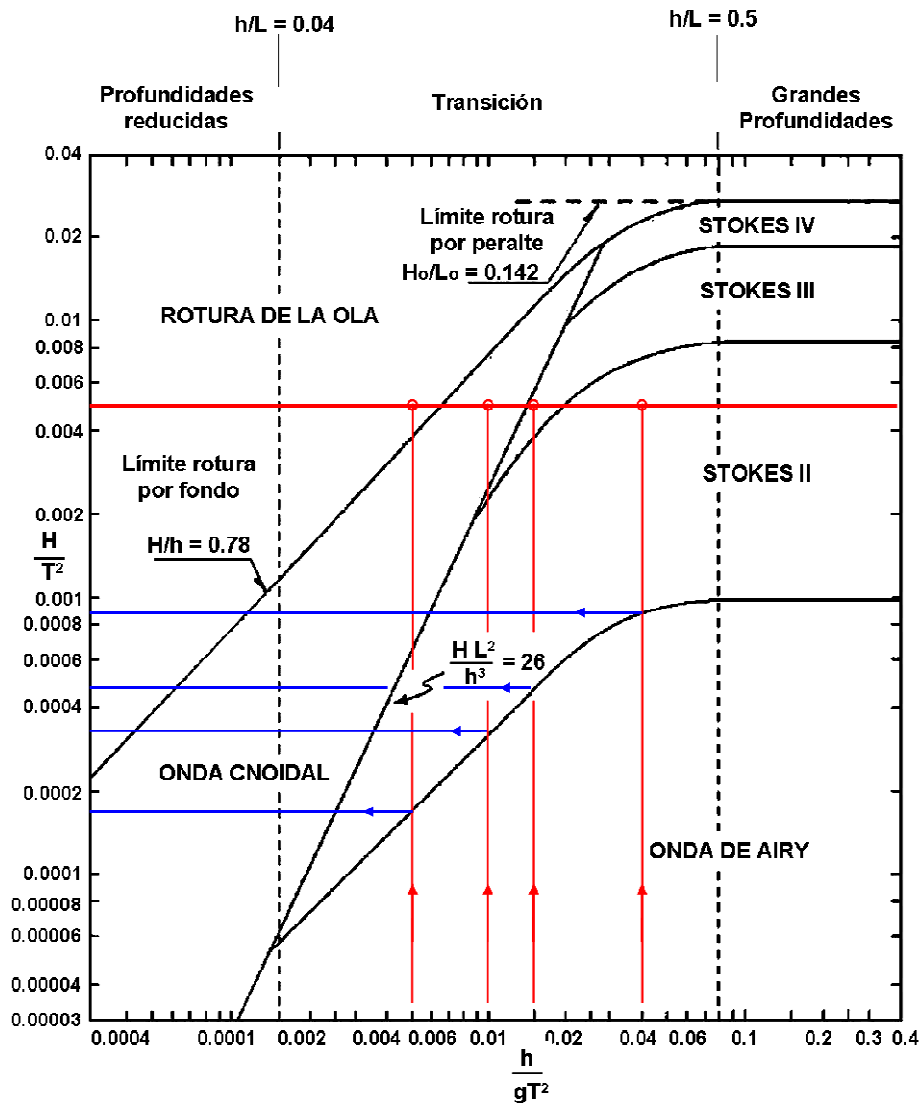
$$\frac{H}{gT^2} = \frac{5}{9.8 \cdot 10^2} \approx \frac{5}{10 \cdot 10^2} = 0.005$$

$$h_1 = 5 \rightarrow \frac{h}{gT^2} = 0.005 \rightarrow \text{Rotura ola} \rightarrow \frac{H}{gT^2} \approx 0.00017 \Rightarrow H = 0.17m$$

$$h_2 = 10 \rightarrow \frac{h}{gT^2} = 0.01 \rightarrow \text{Cnoidal} \rightarrow \frac{H}{gT^2} \approx 0.00033 \Rightarrow H = 0.33m$$

$$h_3 = 15 \rightarrow \frac{h}{gT^2} = 0.15 \rightarrow \text{Stokes III} \rightarrow \frac{H}{gT^2} \approx 0.00048 \Rightarrow H = 0.48m$$

$$h_4 = 40 \rightarrow \frac{h}{gT^2} = 0.04 \rightarrow \text{Stokes II} \rightarrow \frac{H}{gT^2} \approx 0.0009 \Rightarrow H = 0.90m$$



3.6 PROBLEMAS RESUELTOS

3.1 Demostrar, usando la teoría de Stokes II, que para $k \cdot h \rightarrow 0$ (aguas someras) η se

puede escribir:
$$\eta = \frac{H}{2} \left[\cos(\theta) + \frac{3}{32\pi^2} \cdot U_R \cdot \cos(2\theta) \right]$$

Partimos de la expresión general de η (3.5):

$$\eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta)$$

Recordemos (ejemplo 2.11) que $\lim_{h \rightarrow 0} sh(x) = x$, y que $\lim_{h \rightarrow 0} ch(x) = 1$.

Sustituyendo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{1}{(kh)^3} [2 + 1] \cos(2\theta)$$

Sacando factor común $H/2$ y puesto que $k=2\pi/L$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_{II} = \frac{H}{2} \left[\cos(\theta) + \left(\frac{\pi H}{4L} \right) \frac{3L^3}{(2\pi h)^3} \cos(2\theta) \right] = \frac{H}{2} \left[\cos(\theta) + \frac{3LH^2}{(32\pi^2 h^3)} \cos(2\theta) \right]$$

Por consiguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_{II} = \frac{H}{2} \left[\cos(\theta) + \frac{3}{32\pi^2} U_R \cos(2\theta) \right] \quad (\text{q.e.d.})$$

3.2 También con la teoría de Stokes II, ¿qué expresión adopta η para $kh \rightarrow \infty$?

Utilizamos nuevamente la expresión general de η (3.5):

$$\eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta)$$

Recordando la definición de sh y ch y sustituyendo:

$$sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} sh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} ch(x) = \frac{e^x}{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \eta_{II} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{H}{2} \cos(\theta) + \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(e^{kh} + e^{-kh})}{\left(\frac{1}{2}(e^{kh} - e^{-kh}) \right)^3} \left[2 + \frac{1}{2}(e^{2kh} + e^{-2kh}) \right] \cos(2\theta)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{kh}}{2}}{\left(\frac{e^{kh}}{2} \right)^3} \left[2 + \frac{1}{2} (e^{2kh}) \right] \cos(2\theta)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{4}{e^{2kh}} \left[2 + \frac{1}{2} (e^{2kh}) \right] \cos(2\theta)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{4 \cdot 2}{e^{2kh}} + \frac{4e^{2kh}}{2e^{2kh}} \right) \cos(2\theta) = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \cdot (0 + 2) \cos(2\theta)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \eta_{II} = \frac{H}{2} \left[\cos(\theta) + \left(\frac{\pi H}{2L} \right) \cdot \cos(2\theta) \right]$$

3.3 Las características de una ola en $h = 5 \text{ m}$ son: $L = 50 \text{ m}$ y $H = 1.0 \text{ m}$. Comparar los resultados para las teorías de 1er y 2o orden de:

- a) *Las cotas de la cresta y del seno.*
- b) *Las velocidades de cresta y seno en la superficie.*
- c) *Presión en la superficie y en el fondo bajo la cresta.*

a) Operamos de manera similar al ejemplo 3.1, y fijámonos en la figura 3.3:

De acuerdo con la teoría de Airy o de 1^{er} orden:

$$\begin{aligned} \eta_I &= \frac{H}{2} \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \eta_{I \text{ cresta}} = \frac{1}{2} \cdot \cos(0) = 0.5 \text{ m} \\ &\Rightarrow \eta_{I \text{ seno}} = \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi) = -0.5 \text{ m} \end{aligned}$$

Con la teoría de Stokes II (ec. 3.5)

$$\eta_{II} = \frac{H}{2} \cos(\theta) + \left(\frac{\pi H^2}{8L} \right) \frac{ch(kh)}{sh^3(kh)} [2 + ch(2kh)] \cos(2\theta)$$

De las tablas del apéndice 2.1 (sería conveniente también practicar con la calculadora)

$$h/L = 5/50 = 0.1 \approx 0.0993 \rightarrow kh = 0.624 \rightarrow k = 0.624/5 = 0.125$$

$$\text{sh}(kh) = 0.665$$

$$\text{ch}(kh) = 1.20$$

$$2kh = 1.248 \rightarrow \text{ch}(2kh) = 1.90$$

$$\rightarrow h/L_0 = 0.055 \rightarrow L_0 = 5/0.055 = 90.9 \text{ m}$$

$$\rightarrow L_0 = 90.9 \text{ m} = 1.56 \cdot T^2 \rightarrow T = 7.63 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta_{II \text{ cresta}} &= \frac{1}{2} \left[\cos(0) + \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{8 \cdot 50} \right) \frac{1.20}{0.665^3} [2 + 1.90] \cos(2 \cdot 0) \right] = \\ & \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{8 \cdot 50} \right) \frac{1.20}{0.665^3} [2 + 1.90] \cdot 1 \right] = 0.5 + 0.125 = 0.625 \text{ m} \\ \Rightarrow \eta_{II \text{ seno}} &= \frac{1}{2} \left[\cos(\pi) + 0.125 \cdot \cos(2 \cdot \pi) \right] = 0.5 - 0.125 = 0.375 \text{ m} \end{aligned}$$

b) Sean $u_{c,I}$ y $u_{t,I}$ los valores de la velocidad horizontal en cresta y seno según Airy, y $u_{c,II}$ y $u_{t,II}$ ídem según Stokes 2º orden. Utilizando la fórmula (2.30) y siguiendo el ejemplo 2.7

En la cresta ($z=0.5$, $\theta=0$)

$$u_{c,I} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)} \cdot \cos(\theta) = \frac{\pi \cdot 1}{7.63} \cdot \frac{\text{ch}[k(0.5+5)]}{\text{sh}(kh)} \cdot 1 = \frac{\pi \cdot 1}{7.63} \cdot \frac{1.24}{0.665} \cdot 1 = 0.77 \text{ m/s}$$

En el seno ($z=-0.5$, $\theta=\pi$)

$$u_{t,I} = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\text{ch}[k(z+h)]}{\text{sh}(kh)} \cdot \cos(\theta) = \frac{\pi \cdot 1}{7.63} \cdot \frac{\text{ch}[k(-0.5+5)]}{\text{sh}(kh)} \cdot (-1) = -\frac{\pi \cdot 1}{7.63} \cdot \frac{1.16}{0.665} = -0.72 \text{ m/s}$$

Mientras que para Stokes II, utilizando los resultados del apartado anterior y la fórmula 3.7 obtenemos:

En la cresta ($z=0.625$, $\theta=0$)

$$u_{c,2} = u_{c,1} + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 c \cdot \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^4(kh)} \cos(2\theta) = 0.77 + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{50} \right)^2 \frac{50}{7.63} \cdot \frac{ch[2k(0.625+5)]}{0.665^4} = 0.98 \text{ m/s}$$

En el seno ($z = -0.375$, $\theta = \pi$)

$$u_{t,2} = u_{t,1} + u_{t,2} = -0.72 + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{50} \right)^2 \frac{50}{7.63} \cdot \frac{ch[2k(-0.375+5)]}{0.665^4} \cos(2\pi) = -0.72 + 0.17 = -0.55 \text{ m/s}$$

c) La presión total será la suma de la hidrostática más la sobrepresión dinámica:

- Airy, ver ecuación (2.34)

- En la superficie

$$p_{hidrostática} = \rho g z = 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0 \text{ m} = 0$$

$$p^+ = \rho g \eta \frac{ch[k(z+h)]}{ch(kh)} = 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} \cdot \frac{ch[0.125(0.5+5)]}{1.20} = 5214 \text{ N/m}^2$$

$$p_{total} = p_{hidrostática} + p^+ = 0 + 5214 = 5214 \text{ N/m}^2$$

- En el fondo

$$p_{hidrostática} = \rho g z = 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m} = 50225 \text{ N/m}^2$$

$$p^+ = \rho g \eta \frac{ch[k(z+h)]}{ch(kh)} = 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m} \cdot \frac{ch[0.125(-5+5)]}{1.20} = 5023 \text{ N/m}^2$$

$$p_{total} = p_{hidrostática} + p^+ = 50225 + 5023 = 55248 \text{ N/m}^2$$

- Stokes II, ver ecuación (3.11)

- En la superficie

$$p_{hidrostática} = \rho g z = 1025 \frac{kg}{m^3} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0m = 0$$

$$\begin{aligned} p_{II}^+ &= p_{airy}^+ + \frac{3}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{tgh[kh]}{sh^2(kh)} \left\{ \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} - \frac{1}{3} \right\} \cos(2\theta) - \frac{1}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{tgh[kh]}{sh^2(kh)} \left\{ ch \frac{[2k(z+h)]}{L} - 1 \right\} = \\ &= p_{airy}^+ + \frac{1}{8} \cdot 1025 \cdot 9.8 \frac{\pi \cdot 1^2}{50} \frac{0.554}{0.665^2} \left\{ 3 \left[\frac{1.90}{0.665^2} - \frac{1}{3} \right] - \left[ch \frac{[2 \cdot 0.125 \cdot (0.625 + 5)]}{50} - 1 \right] \right\} = \\ &= 5214 + 98.8 \{ 11.9 - 0.0004 \} = 5214 + 1176 = 6390 \frac{N}{m^2} \end{aligned}$$

$$p_{total,II} = p_{hidrostática,II} + p_{II}^+ = 0 + 6390 = 6390 \frac{N}{m^2}$$

- En el fondo

$$p_{hidrostática} = \rho g z = 1025 \frac{kg}{m^3} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 5m = 50225 \frac{N}{m^2}$$

$$\begin{aligned} p_{II}^+ &= p_{airy}^+ + \frac{3}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{tgh[kh]}{sh^2(kh)} \left\{ \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} - \frac{1}{3} \right\} \cos(2\theta) - \frac{1}{8} \rho g \frac{\pi H^2}{L} \frac{tgh[kh]}{sh^2(kh)} \left\{ ch \frac{[2k(z+h)]}{L} - 1 \right\} = \\ &= p_{airy}^+ + \frac{1}{8} \cdot 1025 \cdot 9.8 \frac{\pi \cdot 1^2}{50} \frac{0.554}{0.665^2} \left\{ 3 \left[\frac{1.0}{0.665^2} - \frac{1}{3} \right] - \left[ch \frac{[2 \cdot 0.125 \cdot (-5 + 5)]}{50} - 1 \right] \right\} = \\ &= 5023 + 98.8 \{ 11.9 - 0.0 \} = 5023 + 1176 = 6199 \frac{N}{m^2} \end{aligned}$$

$$p_{total,II} = p_{hidrostática,II} + p_{II}^+ = 50225 + 6199 = 56424 \frac{N}{m^2}$$

En resumen:

	Presión en N/m ²		Presión en Kp/cm ²		Diferencia (%)
	Airy	Stokes II	Airy	Stokes II	
Superficie (z=0)	5214	6390	0.05	0.06	18.4
En el fondo (z=-5)	55248	56424	0.55	0.56	2.1

3.7 *Calcula el Flujo de Energía para la ola del ejercicio anterior*

Usando las ec. 2.35, 2.36 y 2.37

Las celeridades de onda y de grupo valen:

$$c = \frac{L}{T} = \frac{50}{7.63} = 6.55 \text{ m/s} \rightarrow c_g = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2kh}{sh(2kh)} \right) = \frac{6.55}{2} \cdot \left(1 + \frac{1.248}{1.598} \right) = 0.89 \cdot 6.55 = 5.83 \text{ m/s}$$

El flujo de energía:

$$E_f = E \cdot c_g = \frac{1}{8} \rho g H^2 \cdot c_g = \frac{1}{8} \cdot 1025 \cdot 9.8 \cdot 1^2 \cdot 5.83 = 1256 \text{ J/m}^2 \cdot 5.83 = 7327 \text{ watios/m}$$

3.8 *¿Existe un desplazamiento neto de una partícula de agua en la superficie al cabo de un ciclo completo (durante un T)? Calcularlo para la misma onda de los dos casos anteriores*

En la realidad, todo cuerpo que flota en la superficie del mar avanza más de lo que retrocede con el paso de cada onda y por ello acaba finalmente en la orilla.

El desplazamiento neto durante un periodo será el que experimenta la partícula de agua tras el paso de una onda completa. Por ejemplo, durante el tiempo que tarda la partícula en ocupar dos veces consecutivas una cresta o un seno. Es decir, es lo mismo que calcular el desplazamiento neto experimentado en el intervalo desde $\theta=0$ a $\theta=\pi$.

- Para la teoría de Airy, la posición de una partícula viene dada por la ec. 2.32

$$x_{\text{Airy}} = \int u dt = -\frac{H}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot sen(kx - \omega t) = -\frac{H}{2} \cdot \frac{ch[k(z+h)]}{sh(kh)} \cdot sen(\theta)$$

Por tanto, el desplazamiento total de una partícula de agua en el eje horizontal o X viene dado por la sumatoria (la integral) de sus respectivas posiciones. En el caso particular de la superficie (z=0) dicho desplazamiento neto será:

$$\Delta x_{Airy} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} u dt = -\frac{H}{2} \cdot \frac{ch(kh)}{sh(kh)} \cdot [sen(2\pi) - sen(0)] = 0$$

Lógico, puesto que la expresión es periódica al depender del seno de θ .

Sin embargo, la expresión de la posición X según la teoría de Stokes II (ec. 3.9) es:

$$x = x_{airy} + \frac{\pi H^2}{8L} \frac{1}{sh^2(kh)} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} \right\} sen(2\theta) + \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{ct}{2} \cdot \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)}$$

Donde podemos apreciar que el último término no es periódico pues no depende ni del seno ni del coseno de θ . En cambio es función lineal del tiempo

Así pues, y nuevamente en la superficie (z=0):

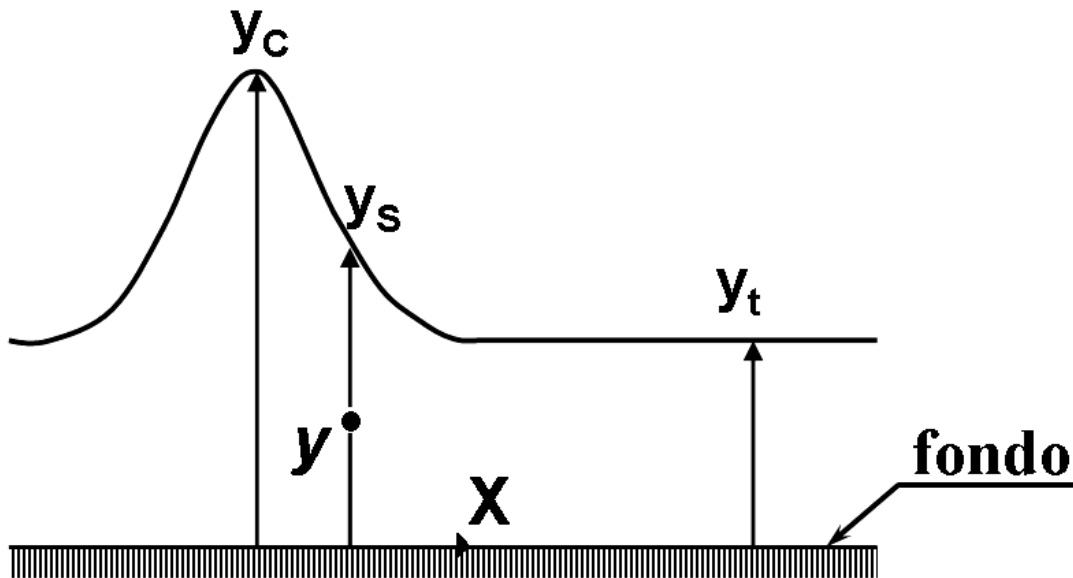
$$\begin{aligned} \Delta x_{StokesII} &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} u dt = \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{ct}{2} \cdot \frac{ch[2k(z+h)]}{sh^2(kh)} = \left(\frac{\pi \cdot 1.0}{50} \right)^2 \frac{6.55}{2} \cdot t \cdot \frac{ch(2kh)}{sh^2(kh)} \Bigg|_{t=0}^{t=T} = \\ &= 0.0129 \cdot \frac{1.885}{0.665^2} (T - 0) = 0.055 \cdot 7.63 = 0.42m \end{aligned}$$

Vemos pues que la formulación de Stokes II sí puede modelizar el transporte de masa, mientras que la teoría de Airy no era capaz de ello. En nuestro caso particular, cualquier cosa que flotara en el mar avanzaría hacia la orilla 0.42 metros cada 7.63 segundos. Es decir, se movería con una velocidad media de 5.5 cm/seg.

3.9 La presión en una columna de agua al paso de una onda cnoidal es función de la velocidad del fluido en cada punto. Su formulación teórica, sumamente compleja, no se ha visto en este capítulo. Encuentra una expresión aproximada en base a la presión hidrostática.

Recordemos que el origen de coordenadas para la onda cnoidal se ubica en el fondo del mar y que se utiliza la variable y para la coordenada vertical. La presión para un punto

situado a una altura y y sobre el fondo al paso de una onda cnoidal de altura y_s , podría aproximarse por la altura de agua encima suyo



Observando la figura:

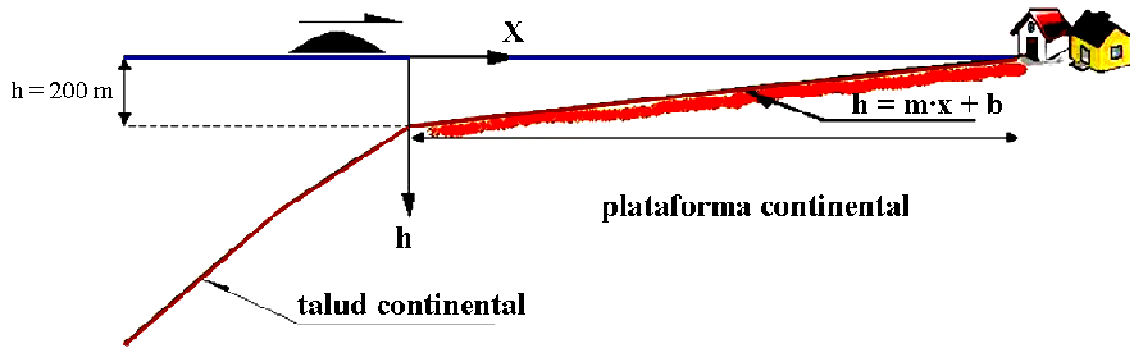
$$p = \rho \cdot g \cdot (y_s - y)$$

-
- 3.10 *Un sensor detecta la presencia de un tsunami al comienzo de la plataforma continental, a 100 km de la costa y a 200 metros de profundidad. Si se avisa por radio inmediatamente a Protección Civil, ¿de cuánto tiempo se dispone para ejecutar el protocolo? ¿Crees que la evacuación de los pueblos costeros debería ser una medida a incluir en dicho protocolo?*

Podemos asimilar la plataforma continental a una pendiente de pequeña inclinación. Si ubicamos los ejes coordenados en la superficie del mar y al inicio del talud continental, la plataforma tendrá la ecuación de una recta $h = mx + b$,

$$\text{Cuando } x=0 \rightarrow h=200 \Rightarrow 200=b$$

$$\text{Para } x=100000 \rightarrow h=0 \Rightarrow \frac{-200}{100000}=m \Rightarrow m=-0.002$$



Sustituyendo:

$$h = mx + b \Rightarrow h = -0.002 \cdot x + 200$$

Por tanto, la celeridad del tsunami al depender de la profundidad depende asimismo de la posición x . En nuestro caso:

$$c = \sqrt{g(H + h)} \cong \sqrt{gh} = \frac{dx}{dt} \longrightarrow t = \int dt = \int \frac{dx}{c} = \int \frac{dx}{\sqrt{gh}} = \int_0^{100000} \frac{dx}{\sqrt{g(mx + b)}}$$

Realizamos un cambio de variable

$$\begin{aligned} mx + b = u &\longrightarrow m \cdot dx = du \\ t = \int_0^{100000} \frac{dx}{\sqrt{g(mx + b)}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \int \frac{du/m}{\sqrt{u}} = \frac{1}{m\sqrt{g}} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{m\sqrt{g}} \frac{1}{1/2} u^{1/2} = \\ &= \frac{2}{-0.002\sqrt{9.8}} \sqrt{(-0.002x + 200)} \Big|_0^{100000} = -319 \cdot (0 - 14.1) = 4511 \text{ seg} \end{aligned}$$

Se dispone aproximadamente de 1 hora y 15 minutos para ejecutar el protocolo.

Comentario:

Estas olas que en alta mar no suelen superar 1 m de alto, son imperceptibles por su gran longitud de onda. No vienen solas pese a que para su cálculo se utilice la teoría de la onda solitaria. Tienen replicas con un periodo que oscila entre 15 y 30 minutos. Se peraltan en cuanto llegan a la plataforma continental, alcanzando alturas de hasta 15 ó 20 metros, rompiendo por tanto en profundidades de 20 a 25 metros. Eso significa una distancia de más de 10 km de la orilla para pendientes del fondo de 0.002 como la de

nuestro caso. Lo que llega a la orilla es una gran masa de agua que puede superar los 3-4 metros de altura y con unas velocidades del orden de 3 a 5 m/s. Esta avenida viene precedida de una rápida retirada del mar que incluso deja a algunos peces en seco. Dado el escaso margen de tiempo de que se dispone en este supuesto, no parece recomendable proceder a una evacuación improvisada de una gran población. Una vez habilitada una red de sensores para detección de tsunamis, se precisará una campaña de enseñanza que permita a los ciudadanos identificar el peligro. Asimismo, deberían practicarse de manera periódica una serie de simulacros que habitúe a la población a dirigirse a zonas seguras como, por ejemplo, las azoteas de edificios con más de dos pisos de alto.

BIBLIOGRAFÍA COMENTADA

BIBLIOGRAFÍA COMENTADA

- **Fluid Mechanics and Hydraulics (1994). Ranald V. Giles, Jack B. Evett and Cheng Liu. Mc Graw Hill Inc., Schaum's Outline Series**

Se trata de un clásico (su primera edición es de 1956) con una teoría resumida pero clara y gran número de ejercicios resueltos.

- **Shore Protection Manual (SPM, 1984). United States Army Corps of Engineers. Coastal Engineering Research Center (CERC), Vicksburg, Mississippi.**

Un manual donde se intentó incluir todos los conocimientos de la Ingeniería de Costas del momento. Consiste en dos tomos con ocho capítulos. Las teorías de oleaje regular están comprendidas en el capítulo 2 "Mechanics of wave motion". Comprende una apartado "Literature cited" donde pueden encontrarse las referencias de trabajos históricos mencionados aquí.

- **Coastal Engineering Manual (CEM, 2004). United States Army Corps of Engineers. Coastal Engineering Research Center (CERC), Vicksburg, Mississippi. EM 1110-2-1100**

Versión electrónica del SPM, mucho más extensa, puesta al día de manera periódica, y que puede descargarse gratuitamente en formato pdf de la página web <http://chl.erdc.usace.army.mil> . El capítulo de "Water wave mechanics" sería el II-1.

- **Waves, tides and shallow-water processes (1989). Ed. Butterworth-Heinemann asociada con la Open University. Exeter. United Kingdom**

Excelente libro desde el punto de vista didáctico, que no profundiza en los desarrollos físico-matemáticos por estar dirigido a un público multidisciplinar. Incluye cuestiones teóricas sencillas y algunos ejercicios resueltos sumamente clarificadores.

- **Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists (1991). Robert G. Dean and Anthony Dalrymple. World Scientific Pub., Teaneck, NJ (USA)**

Un libro de consulta imprescindible para todo aquel que desee profundizar en los fundamentos matemáticos de las diferentes teorías de ondas.

- **Java Applets for Coastal Engineering. Robert A. Dalrymple. University of Delaware, <http://www.coastal.udel.edu/faculty/rad/>**

Esta página contiene un listado de pequeños programas de excelente uso pedagógico en la Ingeniería de Costas. Para evitar las lentas descargas, pueden instalarse en el propio ordenador personal. Entre otras aplicaciones, se incluyen los cálculos de onda lineal, solitaria, superposición de ondas (onda de grupo y estacionaria), etc.