



UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

MECÁNICA DE FLUIDOS

GRADO EN ARQUITECTURA NAVAL E INGENIERÍA MARÍTIMA

Estática de Fluidos

Francisco F. López Ruiz, Ganesh Shenoy Prabhu

Curso 2020-2021

Índice

1. Introducción	2
2. Conceptos Básicos	3
2.1. Presión absoluta y presión relativa	3
2.2. Presión en un Punto	4
2.3. Variación de la Profundidad	5
2.4. Sistemas de Coordenadas	9
3. Fuerza Hidrostática Sobre Superficies Sumergidas	11
3.1. Fuerza Hidrostática Total	12
3.1.1. Superficies Planas	13
3.1.2. Problemas Resueltos de Superficies Planas Sumergidas	29
3.1.3. Superficies Curvas	33
4. Centro de Presiones (CP)	37
4.1. Momento de una fuerza	37
4.2. Cálculo del Centro de Presiones en superficies sumergidas	41
4.3. Centro de Presiones para Superficies Planas	41
4.3.1. Cálculo del Centro de Geométrico de una figura	51
4.4. Centro de Presiones en Superficies Curvas	54
5. Instrumentos de Medida de la Presión	62
5.1. Presión Absoluta y Presión Relativa (Manométrica)	62
5.2. El Manómetro	62
5.3. El Barómetro	66
6. Aplicación de la Estática de fluidos	68
6.1. Vocabulario	68
6.1.1. Dimensiones Principales	68
6.1.2. Puntos Notables	68
6.2. Principio de Arquímedes	70
6.3. Flotación y Estabilidad	71
6.3.1. Análisis de Estabilidad	72

1. Introducción

En este segundo capítulo estudiaremos la estática de Fluidos, es decir, consideraremos fluidos totalmente en reposo. Prestaremos especial atención al análisis de las fuerzas que fluidos en estas condiciones ejercen sobre superficies de cuerpos rígidos sumergidos. Como estos apuntes están destinados a los alumnos de Mecánica de Fluidos del grado de Ingeniería Naval, podemos tomar como modelo qué le ocurre a un buque cuando se encuentra en un fluido homogéneo y en reposo.

Nos centraremos en fluidos en estado líquido ya que el medio de transporte que algún día tendréis que construir se desplaza principalmente por agua. La magnitud clave que hay que considerar cuando se analizan las fuerzas generadas cuando el fluido se encuentra en reposo es la **presión**, con dimensiones de fuerza por unidad de superficie.

Dividiremos este capítulo en cinco partes relacionadas entre sí. En la primera parte de este capítulo encontraréis algunos conceptos básicos. En segundo lugar, se explicará un método para calcular la fuerza hidrostática total que actúa sobre superficies planas y superficies curvas. En la tercera parte, usaremos la condición de equilibrio estático para determinar un punto sobre el que el efecto de aplicar la fuerza hidrostática total es el mismo que el efecto de la distribución continua de presiones sobre toda la superficie sumergida. Dicho punto se conoce como centro de presiones, y aprenderemos a encontrarlo para distintas geometrías. En la cuarta parte se expondrán los instrumentos de medida utilizados para obtener el valor de la presión. Y para cerrar este bloque de la asignatura, aplicaremos estos conceptos al estudio de la estabilidad de un buque con geometría variable.

2. Conceptos Básicos

Como se ha mencionado, la presión es la magnitud más importante a tener en consideración a la hora de analizar un fluido en reposo.

Definición 2.1. *Se define la **Presión** como la fuerza normal o fuerza perpendicular ejercida por un fluido, por unidad de superficie. O sea: esfuerzo normal, σ .*

La presión (p) se mide en **pascuales** en el S.I., y el símbolo de esa unidad es (**Pa**). Por definición, la presión tiene unidades de fuerza por unidad de área, y por ende:

$$1 \text{ Pa} = \frac{1\text{N}}{1\text{m}^2}$$

Otras unidades que se utilizan frecuentemente son el bar y la atmósfera:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ (Pa)}$$

$$1 \text{ atm} = 101.325 \text{ (Pa)}$$

2.1. Presión absoluta y presión relativa

La presión suele ir acompañada de otra palabra que indica con respecto a qué referencia se está midiendo. Por ejemplo, la **presión absoluta** es la presión real dada en una posición. Se mide con respecto al vacío absoluto, que tiene presión absoluta cero.

Por otro lado, la **presión relativa o manométrica** indica la diferencia de presión con respecto a la presión atmosférica local:

$$p_{man} = p_{abs} - p_{atm}. \tag{1}$$

2.2. Presión en un Punto

La presión es una fuerza de compresión por unidad de área. En ocasiones pensamos que la presión es un vector debido a que la fuerza de compresión lo es. Sin embargo, la presión en cualquier punto de un fluido es un escalar (número) que no depende de la dirección. Puede consultarse el libro de Çengel-Cimbala [3], pág. 67 - 68, para una explicación detallada.

De forma intuitiva, pensemos que la presión es la magnitud macroscópica consecuencia de las colisiones continuas de las moléculas que componen el fluido real contra las paredes sólidas en contacto con dicho fluido (por ejemplo, las paredes de un contenedor). Podemos reorientar las paredes en otra dirección y seguiremos detectando la misma presión. Es más, podríamos reducir el tamaño del contenedor hasta un tamaño minúsculo y seguiremos teniendo un único valor de la presión. Por supuesto, la *fuerza* que ejerce el fluido sobre las paredes *sí* es un vector y tiene módulo, dirección y sentido.

Pero recuerda:

La presión NO ES UN VECTOR, es un ESCALAR

2.3. Variación de la Profundidad

Intuitivamente, la presión es igual en planos horizontales dentro de un líquido en reposo y aumenta con la profundidad. Supongamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. Sea una caja imaginaria de líquido que se encuentra suficientemente sumergida o, dicho de otra forma, una región de líquido con forma de caja. El líquido es incompresible, es decir, no presenta variación en su densidad. (Fig. 1)

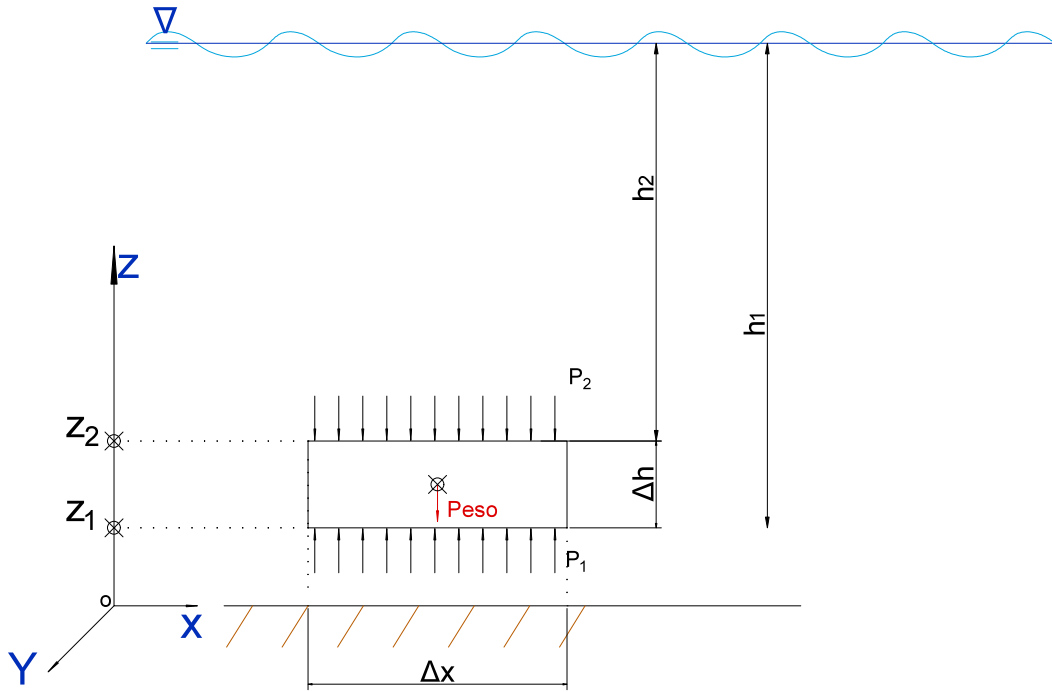


Figura 1: Análisis de Fuerzas en una caja suficientemente sumergida

Dimensiones de la Caja: $\Delta x \times b_y \times \Delta h$

$h \equiv$ Profundidad en cada punto (por ejemplo, h_1 es la profundidad de los puntos del fondo de la caja; $H \equiv$ profundidad máxima).

$V \equiv$ Volumen.

$\rho \equiv$ Densidad del fluido.

$z \equiv$ Coordenada Vertical.

$b_y \equiv$ Ancho en eje y .

Como el medio está en reposo, consideremos el problema de Estática de Fluidos. Analizando el objeto sumergido, se observa que en ambas caras horizontales aparece una presión p_1, p_2 . Según las leyes de la estática, debe haber equilibrio de fuerzas sobre el cuerpo, es decir, $\sum \vec{F} = 0$. Si analizamos el eje z (positivo hacia arriba) y sabiendo que la presión es una fuerza por unidad de área:

- **Tener en cuenta:** Para entender lo siguiente, es conveniente tener presente la ilustración anterior. (Fig. 1).

$$\Delta p = p_2 - p_1 < 0$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 < 0$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 > 0$$

- **Equilibrio Estático** $\implies \sum F_z = 0$

En la dirección z encontramos 3 fuerzas: aquellas debidas a las presiones p_1, p_2 , y el propio peso de la caja de líquido con densidad ρ . (**Criterio de signos:** hacia arriba positivo, hacia abajo negativo)

$$F_{1z} = p_1 A = p_1 b \Delta x$$

$$F_{2z} = -p_2 A = -p_2 b \Delta x$$

$$P_z = -m g = -\rho V g = -\rho g (b \Delta x \Delta z)$$

Por tanto, para que haya equilibrio:

$$F_{1z} + F_{2z} + P_z = 0 \implies p_1 b \Delta x + (-p_2 b \Delta x) - \rho g (b \Delta x \Delta z) = 0$$

Agrupando las presiones y simplificando, obtenemos:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho g \Delta z$$

¡OJO! En este caso se está usando la coordenada z , por eso tiene el signo menos (-), si ponemos la expresión en términos de profundidad (h), el signo se ve cancelado. $\Delta z = -\Delta h$

O, equivalentemente:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g \Delta h \quad (2)$$

Veamos si tiene sentido:

- Si analizamos esta última ecuación (2) suponiendo que el Punto 2 se encuentra en la superficie, se aprecia que la presión $p_2 = p_{atm}$ y $h_2 = 0$. Renombrando $h_1 \rightarrow h$ y teniendo en mente que entonces $h = H - z$:

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1) \implies p_1 - p_{atm} = \rho g h \quad (3)$$

De aquí viene la conocida expresión “ $p = \rho g h$ ”. Vemos que la presión p para un fluido estático e incompresible sólo depende de la profundidad. Además, según Ec. (1):

$$p_{1man} = \rho g(H - z) \quad (4)$$

- Si consideramos que los **fluidos son compresibles**, es decir, la densidad varía en función de la posición, nos fijamos en cajas de altura dz . Con lo que se obtiene que:

$$dp = -\rho g dz \implies \Delta p = -g \int_1^2 \rho(x, y, z) dz \quad (5)$$

aunque esta expresión no la usaremos.

Consecuencia 2.1. *En fluidos Incompresibles ($\rho = \text{cte}$) y en reposo ($v_{\text{fluido}} = 0$), la forma del recipiente no importa. (Fig. 2)*

Sean los puntos (1) y (2), indicados en la figura siguientes, la presión en el punto (1) es igual a la presión en el punto (2), esto es debido a que la presión (p) sólo depende de la profundidad (h).

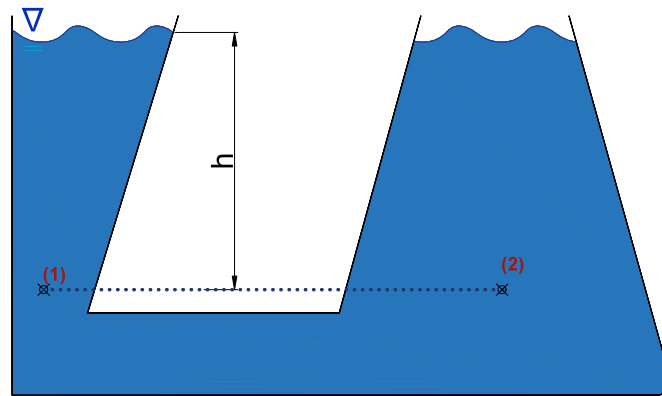


Figura 2: Ejemplo con forma variada y fluido incompresible

Consecuencia 2.2. Ley de Pascal:

La presión aplicada a un fluido confinado se reparte uniformemente por todo el fluido.

Un ejemplo de aplicación puede verse en la Fig. 3.

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ F_1 &= p_1 A_1 = p A_1 \\ F_2 &= p_2 A_2 = p A_2 \end{aligned}$$

A igualdad de presión, si
 $A_2 > A_1 \implies F_2 > F_1$

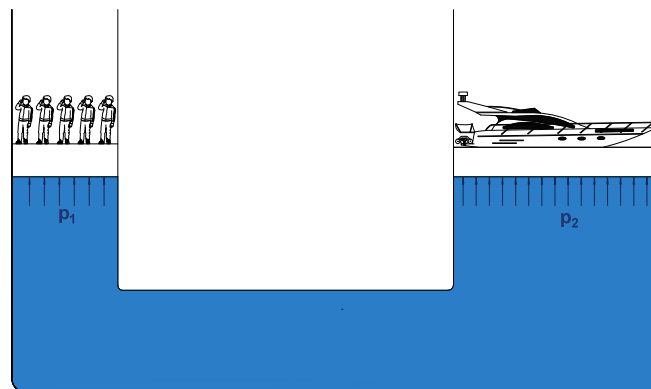


Figura 3: Aplicación de Principio de Pascal

2.4. Sistemas de Coordenadas

Siempre es muy importante tener claro el sistema de coordenadas que estamos usando. Esto nos permitirá poder hacer cambios de sistema de coordenadas y posiblemente simplificar el problema que tengamos entre manos. Veamos en la ilustración siguiente la importancia que tiene considerar un sistema de coordenadas u otro. (Fig. 4)

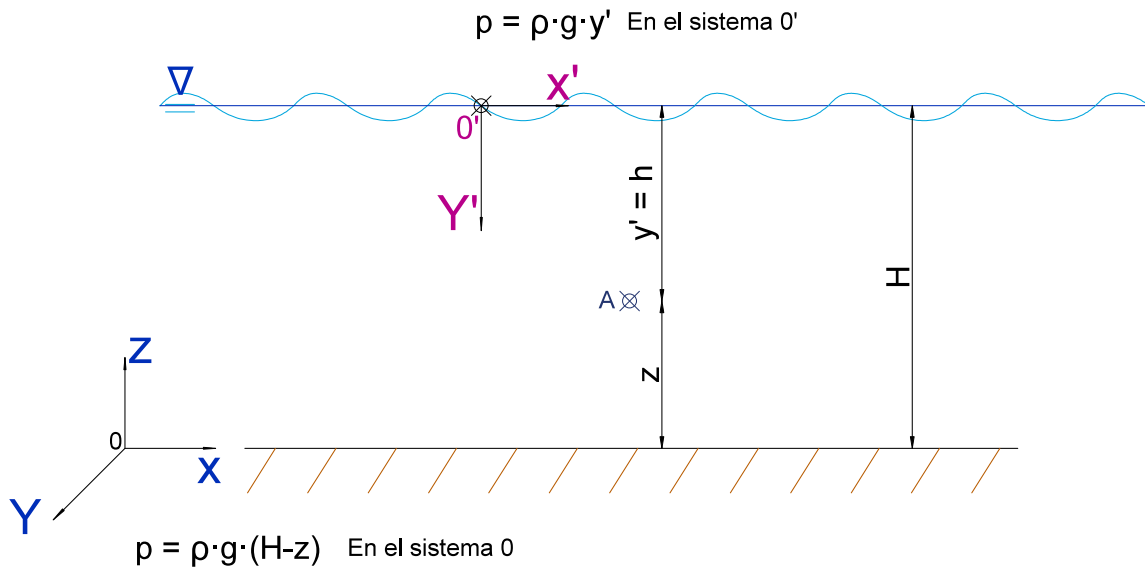


Figura 4: Importancia del Sistema de Coordenadas

Podemos observar dos sistemas de coordenadas, el primero situado en el fondo del mar (XOY), y el segundo en la superficie libre, es decir, en la flotación considerada ($X'O'Y'$). Como se aprecia en la figura anterior, el punto A está situado a una profundidad h , y posee una coordenada vertical z en el sistema O , lo que es lo mismo a tener una coordenada vertical y' en el sistema O' .

Si deseamos saber la presión en un punto intermedio entre la flotación y el fondo del mar, deberemos aplicar la ecuación (4). ¿Qué ocurre? La expresión indicada está referida a un sistema de coordenadas situado en el fondo del mar.

¿Pero qué ocurriría si deseamos obtener la presión referida a la flotación con tal de facilitar los cálculos?

Considerar un sistema de coordenadas hace que la expresión cambie ligeramente, en este caso el término referido a la profundidad. Si en vez del sistema XOY empleamos el sistema X'O'Y', donde la coordenada Y apunta al fondo del mar, la profundidad (h) resulta ser directamente la coordenada y' , siendo esta máxima en el fondo, y nula cuando está en la flotación.

Comprobémoslo:

$$p_{man} = \rho g h \quad (6)$$

* Como $h = (H - z)$, en el sistema O :

$$p|_O = \rho g (H - z) \quad (7)$$

* Pero también ocurre que $h = y'$, en el sistema O':

$$p|_{O'} = \rho g (y') \quad (8)$$

Si $y' = H$, la presión la estaremos calculando para la profundidad máxima (Ec. (8)), y esto equivale a la presión calculada para $z = 0$ en la ecuación (Ec. (7)).

3. Fuerza Hidrostática Sobre Superficies Sumergidas

El objetivo de esta sección del tema es tratar de encontrar la fuerza equivalente a la que ejerce un fluido en reposo sobre un sólido. Esto implica calcular la fuerza total y el punto de aplicación o centro de presiones (CP).

- En estos cálculos será más conveniente hacer uso de la presión manométrica. Esto equivale a restar la presión atmosférica a ambos lados de una estructura (ver Fig. 5).

Nota 3.1. A nuestra escala, la p_{atm} varía muy poco con la altura, por lo que es más cómodo utilizar presiones manométricas (como las que normalmente se obtienen de los instrumento de medida).

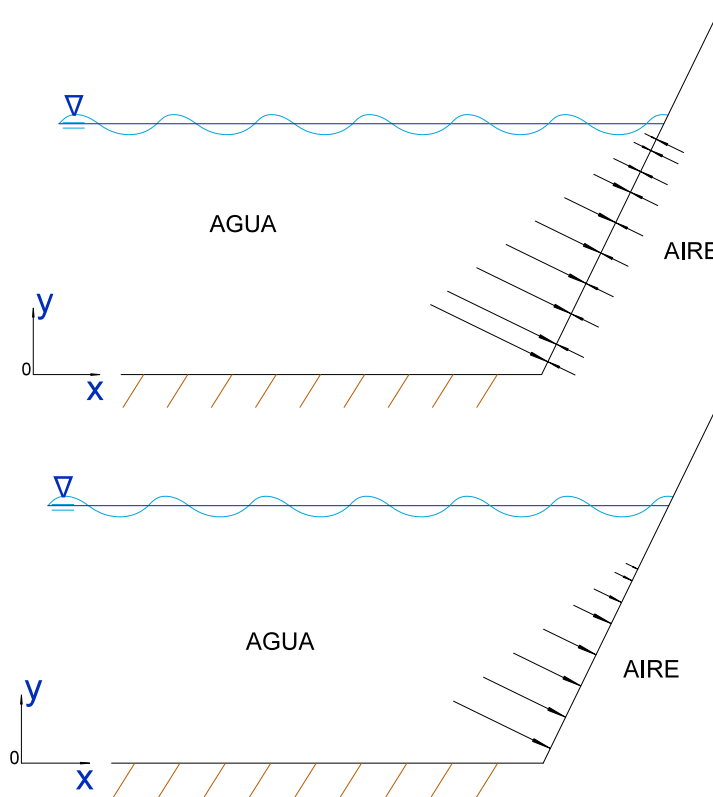


Figura 5: Calcular la fuerza hidrostática total con presiones absolutas (arriba) o manométricas (abajo) es equivalente.

3.1. Fuerza Hidrostática Total

Cada punto de fluido a presión p ejerce una fuerza $d\vec{f} = p d\vec{A}$, sobre un elemento de área dA , en la dirección normal a dA . Esta dirección normal se especifica por un vector unitario, que llamaremos $\hat{n}$, de manera que el vector diferencial de área es $d\vec{A} = \hat{n}dA$.

Si buscamos la fuerza total $\vec{F}$ en toda la superficie, esta será la suma de todas las vectores $d\vec{f}$ en cada elemento de área.

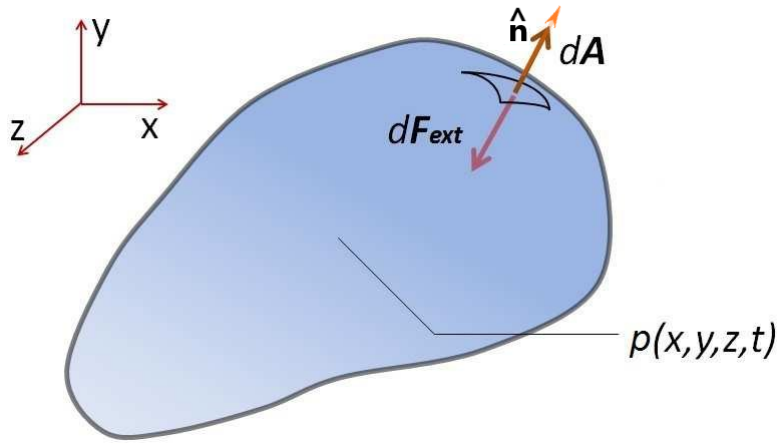


Figura 6: Diferencial de Superficie.

La fuerza sobre cada $d\vec{A}$ es:

$$d\vec{f} = p d\vec{A}, \quad (9)$$

y la suma sobre toda la superficie A será, pues, la integral de área sobre todo A :

$$\vec{F}_T = \iint_A d\vec{f} = \iint_A p d\vec{A}. \quad (10)$$

Como se está analizando la fuerza total ejercida sobre una superficie sumergida, se dividirá este epígrafe en 2 partes, donde por un lado se analizarán superficies planas, y por otro lado, superficies curvas.

3.1.1. Superficies Planas

Supongamos que tenemos una superficie plana en contacto con un líquido, como el agua, y que esta superficie tiene cierta inclinación con respecto a la horizontal.

Observemos la ilustración siguiente (Fig. 7), donde todos los $d\vec{f}$ actúan sobre la superficie apuntando a la misma dirección.

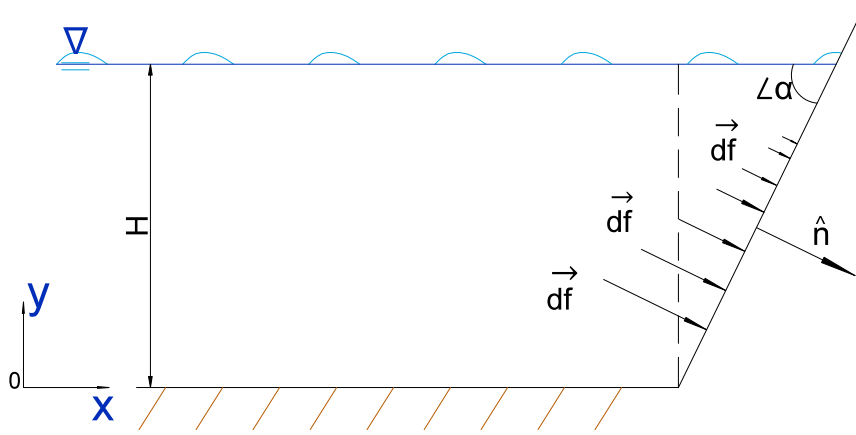


Figura 7: Ejemplo de Superficie Plana.

- Imaginémonos esta ilustración en 3D. Esta tendrá una anchura en dirección perpendicular al papel. Si la superficie fuera rectangular, esa anchura sería fija. En ese caso la denotaremos por b .
- Hay que tener en cuenta el sistema de coordenadas (en este caso, x positivo a la derecha, y positivo hacia la flotación). Esto permitirá determinar la función presión: $p = f(x, y, z) \implies p = \rho g h(x, y, z) = \rho g(H - y)$ a partir la función profundidad en cada punto $h(x, y, z)$.
- El vector $\hat{n}$ es normal a la superficie. Depende por tanto del ángulo de inclinación de la superficie y es constante para todas las $d\vec{f}$ por tratarse de una superficie plana (SPS $\equiv$ Superficie Plana Sumergida). Habrá que determinarlo en cada caso y, en particular, para este caso tenemos que $\hat{n} = \sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j}$.

Al ser constante, $\hat{n}$ puede salir de la integral:

$$\vec{F}_T = \iint_{SPS} p d\vec{A} = \hat{n} \iint_{SPS} p dA = \hat{n} |\vec{F}_T|, \quad (11)$$

donde

$$|\vec{F}_T| = \iint_S p dA \quad (12)$$

En estas última expresiones observamos que el módulo de la fuerza total se obtiene mediante una integración de las fuerzas que se ejerce sobre la superficie, mientras que la dirección de actuación lo marca el vector unitario $\hat{n}$, que es normal a la superficie ($\perp$). (Ec. (11))

Por lo tanto, para determinar la Fuerza Hidrostática total en el caso de la superficie plana, se deberá calcular por un lado el módulo, resolviendo la integral mediante los métodos conocidos de **Ampliación de Matemáticas y de Cálculo I**, y por otro lado, empleando la **Trigonometría**, obtener el valor del vector normal en el sistema de coordenadas usado.

Caso 3.1. Superficie Plana, Vertical y Rectangular

Sea una Superficie plana, dispuesta verticalmente y con geometría rectangular de ancho b , como en la figura. La superficie está en contacto con el fondo y llega a la superficie del líquido. Se desea calcular el vector Fuerza Hidrostática Total ($\vec{F}_T$) que ejerce el fluido.

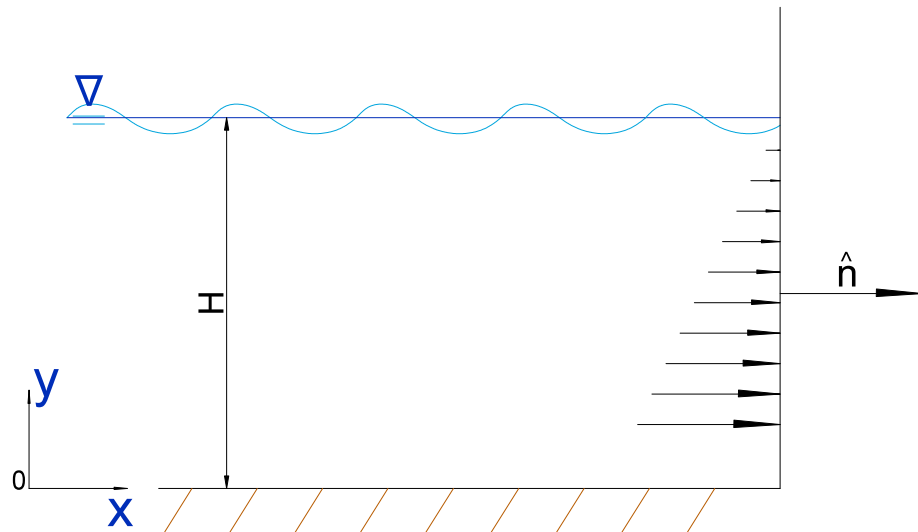


Figura 8: Ejemplo de Superficie Plana Rectangular.

Teniendo en consideración la expresión de la fuerza total en función de la presión (Ec. (11)), se seguirán los siguientes pasos para obtener el valor de la fuerza hidrostática total:

Paso 1: Colocación del sistema de coordenadas. En nuestro caso, lo fijamos en el fondo del recipiente (x es positivo hacia la derecha, y es positivo hacia la flotación y z es positivo hacia fuera del papel).

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto. Como se indica en el enunciado y en la ilustración (Fig. 8), se trata de una superficie rectangular, vertical, con ancho b . Una vez imaginado la forma que tiene la superficie, elegimos un rectángulo infinitesimal de esa misma superficie que posea dimensiones $(dy \times dz)$ (ver Fig. 9).

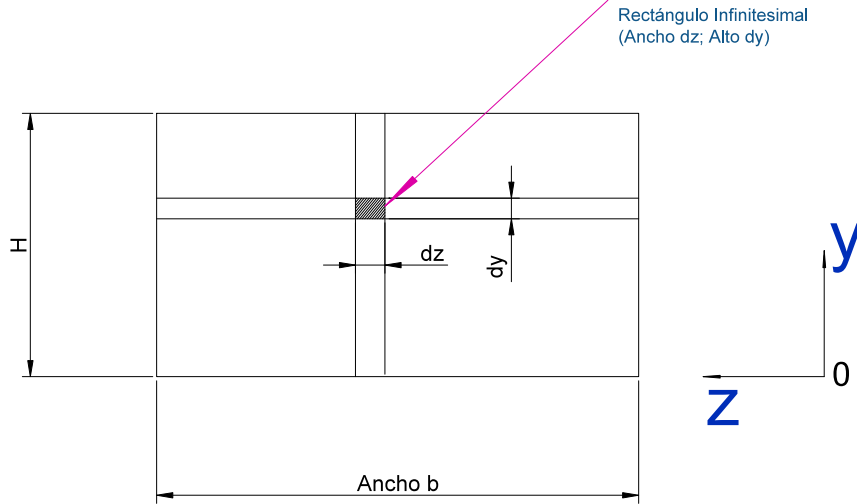


Figura 9: Representación de la Superficie Plana Sumergida 1

Por lo tanto, el dA de la expresión se puede sustituir por:

$$dA|_{SPS} = dy dz$$

Paso 3: Determinación del vector normal y unitario ($\hat{n}$). En este caso, según nuestro sistema de coordenadas, el vector normal solo posee componente en dirección X :

$$\hat{n} = (1, 0, 0) = \hat{i}$$

Paso 4: Pensamos cuál es la expresión de la presión según el Sistema de Coordenadas:

$$p = \rho gh = \rho g(H - y)$$

Paso 5: Pensamos los límites de Integración. En este caso se integrará respecto a y y respecto a z , teniendo en cuenta que el lugar geométrico que coincide con las superficie cumple:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq b \\ 0 &\leq y \leq H \end{aligned}$$

Paso 6: Sustitución en Ec. (12) y cálculo del módulo de la fuerza hidrostática total:

$$|\vec{F}_T| = \int_{z=0}^{z=b} \int_{y=0}^{y=H} \rho g(H-y) dy dz = \rho g \int_{z=0}^{z=b} \left[Hy - \frac{y^2}{2} \right]_0^H dz = \rho g \int_{z=0}^{z=b} \frac{H^2}{2} dz$$

$$|\vec{F}_T| = \frac{1}{2} \rho g b H^2 \quad (13)$$

$$\vec{F}_T = |\vec{F}_T| \hat{n} \quad (14)$$

$$\vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho g b H^2 \hat{i} \quad (15)$$

Paso 7: Comprobación de los resultados, prestando atención a las dimensiones. Es también aconsejable preguntarse si tiene sentido la expresión obtenida.

Observaciones: Analizando el vector anterior, observamos que su módulo se corresponde con la presión en el centro geométrico de la superficie (es decir, $\frac{1}{2}\rho g H$, ya que el centro queda a profundidad $H/2$), multiplicada por el área de la placa (bH) y, con dirección perpendicular a la superficie plana.

Caso 3.2. Superficie Plana, Rectangular e Inclinada

Sea una Superficie plana como la de la figura, dispuesta con cierto ángulo α respecto a la horizontal y con geometría rectangular de ancho hacia fuera del papel b . Se desea calcular el vector fuerza hidrostática total.

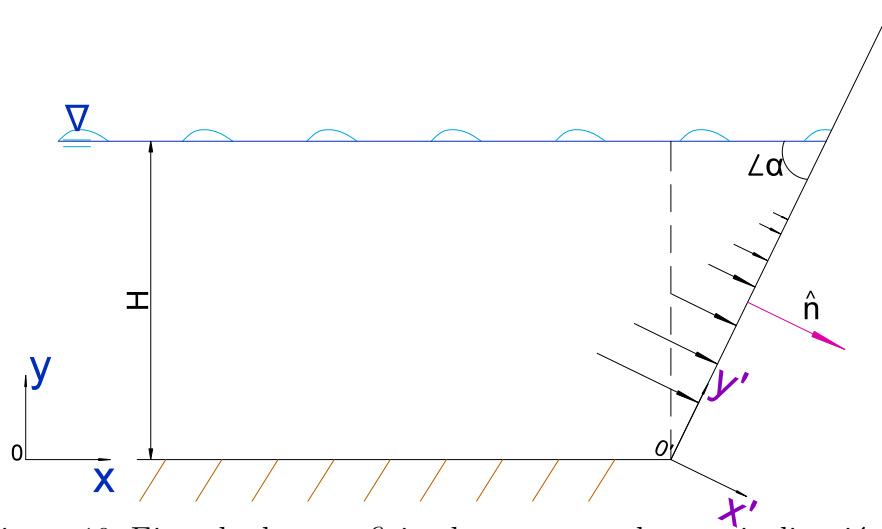


Figura 10: Ejemplo de superficie plana rectangular con inclinación α .

Para calcular la fuerza total, se aplicarán los mismos pasos que en el caso anterior.

Paso 1: Colocación del sistema de coordenadas. En este caso, nos interesa considerar un sistema que tenga dos de los ejes paralelos a la placa, digamos y' y z' . x' estará en la perpendicular a la superficie y z' es positivo hacia fuera del papel y coincide con el eje z .

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto. Como se indica en el enunciado y en la ilustración (Fig. 10), se trata de una superficie rectangular, inclinada, con ancho b . De esta superficie, elegimos un rectángulo infinitesimal que posea dimensiones $dy' \times dz$ (Fig. 11). Por tanto, cada dA de la superficie plana sumergida viene dado por:

$$dA|_{SPS} = dy' dz.$$

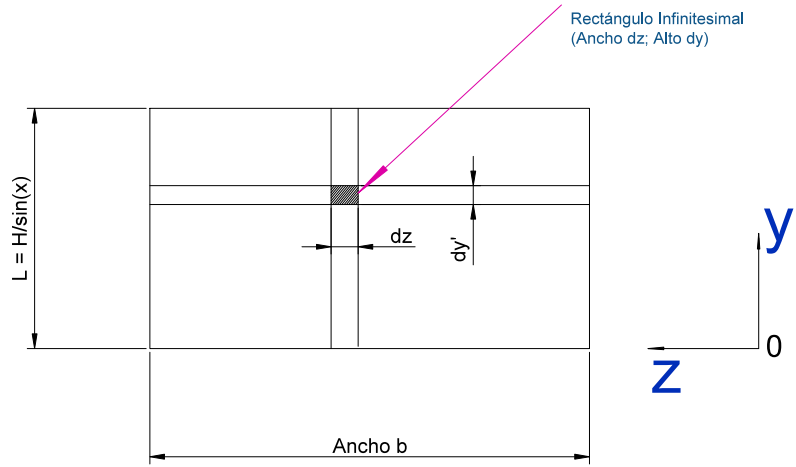


Figura 11: Representación de la Superficie Plana Inclinada Sumergida 2

Es de resaltar que, en este caso, la altura de cada punto de la placa depende del ángulo. Teniéndolo en cuenta, podemos relacionar la dimensión L de la placa con la profundidad máxima H (Fig. 10):

$$\sin \alpha = \frac{H}{L} \implies L = \frac{H}{\sin \alpha}$$

Paso 3: Determinación del vector normal y unitario $\hat{n}$. En este caso, según nuestro sistema de coordenadas, el vector normal depende del ángulo (Fig. 12).

$$\hat{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) = \sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j}$$

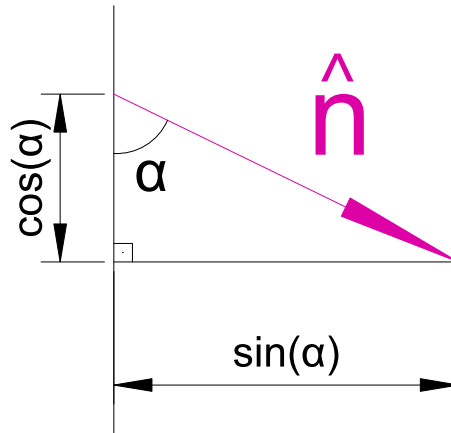


Figura 12: Análisis del vector normal en placa plana inclinada

Nota: ¿Es unitario? El vector normal deberá ser unitario, es decir, tener como módulo la unidad. Dado un vector $\vec{v}$, para que sea unitario, basta con dividirlo entre su módulo.

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Donde $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Hacemos la comprobación para nuestro $\hat{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1 \implies \textbf{Es unitario}$$

Paso 4: Expresión de la presión según el Sistema de Coordenadas. En el sistema sin prima teníamos:

$$p = \rho g h = \rho g (H - y)$$

Como el Sistema de Coordenadas que estamos usando es uno inclinado un ángulo α respecto al inicial, deberemos averiguar la relación que existe entre éstos. En la función presión solo aparece la coordenada y , que se relaciona con la y' y podemos escribir p en función de y' :

$$\sin \alpha = \frac{y}{y'} \implies y = y' \sin \alpha$$

$$p = \rho g (H - y) = \rho g (H - y' \sin \alpha)$$

Paso 5: Límites de Integración. En este caso, para barrer todos los dA de la superficie rectangular, se integrará respecto a y' y respecto a z

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq b \\ 0 &\leq y' \leq \frac{H}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Paso 6: Sustitución en la Ec. (12) y cálculo del módulo de la fuerza total.

$$\begin{aligned} |\vec{F}_T| &= \int_{z=0}^{z=b} \int_{y'=0}^{y'=\frac{H}{\sin \alpha}} \rho g (H - y' \sin \alpha) dy' dz \\ &= \rho g b \int_{y'=0}^{y'=\frac{H}{\sin \alpha}} (H - y' \sin \alpha) dy' \\ &= \rho g b \left[Hy' - \frac{y'^2}{2} \sin \alpha \right]_0^{\frac{H}{\sin \alpha}} \\ &= \rho g b \frac{H^2}{2 \sin \alpha} . \end{aligned}$$

El módulo que hemos obtenido es, por tanto:

$$|\vec{F}_T| = \frac{1}{2} \rho g b \frac{H^2}{\sin \alpha}.$$

Como tenemos el módulo y la dirección y sentido indicadas por el vector unitario, podemos construir el vector fuerza hidrostática total:

$$\vec{F}_T = |\vec{F}_T| (\sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j}) = \frac{1}{2} \rho g b H^2 \hat{i} - \frac{1}{2} \rho g b H^2 \cot(\alpha) \hat{j}.$$

Paso 7: Comprobación de los resultados.

Observación: en el vector anterior se pueden identificar dos términos: la componente x , horizontal, que llamaremos habitualmente Fuerza Horizontal, $F_H = (\frac{1}{2} \rho g H)(bH)$ (aunque es una componente de una fuerza, no un vector completo); y la componente y , que llamaremos Fuerza Vertical $F_V = (\frac{1}{2} \rho g H \cos \alpha) (\frac{bH}{\sin \alpha})$.

Entonces nos damos cuenta de que:

- F_H coincide con la fuerza sobre la proyección vertical de la superficie (línea discontinua en la Fig. 10).
- F_V coincide con el peso de la columna de fluido de volumen V situada encima de la superficie sumergida, ya que el área del triángulo rectángulo de la Fig 10 es $A_{\text{Triangulo}} = \frac{1}{2} H \times H \cot \alpha$:

$$F_V = \rho g V = \rho g (A_{\text{Triangulo}} b) = \frac{1}{2} \rho g b H^2 \cot(\alpha). \quad (16)$$

Esto pasa siempre, por lo que es muy útil tenerlo presente al resolver un problema.

Mirando el sistema de coordenadas sin prima, el vector fuerza quedará de la siguiente manera:

$$\vec{F} = +F_H \hat{i} - F_V \hat{j}.$$

Caso 3.3. Superficie Plana, Horizontal y Rectangular

Sea una superficie plana, dispuesta horizontalmente como en la figura y con geometría rectangular de dimensiones $a \times b$. Se desea calcular el vector fuerza hidrostática total.

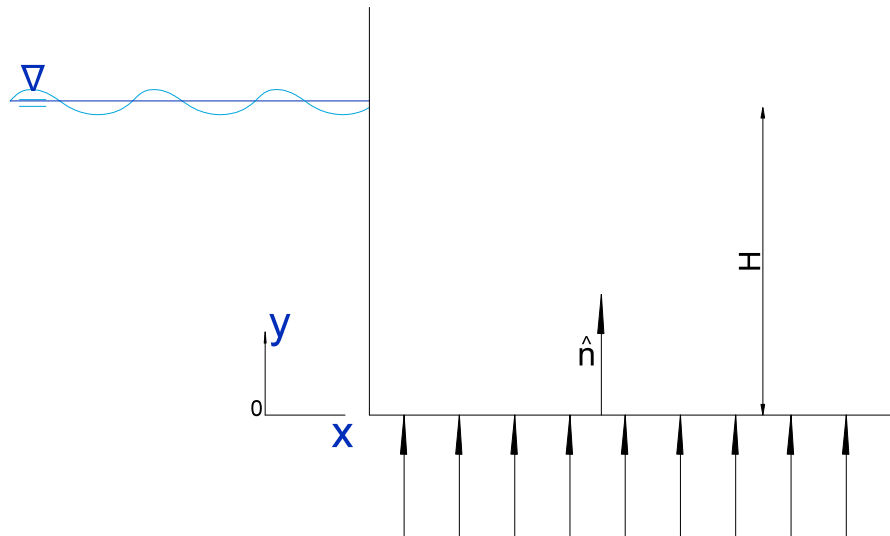


Figura 13: Ejemplo de Superficie Plana, Horizontal, Rectangular.

Paso 1: Colocación del sistema de coordenadas. En este caso, en el fondo del recipiente. x es positivo hacia la derecha, y es positivo hacia la flotación y z hacia fuera del papel.

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto. En la superficie en contacto $a \times b$ elegimos un rectángulo infinitesimal que posea dimensiones $dx \times dz$ (Fig. 14).

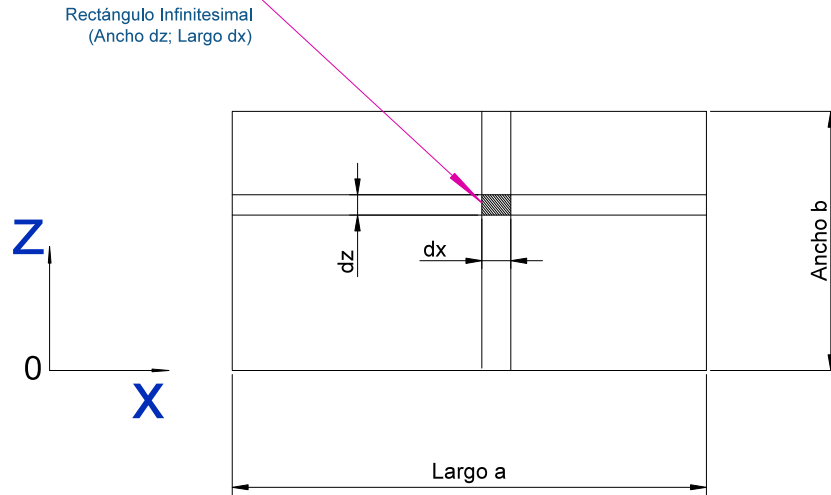


Figura 14: Representación de la Superficie Plana Sumergida Horizontal

Por lo tanto, el dA de la expresión se puede sustituir por:

$$dA|_{SPS} = dx \, dz$$

Paso 3: Determinación del vector normal y unitario ($\hat{n}$). Según nuestro sistema de coordenadas, el vector normal solo posee componente en dirección y .

$$\hat{n} = (0, 1, 0) = \hat{j}$$

Paso 4: Expresión de la presión según el Sistema de Coordenadas. En este caso, como la superficie está sumergida horizontalmente, la presión en todos los puntos de la superficie es la misma y no depende de las coordenadas:

$$p = \rho g H$$

Paso 5: Límites de Integración. En este caso se integrará respecto a x y respecto a z .

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq z \leq b$$

Paso 6: Sustitución en Ec. (12) y cálculo del módulo de la fuerza total.

$$|\vec{F}_T| = \int_{z=0}^{z=b} \int_{x=0}^{x=a} \rho g H \, dx dz = \rho g H (a b)$$

$$\vec{F}_T = |\vec{F}_T| \hat{n} = \rho g H a b \hat{j}$$

Paso 7: Comprobación de los resultados. Este valor de fuerza equivale al peso del volumen de fluido que quedaría por encima de la superficie si "inundáramos" el espacio encima de ella (pero con sentido opuesto) (Fig. 15).

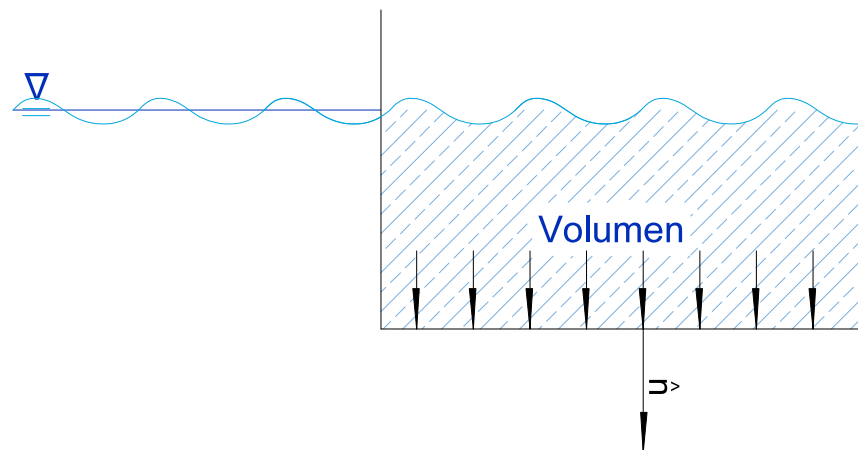


Figura 15: Representación de la situación que hay que *imaginar* para conocer la componente vertical de la fuerza hidrostática si la superficie queda **por encima** del líquido.

Ojo: la situación representada en la Fig. 15 es una imagen mental que podemos hacernos para determinar el volumen de fluido cuyo peso determina la fuerza hidrostática vertical y hacia arriba que se ejerce sobre la placa de la Fig. 13.

Ejemplo 3.1. Calcular la fuerza que se ejerce sobre la superficie rectangular inclinada de la figura siguiente:

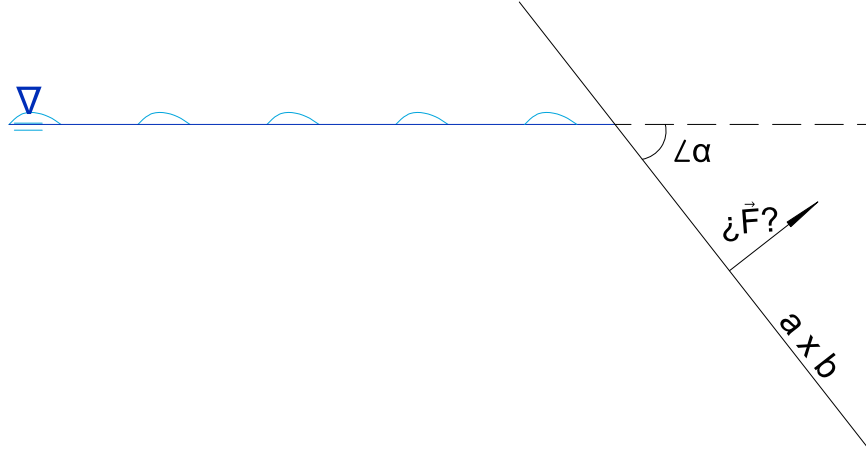


Figura 16: Ejemplo Superficie Rectangular inclinada 2

En vez de emplear la integración directa, haremos los cálculos de este ejemplo empleando las expresiones obtenidas anteriormente para (F_H, F_V) , así ilustraremos cómo se usan. Después obtendremos el vector fuerza total que, en un sistema de coordenadas con el eje x hacia la derecha y el eje y hacia arriba, vendrá dado por:

$$\vec{F}_T = F_H \hat{i} + F_V \hat{j} \quad (17)$$

Hay que tener en cuenta que tendremos que determinar la presión según dónde esté situado el origen de coordenadas elegido. Una vez finalizado los cálculos, el valor de la fuerza deberá coincidir con la que se obtendría mediante integración directa en un sistema de coordenadas alineado con la superficie inclinada.

- a) **Fuerza Horizontal:** como vimos antes, podemos calcularla considerando que es la fuerza sobre la proyección vertical de la superficie inclinada.

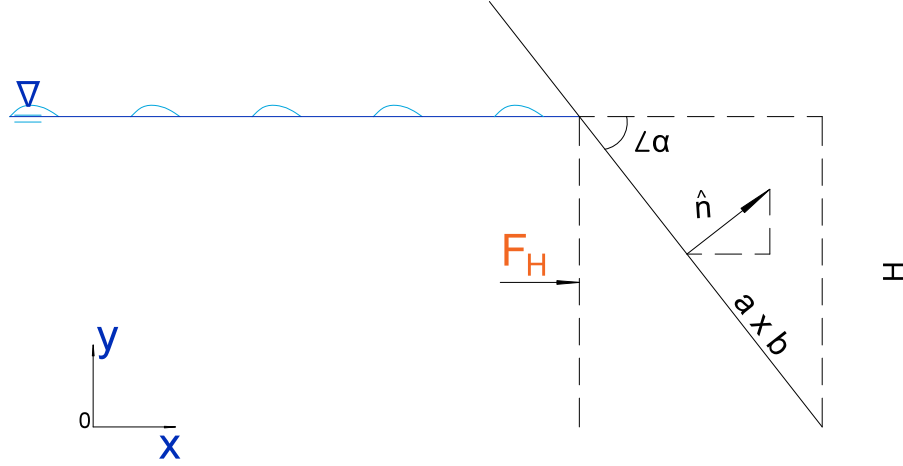


Figura 17: Proyección Horizontal de la Fuerza

Podemos definir la profundidad ($H = a \sin \alpha$), lo que facilitará a la hora de efectuar los cálculos. Como estamos considerando la proyección vertical, podemos seguir los mismos pasos que en el caso de una superficie plana, vertical y rectangular (Fig. 8):

$$F_H = \iint_{SPS} p dA,$$

donde $p = \rho g (H - y)$. Por lo tanto, sustituyendo:

$$\begin{aligned} F_H &= \iint_{SPS} p dA = \int_{z=0}^{z=b} \int_{y=0}^{y=H} \rho g (H - y) dy dz \\ &= \frac{1}{2} \rho g b H^2 = \frac{1}{2} \rho g b a^2 \sin^2 \alpha \\ F_H &= \frac{1}{2} \rho g b a^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

- b) **Fuerza Vertical:** Coincide con el peso del volumen que quedaría por encima (Ec. (16)):

$$F_V = \rho g V = \rho g (A_{tri} b) = \rho g b \frac{a \cos \alpha H}{2} = \frac{1}{2} \rho g b a^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Mirando el sistema de coordenadas elegido, el vector fuerza quedará de la siguiente manera:

$$\vec{F} = +F_H \hat{i} + F_V \hat{j}.$$

Por lo que agrupando obtenemos que:

$$\vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho g b a^2 \sin \alpha (\sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}).$$

¡OJO! En este paso es fundamental tener en cuenta la dirección del vector normal: componente horizontal (x) del vector normal positiva y componente vertical (y) del vector normal positiva.

Realizando los cálculos por integración directa obtendríamos el mismo resultado. De hecho, podemos hacer la siguiente

Observación:

En la expresión obtenida podemos identificar directamente dos cosas:

- El vector unitario normal, dado por $\hat{n} = \sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}$.
- El módulo de la fuerza total, que resulta ser

$$|\vec{F}_T| = \frac{1}{2} \rho g b a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho g a \sin \alpha \times (ab),$$

donde $\frac{1}{2} \rho g a \sin \alpha$ es la presión en el centro de la superficie sumergida (¡comprobar!).

Es decir: el módulo de la fuerza total resulta ser el producto de la **presión en el centro** de la superficie multiplicada **por el área total** de la superficie.

3.1.2. Problemas Resueltos de Superficies Planas Sumergidas

Problema 3.1. *Calcular la fuerza ejercida desde arriba sobre una placa rectangular sumergida horizontalmente a profundidad H , con dimensiones $a \times b$, en un líquido de densidad ρ .*

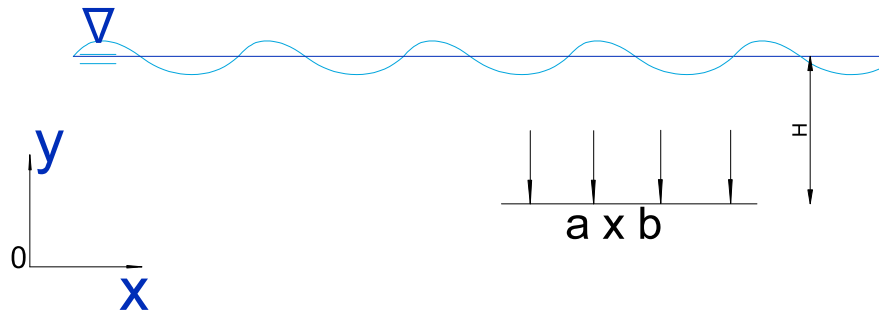


Figura 18: Fuerza ejercida sobre placa rectangular horizontal.

La fuerza que actúa es debida a la presión ejercida por el fluido en la placa, y es perpendicular a ella en cada punto.

Paso 1: Elegimos el sistema de coordenadas que queramos.

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto.

Según nuestro Sistema de Coordenadas: $dA = dx dz$

Paso 3: Obtención del vector normal.

Como los $d\vec{f}$ inciden perpendicularmente a la placa, el vector normal será:

$$\hat{n} = (0, -1, 0) = -\hat{j}$$

Paso 4: Expresión de la presión.

Si ponemos el origen de coordenadas sobre la propia placa, la función presión vendrá dada por $p = \rho g(H - y)$. Como cada punto infinitesimal de la placa está a la misma distancia de la flotación (H), la expresión de la presión sobre la placa (situada en $y = 0$) será $p = \rho gH$.

Paso 5: Sustitución en integral.

$$d\vec{f} = |\vec{F}_T| \hat{j} = \left(\iint_{placa} p \, dA \right) \hat{j}$$

$$F = \iint_{placa} \rho g H \, dx dz = \rho g H \int_{z=0}^b \int_{x=0}^a dx dz = \rho g H ab$$

$$\vec{F}_T = -\rho g ab H \hat{j}$$

Nota: ¡Este valor equivale al peso de la columna de fluido sobre la placa (F_V)!

Problema 3.2. Calcular la fuerza hidrostática total que actúa sobre la superficie de la figura: un tramo horizontal de longitud a , y un tramo inclinado con longitud l , ambos rectangulares y con ancho b (Fig. 19).

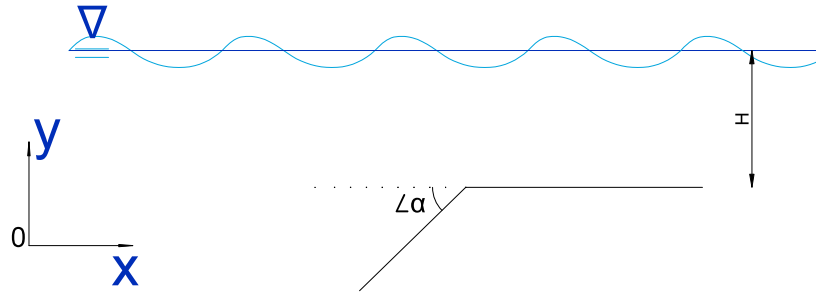


Figura 19: Fuerza hidrostática sobre superficie compuesta.

Para resolver este problema, separemos la superficie en dos trozos: el horizontal y el inclinado.

- a) **Tramo Horizontal:** Se trata de una situación análoga al problema anterior. Llamemos S_1 al tramo horizontal. La fuerza sobre S_1 será puramente vertical, de forma que basta calcular F_V . Esta vendrá dada por el peso del volumen de fluido que queda por encima, así que $\vec{F}_1 = -\rho g ba H \hat{j}$.

- b) **Tramo Inclinado:** Para obtener la fuerza hidrostática $\vec{F}_2$ de este tramo ($S_2 \equiv$ tramo inclinado) nos damos cuenta de que $\vec{F}_2$ tiene tanto componente horizontal F_H como componente vertical F_V . El método que seguiremos habitualmente consistirá en determinar esas componentes por separado, tal y como ya se ha descrito antes: F_H se puede obtener calculando la fuerza sobre la proyección vertical de S_2 , mientras que F_V es el peso de la columna de fluido que queda por encima de S_2 . **Sin embargo, vamos a desviarnos del método descrito por motivos pedagógicos**, de manera que nos convenzamos definitivamente de que el método es correcto: vamos a calcular $\vec{F}_2$ mediante integración directa.

Si situamos el origen de coordenadas O en el borde inferior de S_2 (con y vertical y hacia arriba y x horizontal), la función presión vendrá dada por

$$p = \rho g(H + l \sin \alpha - y). \quad (18)$$

Comprobación: démonos cuenta de que si $y = 0$, estamos a profundidad H más la proyección vertical de la placa de longitud l , es decir, $l \sin \alpha$ y la presión ahí es, en efecto, $p = \rho g(H + l \sin \alpha)$.

Sin embargo, para el cálculo mediante integración directa, es necesario fijar unos nuevos ejes x' e y' cuyo origen está situado igual que antes (en el borde inferior de S_2), pero de forma que y' es paralelo a S_2 y x' es perpendicular a S_2 . Esto permitirá poner **la presión** en cualquier punto **en función de la coordenada y'** :

$$p = \rho g(H + l \sin \alpha - y' \sin \alpha).$$

El diferencial de superficie que nos interesará es:

$$dA = dy' dz,$$

con un vector normal dado por:

$$\hat{n} = \sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j}.$$

En ese sistema de coordenadas podemos calcular el módulo de $\vec{F}_2$:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_2| &= \iint_{S_2} p \, dA = \int_{z=0}^b \int_{y'=0}^l \rho g(H + l \sin \alpha - y' \sin \alpha) \, dy' dz' = \\ &= \rho g b \left[H y' + l \sin \alpha y' - \frac{1}{2} \sin \alpha y'^2 \right]_0^l = \\ &= \rho g b H l + \frac{1}{2} \rho g b l^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Por tanto:

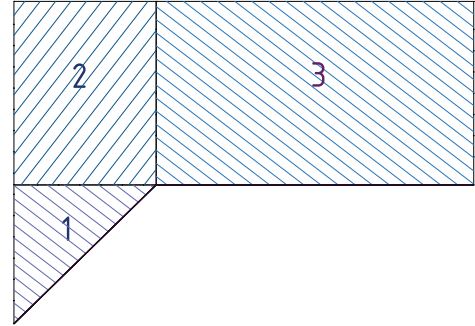
$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= |\vec{F}_2| \hat{n} = \\ &= \rho g b l \left(H + \frac{1}{2} l \sin \alpha \right) \sin \alpha \hat{i} - \left(\rho g b H l \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho g b l^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \hat{j}.\end{aligned}$$

De ahí obtenemos la fuerza hidrostática total sobre esta superficie:

$$\begin{aligned}\vec{F}_T &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \\ &= \rho g b l \left(H + \frac{1}{2} l \sin \alpha \right) \sin \alpha \hat{i} - \left(\rho g b H l \cos \alpha + \frac{1}{2} \rho g b l^2 \sin \alpha \cos \alpha + \rho g b H a \right) \hat{j}.\end{aligned}$$

Ahora viene la parte instructiva para afianzar el método usual: en esta última expresión, podemos identificar los siguientes pesos de columnas de fluido:

- **Peso de 1:** $\frac{1}{2} \rho g b l^2 \sin \alpha \cos \alpha$
- **Peso de 2:** $\rho g b H l \cos \alpha$
- **Peso de 3:** $\rho g b H a$



¡Vemos que el método usual funciona para obtener F_V !

Ahora verificamos si el método para obtener la componente horizontal de la fuerza da el mismo resultado que la integración directa que acabamos de ver. F_H se puede obtener mediante el cálculo de la fuerza sobre la proyección vertical de S_2 . Esta proyección resulta ser el lado vertical del triángulo 1 en la figura anterior (¡ojo!, la proyección NO llega hasta la superficie libre del agua). De esta forma, usando la presión en el sistema de coordenadas sin prima dada en (18):

$$\begin{aligned}F_H &= \int_{z=0}^b \int_{y=0}^{l \sin \alpha} \rho g (H + l \sin \alpha - y) dy dz \\ &= \rho g b \left[H y + l \sin \alpha y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{l \sin \alpha} = \rho g b (H l \sin \alpha + \frac{1}{2} l^2 \sin^2 \alpha),\end{aligned}$$

que, efectivamente, ¡coincide con la componente horizontal de $\vec{F}_T$!

3.1.3. Superficies Curvas

Viendo el resultado del problema anterior, consideremos la siguiente superficie sumergida vista de perfil:

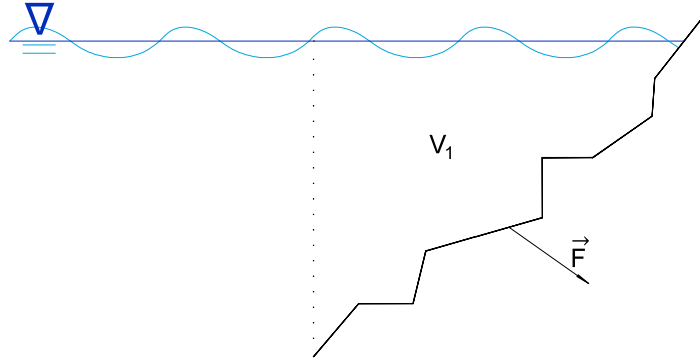


Figura 20: Ejemplo de Superficie compuesta.

Teniendo en cuenta el Sistema de Coordenadas elegido, la fuerza total será:

$$\vec{F}_T = F_H \hat{i} - F_V \hat{j}. \quad (19)$$

Como hemos visto, para superficies planas o incluso superficies compuestas de piezas planas, la Fuerza Horizontal F_H se puede determinar calculando la fuerza que se ejerce sobre la proyección vertical (la línea de puntos en la Fig. 20), y la Fuerza Vertical F_V se puede obtener considerando el peso de la columna de fluido encima de la superficie (V_1 en la figura).

Lo anterior ocurrirá para *cualquier* superficie hecha de trozos planos. Y, particularmente, se podrá obtener la fuerza para una superficie compuesta por infinitos trozos de planos infinitamente pequeños. Y eso no es más que una superficie curva (Fig. 21).

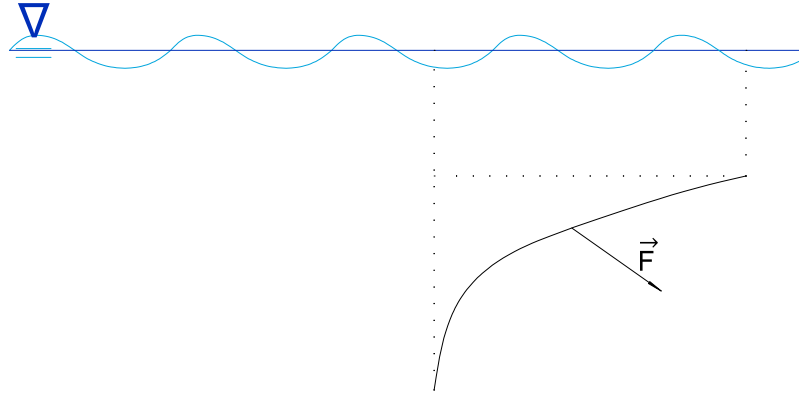


Figura 21: Ejemplo de Superficie Curva.

Caso 3.4. *Calcula la Fuerza Hidrostática total ejercida sobre la presa de sección circular que posee radio R y ancho b (Fig. 22).*

Solución:

- $F_H = \frac{1}{2} \rho g b R^2$
- $F_V = \frac{1}{4} \pi \rho g b R^2$

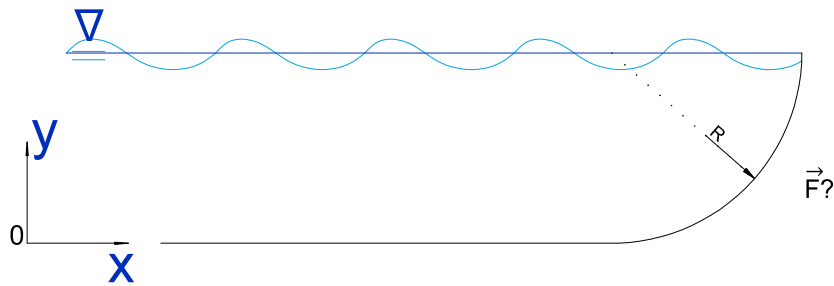


Figura 22: Ejercicio Presa sección circular.

Nota: En esta parte del tema es necesario recordar cómo se integran funciones en recintos no rectangulares, así como los cambios de coordenadas entre cartesianas y cilíndricas. Esto nos puede ayudar mucho a la hora de calcular la Fuerza hidrostática total y, más adelante, el centro de presiones.

Vamos a calcular por separado F_H y F_V . Según nuestro Sistema de Coordenadas, el diferencial de área para la proyección vertical de la superficie vendrá dado por $dA = dy dz$, y la expresión de la presión es: $p = \rho g(R - y)$. Hacemos los cálculos:

Fuerza Horizontal:

$$F_H = \int_0^b \int_0^R \rho g(R - y) dy dz = \frac{1}{2} \rho g b R^2 = \left(\frac{R}{2} \rho g \right) (bR).$$

Fuerza Vertical:

El volumen que tenemos que tener en cuenta es la correspondiente al cuarto de circunferencia en la figura.

$$F_V = \rho g V = \rho g \left(\frac{1}{4} \pi R^2 b \right) = \frac{1}{4} \pi \rho g b R^2.$$

Por lo tanto, la fuerza hidrostática total será:

$$\vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho g b R^2 \hat{i} - \frac{1}{4} \pi \rho g b R^2 \hat{j}.$$

Problema 3.3. La cúpula de la figura está compuesta por media esfera de radio R y un tubo de diámetro d . Pesa 30 kN y se encuentra llena de agua hasta el nivel indicado y atornillada al suelo por 6 tornillos equiespaciados. ¿Qué fuerza ejerce cada tornillo? El radio de la cúpula es de $R = 2.00 \text{ m}$, $H = 4.00 \text{ m}$ y $d = 3.00 \text{ cm}$.

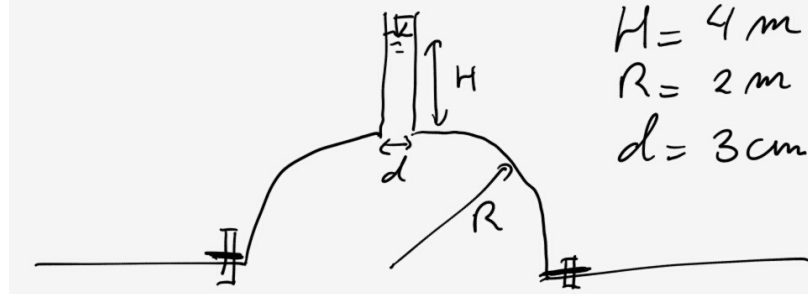


Figura 23: Ejercicio Cúpula.

Damos unas indicaciones y la solución. Como existe simetría, no habrá fuerzas laterales y va a existir una única fuerza hacia arriba (ejercida por el agua), y dos fuerzas hacia abajo: por un lado la fuerza que ejercen los tornillos y por otro lado el propio peso de la cúpula.

Como el agua se encuentra por debajo de la superficie de la cúpula, la fuerza hidrostática vertical y hacia arriba vendrá dada por el volumen de agua que *quedaría* por encima de la cúpula si el entorno estuviera inundado de agua hasta el nivel $R + H$. Habrá que calcular por tanto el peso de ese volumen, constituido por un cilindro de radio R y altura $R + H$ al que se le quita el volumen de media esfera y el volumen de un pequeño cilindro de diámetro d y altura H .

Además, habrá que aplicar las leyes de la estática: $\sum \vec{F} = 0$ para la cúpula. Como todo ocurre en la dimensión vertical, podemos usar escalares:

$$F_{Hidro} - P_{Tor} - 6 \times F_{1 Tor} = 0.$$

De esta forma se obtiene que la fuerza que ejerce cada tornillo es $F_{1 Tor} \approx 90700 \text{ N}$.

4. Centro de Presiones (CP)

Recordatorio: en todo momento hemos estado empleando presiones manométricas.

Recordemos que estamos intentando “resumir” el efecto de la presión hidrostática distribuida por toda una superficie en una única fuerza. Pero debemos saber en qué punto de la superficie habría que aplicar dicha fuerza total, es decir, se necesitará saber cuál es el centro de presiones (CP).

El efecto de la fuerza hidrostática total ($\vec{F}_T$) debe ser el mismo que el de todas las fuerzas infinitesimales $d\vec{f}$. Para ello, deben ocurrir dos cosas:

- Que la suma de todas las diferenciales de fuerza sea la fuerza hidrostática total, como ya hemos visto:

$$\vec{F}_T = \iint d\vec{f}.$$

- Que, además, el momento de la fuerza ($\vec{F}_T$) sea **igual** que la suma de momentos de $d\vec{f}$ con respecto a algún punto de referencia.

$$\vec{M} = \iint d\vec{m}. \quad (20)$$

4.1. Momento de una fuerza

Al comenzar a estudiar la Dinámica, es usual considerar que los cuerpos con los que trabajamos son puntos materiales, lo que implica que no nos interese en qué parte del cuerpo se aplican las fuerzas. Esto es muy interesante para introducir la Dinámica, pero es algo que en la vida real no ocurre. Los cuerpos que nos rodean son extensos, provocando que el efecto de las fuerzas sobre ellos dependa del punto de aplicación, dando lugar a un movimiento de traslación y de rotación (giro).

Para poder explicar esto, un ejemplo muy ilustrativo es la de una puerta: dependiendo de dónde empujemos la puerta, nos costará más o menos. En otras palabras, no es lo mismo empujar la puerta desde un punto más cercano a la bisagra que empujar la puerta desde el pomo. Está claro que necesitarás emplear más fuerza en un punto que otro. ¡El Punto de Aplicación de la fuerza influye mucho!

El momento de una fuerza, $\vec{M}$, también denominado como torque, momento dinámico o par, es una magnitud vectorial que indica la capacidad de una fuerza para alterar

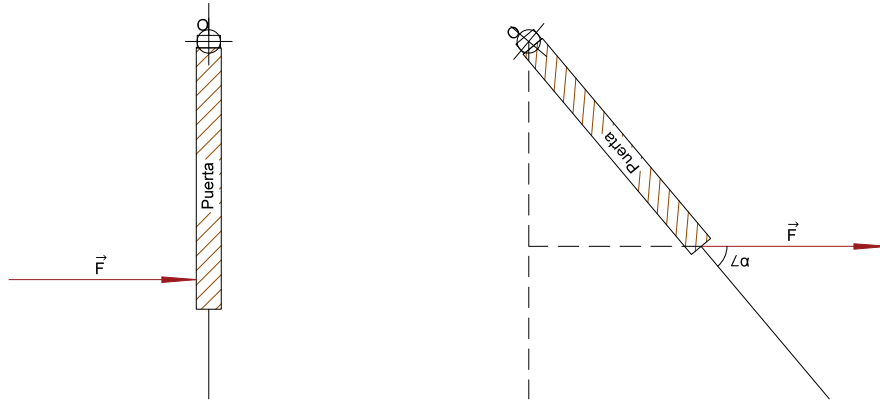


Figura 24: Momento de la Fuerza ejercida en una puerta.

la velocidad de giro de un cuerpo, y viene dada por:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_T \implies |\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}_T| \sin \alpha = |\vec{F}_T| d, \quad (21)$$

donde $\vec{r}$ es el vector posición del punto de aplicación de la fuerza. Definimos “brazo” (d) como el producto del módulo del vector de posición $\vec{r}$ y el seno del ángulo que forma la $\vec{F}_T$ y $\vec{r}$. Véase la ilustración siguiente:

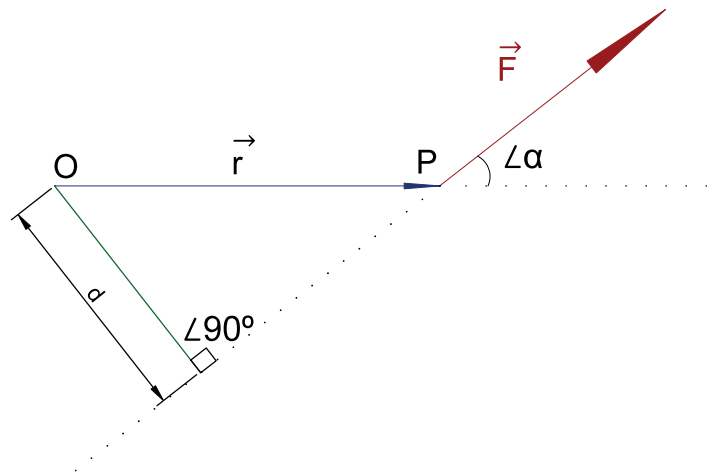


Figura 25: Momento de una fuerza

Si sobre un punto P con posición $\vec{r}$ con respecto a un origen O actúa una fuerza $\vec{F}_T$, su momento es $\vec{M}$, de módulo $|\vec{M}|$.

Observación: $\vec{F}_T$ quiere hacer “girar” P alrededor de O . Si $\alpha = 0 \implies |\vec{M}| = 0$, por lo que no podrá haber giro. (Fig. 25)

La recta por la que pasa $\vec{F}_T$ se le llama **Línea de Acción**.

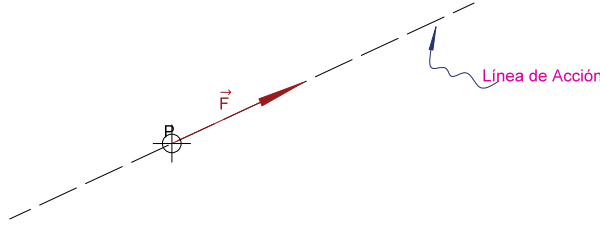


Figura 26: Línea de Acción

Para hacer uso de estos conceptos para hidrostática, vamos a tener en cuenta lo siguiente:

- Cada $d\vec{f}$ se aplica en un punto de vector de posición $\vec{r}$.
- El módulo del momento de cada $d\vec{f}$ será:

$$dm = |\vec{r} \times d\vec{f}| = (d) d|\vec{f}| = (d) df.$$

- El centro de presiones (CP) tiene posición $(\vec{r}_{CP})$.
- El momento de $\vec{F}$ será:

$$|\vec{M}| = |\vec{r}_{CP} \times \vec{F}_T| = d_{CP} |\vec{F}_T|.$$

- Para una superficie plana A , por ejemplo, todos los momentos infinitesimales estarán alineados y, dado que el momento total es la suma de los momentos infinitesimales, podemos sumar módulos y obtener la posición del CP:

$$|\vec{M}| = \iint_A dm$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_T| d_{CP} = \iint_A ddf \quad \Rightarrow \quad d_{CP} = \frac{1}{|\vec{F}_T|} \iint_A dp |d\vec{A}|$$

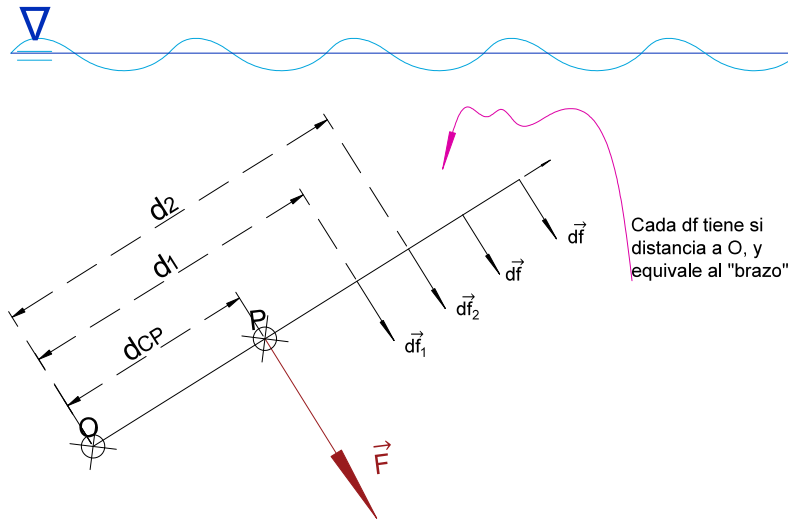


Figura 27: En una superficie plana, la fuerza total por la distancia de O al centro de presiones debe coincidir con la suma continua (la integral) de fuerzas infinitesimales por sus distancias.

4.2. Cálculo del Centro de Presiones en superficies sumergidas

Como se ha indicado en las secciones anteriores, separaremos las superficies planas de las superficies curvas.

4.3. Centro de Presiones para Superficies Planas

Veamos varios Problemas que nos sirvan de ejemplo para ir aprendiendo.

Problema 4.1. *Calcular el Centro de Presiones (CP) de una superficie rectangular horizontal sumergida (plana). Suponer que se encuentra a una profundidad H respecto a la superficie del mar, y que tiene ancho b y largo a .*

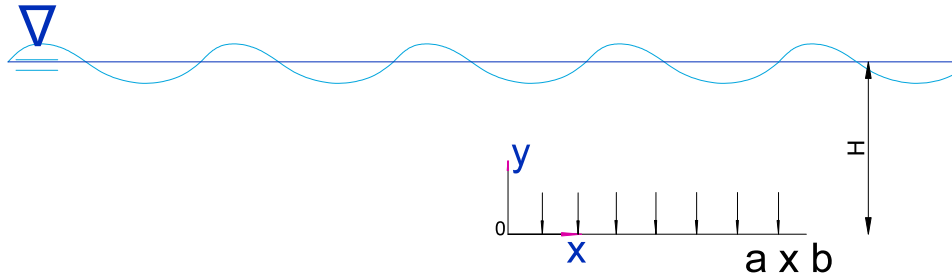


Figura 28: CP superficie horizontal sumergida.

Como hemos ido haciendo a lo largo de estas notas, seguiremos unos pasos para resolver el ejercicio de una forma más ordenada.

Paso 1: Elegimos el sistema de coordenadas que queramos (por ejemplo, el indicado en la figura). El punto que hemos cogido de referencia es O , por lo que el momento de fuerzas se obtendrá referido a ese punto.

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto.

Según el Sistema de Coordenadas elegido: $dA = dx dz$.

Paso 3: Obtención del vector normal.

Como los $d\vec{f}$ inciden perpendicularmente a la placa, el vector normal será:

$$\hat{n} = (0, -1, 0) = -\hat{j}.$$

Paso 4: Expresión de la presión.

En ese sistema, $p = \rho g(H - y)$. Como cada punto infinitesimal de la placa está a la misma distancia de la flotación (H), el valor de la presión será: $p = \rho gH$.

Paso 5: Calculamos la fuerza total:

$$|\vec{F}_T| = \iint_{\text{placa}} \rho g H \, dx dz = \rho g H ab$$

Nota: estos pasos serán necesarios para la obtención del centro de presiones. No obstante, a partir de ahora se indicará directamente la solución de la integral, ya que es una repetición de la primera parte del tema.

Paso 6: Cálculo del CP.

- El papel de d lo hará la coordenada x de cada punto de la placa (ya que es la distancia de cada punto al eje que pasa por O).
- $df = p \, dA = \rho g H \, dx dz$.

Vimos que la distancia d_{CP} se obtiene despejando de

$$|\vec{F}_T| \, d_{CP} = \iint_A d \, df. \quad (22)$$

Sustituyendo ahí:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_T| \, d_{CP} &= \iint_{\text{placa}} x \, \rho g H \, dx dz = \rho g H \int_{x=0}^a \int_{z=0}^b x \, dz dx = \\ &= \rho g H b \int_{x=0}^a x \, dx = \rho g H b \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \rho g H b a^2. \end{aligned}$$

Paso 7: Obtención de la coordenada del CP:

- $|\vec{F}_T| = \rho g H a b$
- $|\vec{F}_T| d_{CP} = \frac{1}{2} \rho g H b a^2$

Por lo tanto, la posición del centro de presiones es:

$$d_{CP} = \frac{\frac{1}{2} \rho g H b a^2}{\rho g H a b} = \frac{1}{2} a.$$

Dicho de otra manera: $\Rightarrow x_{CP} = \frac{1}{2} a$.

Análogamente, podemos obtener la posición del centro de presiones en el eje z :

$$|\vec{F}_T| z_{CP} = \iint_{placa} z \rho g H \, dx dz = \frac{1}{2} \rho g H a b^2,$$

y, por tanto,

$$z_{CP} = \frac{\frac{1}{2} \rho g H a b^2}{\rho g H a b} = \frac{1}{2} b.$$

¡En el centro geométrico de la placa!

Problema 4.2. Calcular el Centro de presiones (CP) de una superficie vertical sumergida (plana). Suponer que sobresale de la superficie del mar y que tiene una profundidad H y ancho b .

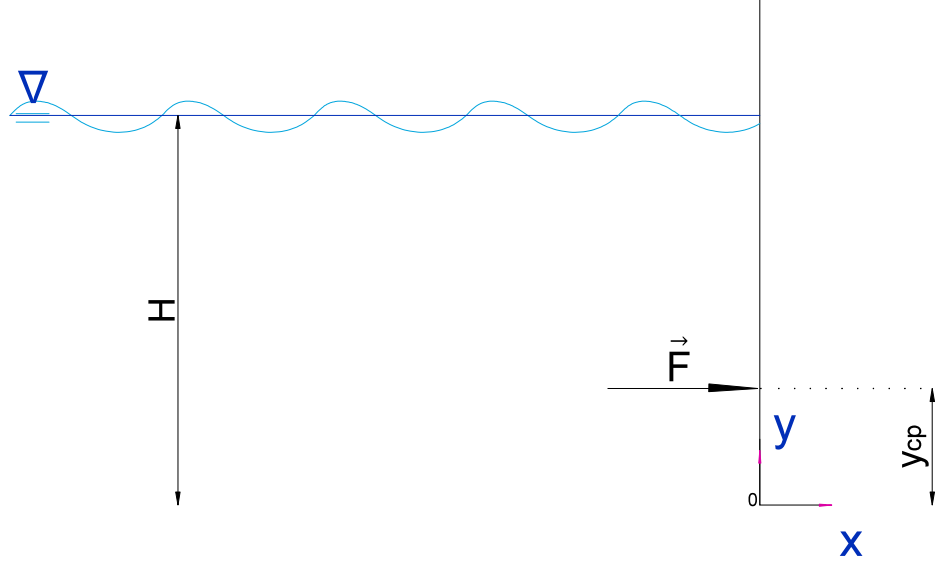


Figura 29: CP superficie vertical sumergida

Paso 1: Elegimos el sistema de coordenadas que queramos (indicado en la figura). El punto que hemos cogido de referencia es O, por lo que el momento de fuerzas se obtendrá referido a ese punto.

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto.

Según el Sistema de Coordenadas elegido: $dA = dy dz$.

Paso 3: Obtención del vector normal.

Como los $d\vec{f}$ inciden perpendicularmente a la placa, el vector normal será:

$$\hat{n} = (1, 0, 0) = \hat{i}$$

Paso 4: Expresión de la presión.

La presión va reduciéndose a medida que la coordenada vertical (y) va aumentando, por lo que la expresión de la presión será: $p = \rho g(H - y)$.

Paso 5: Sustitución en la integral.

$$|\vec{F}_T| = \iint_{placa} \rho g(H - y) dy dz = \rho g b \frac{H^2}{2}.$$

Paso 6: Cálculo del CP.

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}_T| y_{CP} &= \iint_{placa} y \rho g (H - y) dy dz = \rho g \int_{y=0}^H \int_{z=0}^b (Hy - y^2) dz dy = \\
 &= \rho g b \int_{y=0}^H (Hy - y^2) dy = \rho g b \left[\frac{Hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^H = \\
 &= \rho g b \left[\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right] = \frac{1}{6} \rho g b H^3.
 \end{aligned}$$

Paso 7: Obtención de la coordenada del CP:

- $|\vec{F}_T| = \frac{1}{2} \rho g b H^2$
- $|\vec{F}_T| y_{CP} = \frac{1}{6} \rho g b H^3$

Por lo tanto, la posición del centro de presiones es:

$$y_{CP} = \frac{\frac{1}{6} \rho g b H^3}{\frac{1}{2} \rho g b H^2} = \frac{1}{3} H.$$

Como vemos,

¡ $\vec{F}_T$ no se aplica en el centro de la superficie!

Análogamente, podemos obtener la posición del centro de presiones en el eje z :

$$|\vec{F}_T| z_{CP} = \iint_{placa} z \rho g (H - y) dy dz = \frac{1}{4} \rho g H^2 b^2.$$

Y por tanto,

$$z_{CP} = \frac{\frac{1}{4} \rho g H^2 b^2}{\frac{1}{2} \rho g b H^2} = \frac{1}{2} b.$$

Vemos que el centro de presiones se sitúa en mitad de la horizontal pero verticalmente por debajo del punto medio. Esto será algo que ocurrirá repetidamente.

Problema 4.3. En una acequia tenemos la compuerta automática ABC de la figura, que pivota sobre el eje fijo situado en B y tiene ancho $b = 2 \text{ m}$ en la dirección perpendicular a la imagen. La puerta se abrirá por el borde A para dejar salir agua si el nivel del agua h es lo bastante grande. La distancia del tope A hasta el fondo es $h_o = 1 \text{ m}$ y la densidad es la del agua dulce (1000 kg/m^3). Calcula el valor de h para el que la puerta empieza a abrirse.

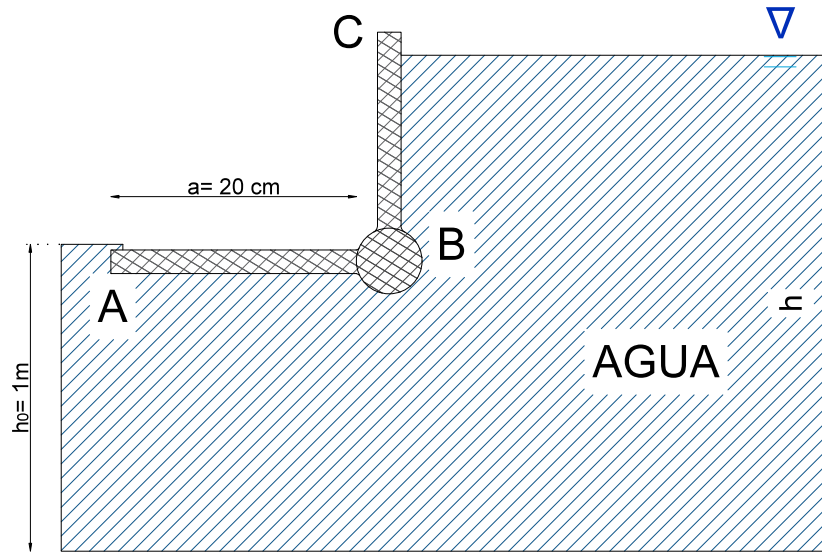


Figura 30: Compuerta.

Analizando las fuerzas que ejerce el agua sobre las puertas de las compuertas, tendremos algo así:

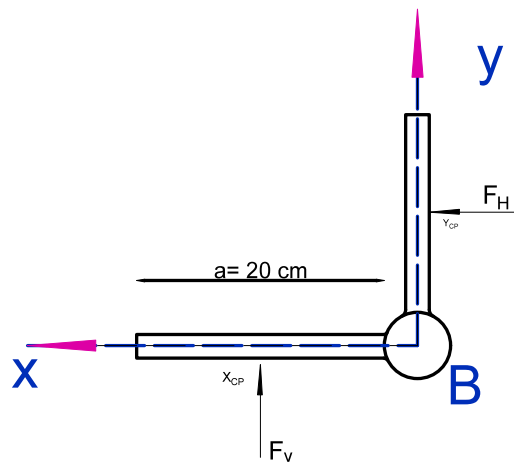


Figura 31: Análisis de las fuerzas sobre la compuerta.

Como observamos en la figura anterior, se ha elegido colocar el sistema de coordenadas con origen en B, donde x será positivo hacia A, y positivo hacia C, y z positivo hacia dentro de la figura. Además, se puede apreciar qué fuerzas actúan en las puertas de la compuerta. Por lo tanto, la situación de estudio será en el instante en que la compuerta estará a punto de abrirse. Y eso ocurrirá cuando la suma de momentos sea cero o, dicho de otra forma, cuando los **momentos** de las fuerzas alrededor de B tengan igual módulo, es decir, cuando se cumple lo siguiente:

$$F_H y_{cp} = F_V x_{cp} .$$

Para resolver esto, resolveremos los productos por separado:

a) **Momento de la fuerza horizontal (sobre la placa vertical):**

$$\begin{aligned} F_H y_{cp} &= \iint y \, df = \int_{z=0}^b \int_{y=0}^{h-h_o} y \rho g (h - h_o - y) \, dy dz = \\ &= \rho g b \left[\frac{1}{2} (h - h_o) y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^{h-h_o} = \frac{1}{6} \rho g b (h - h_o)^3 . \end{aligned}$$

b) **Momento de la fuerza vertical (sobre la placa horizontal):**

$$\begin{aligned} F_V x_{cp} &= \iint x \, df = \int_{z=0}^b \int_{x=0}^a x \rho g (h - h_o) \, dx dz = \\ &= \rho g b (h - h_o) \frac{1}{2} a^2 . \end{aligned}$$

c) **Igualando:**

$$F_H y_{cp} = \frac{1}{6} \rho g b (h - h_o)^3$$

$$F_V x_{cp} = \frac{1}{2} \rho g b (h - h_o) a^2$$

$$\frac{1}{6} \rho g b (h - h_o)^3 = \frac{1}{2} \rho g b (h - h_o) a^2$$

$$\frac{1}{3} (h - h_o)^2 = a^2 \implies h - h_o = \sqrt{3} a \implies h = h_o + \sqrt{3} a = \mathbf{134.64 \text{ cm}} .$$

Problema 4.4. Sea la siguiente superficie rectangular sumergida de largo a y ancho b hacia fuera de la imagen, inclinada un ángulo α con la horizontal. Se desea determinar su Centro de Presiones.

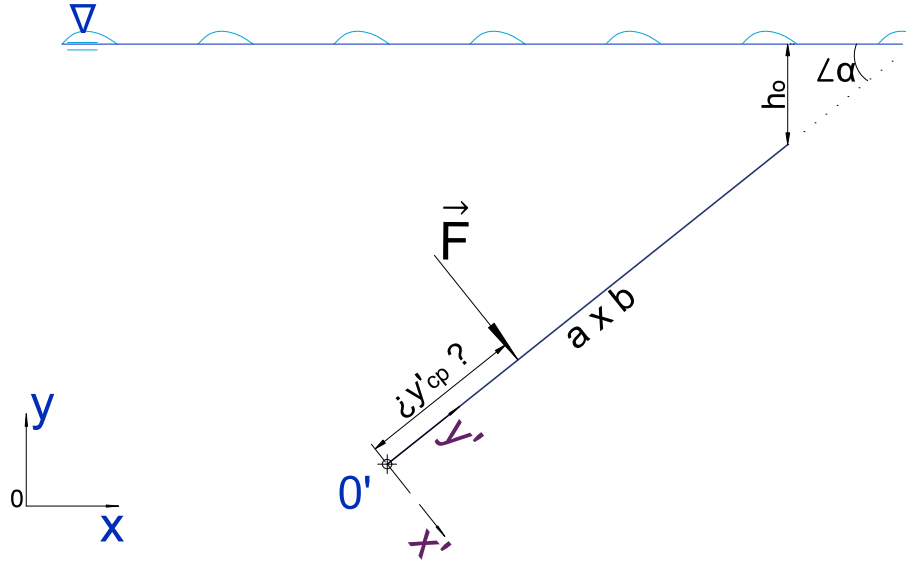


Figura 32: CP Superficie Inclinada

Paso 1: Elegimos el sistema de coordenadas que queramos. Por comodidad empleamos el sistema $x'y'z'$ indicado.

Paso 2: Análisis de la superficie de contacto.

Según nuestro Sistema de Coordenadas: $dA = dy' dz$

Paso 3: Expresión de la presión.

La expresión de la presión es: $p = \rho gh = \rho g(h_o + a \sin \alpha - y' \sin \alpha)$.

Paso 4: Componentes horizontal y vertical de la fuerza hidrostática total.

- a) **Fuerza Horizontal:** es la fuerza sobre la proyección vertical de la superficie. Obtenemos:

$$F_H = \frac{1}{2} \rho g b a \sin \alpha (a \sin \alpha + h_o) .$$

- b) **Fuerza Vertical:** es el peso de la columna de fluido que queda por encima de la superficie.

$$F_V = \rho g \left(\frac{1}{2} a \sin \alpha a \cos \alpha b + a \cos \alpha h_o b \right) .$$

Por lo tanto, la fuerza hidrostática total será:

$$\vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho g b a \sin \alpha (a \sin \alpha + h_o) \hat{i} - \rho g \left(\frac{1}{2} a^2 b \sin \alpha \cos \alpha + a b h_o \cos \alpha \right) \hat{j}$$

Para simplificar, tomemos $h_o = 0$, de manera que la superficie sumergida corta la superficie libre del agua (los cálculos para $h_o \neq 0$ siguen pasos similares pero salen expresiones más engorrosas):

$$|\vec{F}_T| = \frac{1}{2} a^2 b \sin \alpha \rho g .$$

Es decir, la presión en el centro geométrico de la placa multiplicada por el área (como hemos visto antes, esto es un resultado general).

Paso 5: Igualamos el momento total a la suma de momentos infinitesimales:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_T| y'_{cp} &= \iint y' df \\ &= \rho g \int_{z=0}^b \int_{y'=0}^a y' (a \sin \alpha - y' \sin \alpha) dy' dz' = \\ &= \frac{1}{6} \rho g b a^3 \sin \alpha . \end{aligned}$$

Paso 6: Obtención de la coordenada.

- $|\vec{F}_T| = \frac{1}{2} a^2 b \sin \alpha \rho g$
- $|\vec{F}_T| y'_{cp} = \frac{1}{6} \rho g b a^3 \sin \alpha$

Por lo tanto, la posición del centro de presiones es:

$$y'_{CP} = \frac{\frac{1}{6} \rho g b a^3 \sin \alpha}{\frac{1}{2} a^2 b \sin \alpha \rho g} = \frac{1}{3} a .$$

Es decir: $\implies y'_{CP} = \frac{1}{3} a$.

Nota importante: Este resultado se repite con frecuencia. Pero solo es cierto para el caso en el que las superficies sumergidas cortan la superficie libre del fluido estático. Es decir: si $h_o \neq 0$, entonces $y'_{CP} \neq \frac{1}{3} a$. (Comprobar como ejercicio).

Análogamente, podemos obtener la posición del centro de presiones en el eje z .

$$|\vec{F}_T| z'_{CP} = \iint_{placa} z' \rho g (a \sin \alpha - y' \sin \alpha) dy' dz' = \frac{1}{4} \rho g b^2 a^2 \sin \alpha.$$

Y, por tanto,

$$z_{CP} = \frac{\frac{1}{4} \rho g b^2 a^2 \sin \alpha}{\frac{1}{2} a^2 b \sin \alpha \rho g} = \frac{1}{2} b.$$

¡Ojo! Estos valores se han obtenido teniendo la consideración de que $h_o = 0$. Esto no es lo que nos pedía el enunciado inicialmente ya que $h_o \neq 0$. En ese caso no salen expresiones tan sencillas (comprobar).

Solución:

- $x_{cp} = \frac{1}{3} a \cos \alpha$
- $y_{cp} = \frac{1}{3} a \sin \alpha$

Hemos resuelto el problema anterior mediante integración directa. A partir del resultado, démonos cuenta de dos cosas:

- El CP está a la misma altura que el CP de la proyección vertical de la superficie inclinada. Dicho de otra forma: el CP está en la línea de acción de la F_H (LAFH). Esto pasa siempre para superficies planas inclinadas.
- El centro geométrico (y por tanto el centro de masas) de la columna de fluido que queda por encima de la superficie inclinada queda justo en la vertical del CP. En otras palabras: el CP está en la línea de acción de la F_V (LAFV) (que viene determinada por el peso de la columna de fluido). Esto pasa siempre.

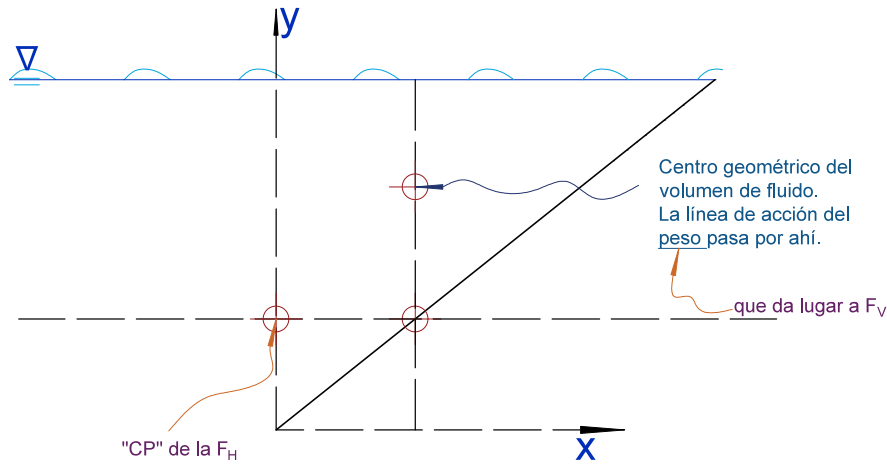


Figura 33: Puntos importantes

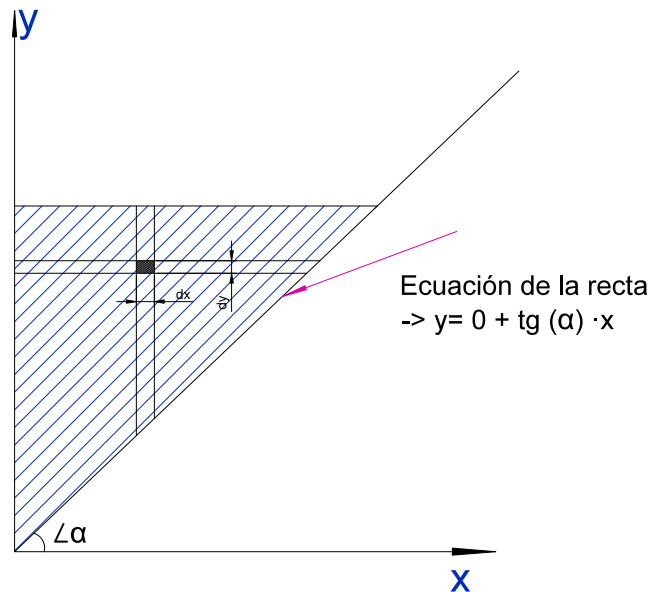
Para poder sacar partido de esta información, introducimos la siguiente subsección.

4.3.1. Cálculo del Centro de Geométrico de una figura

El centro de gravedad de una columna de un fluido uniformemente denso estará en su Centro Geométrico (CG). Si hay simetría suficiente para reducir el problema a un cálculo bidimensional (en caso contrario tendremos que usar integrales de volumen), el CG se puede obtener mediante el balance de momentos geométricos de la siguiente manera:

$$A x_{CG} = \iint_A x dA \Leftarrow \text{Momentos Geométricos.}$$

Pongamos como ejemplo el caso anterior. Necesitamos la ecuación de la recta que representa la superficie sumergida en la figura previa:



El área del triángulo viene dada por $A = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

La coordenada x del centro de geométrico se obtiene enseguida:

$$\begin{aligned}
 A x_{CG} &= \iint_A x \, dA = \int_{x=0}^{a \cos \alpha} \int_{y=x \tan \alpha}^{a \sin \alpha} x \, dy \, dx = \int_{x=0}^{a \cos \alpha} x \left[y \right]_{x \tan \alpha}^{a \sin \alpha} dx = \\
 &= \int_{x=0}^{a \cos \alpha} x(a \sin \alpha - x \tan \alpha) \, dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} a \sin \alpha - \frac{x^3}{3} \tan \alpha \right]_0^{a \cos \alpha} = \\
 &= \frac{1}{2} a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \frac{1}{3} a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{6} a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha
 \end{aligned}$$

Y por tanto:

$$\Rightarrow x_{CG} = \frac{1}{3} a \cos \alpha$$

En efecto: ¡la coordenada x del centro de presiones coincide con la coordenada x

del centro geométrico del volumen de fluido que queda por encima! Y ahí es donde se aplica el peso de esa columna de fluido. Por tanto, la línea de acción de la fuerza vertical (LAFV) tiene la misma coordenada x que el centro de presiones. Resumiendo:

$$x_{LAFV} = x_{CG} = x_{CP}$$

Nota: Equivale al **centro de presiones**.

Por otro lado, la coordenada y del centro de presiones de la proyección vertical de la superficie sumergida se obtiene como ya vimos para superficies verticales:

$$p = \rho gh = \rho g(a \sin \alpha - y) .$$

$$F_H = \frac{1}{2} \rho g b a^2 \sin^2 \alpha .$$

$$F_H y_{LAFH} = \iint_A y df = \int_{z=0}^b \int_{y=0}^{a \sin \alpha} y \rho g (a \sin \alpha - y) dy dz = \rho g b \int_{y=0}^{a \sin \alpha} a \sin \alpha y - y^2 dy$$

$$= \rho g b \left[a \sin \alpha \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{a \sin \alpha} = \rho g b \left[\frac{1}{2} a^3 \sin^3 \alpha - \frac{1}{3} a^3 \sin^3 \alpha \right] = \frac{1}{6} a^3 b \rho g \sin^3 \alpha$$

Y por tanto:

$$\Rightarrow y_{LAFH} = \frac{1}{3} a \sin \alpha$$

$$y_{LAFH} = y_{CG} = y_{CP}$$

De esta manera vemos que se confirma lo que ya habíamos anunciado. Hacemos un **resumen** de la situación para **superficies planas sumergidas**:

- El centro de presiones se encuentra donde se cruzan las líneas de acción de las fuerzas horizontal y vertical.
- La línea de acción de F_H es horizontal y pasa por el CP de la superficie vertical proyectada.
- La línea de acción de F_V es vertical y pasa por el centro de masas (es decir, el centro geométrico) del volumen cuyo peso coincide con F_V .

$\Rightarrow$ **Con eso podemos calcular el Centro de Presiones (CP).**

4.4. Centro de Presiones en Superficies Curvas

Visto lo que ocurre para superficies planas, pasamos ahora a dar directamente cómo obtener el CP para superficies curvas.

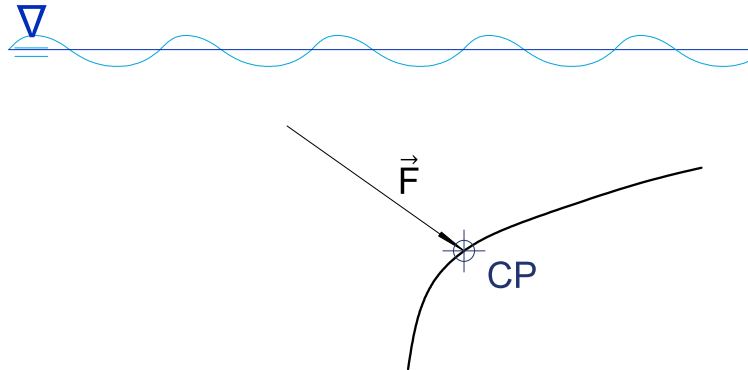


Figura 34: Superficie curva

Para poder obtener el Centro de Presiones de una superficie curva seguiremos los siguientes pasos:

1. Calcular el CP correspondiente a la proyección vertical de la superficie.

Realizar este cálculo nos permitirá obtener la coordenada y_{LAFH} de la línea de acción de la Fuerza Horizontal.

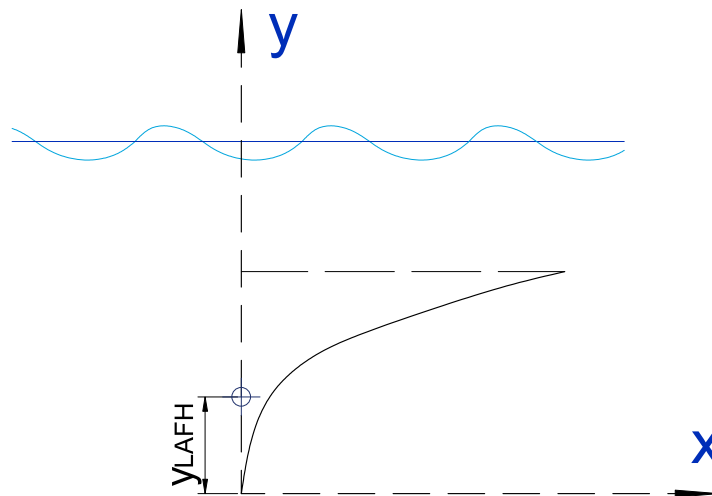


Figura 35: Paso 1.

2. Calcular el Centro Geométrico (CG) del volumen que produce la F_V , o sea x_{CG} . Eso nos permitirá obtener la coordenada $x_{LAFV} = x_{CG}$ de la línea de acción de la Fuerza Vertical .

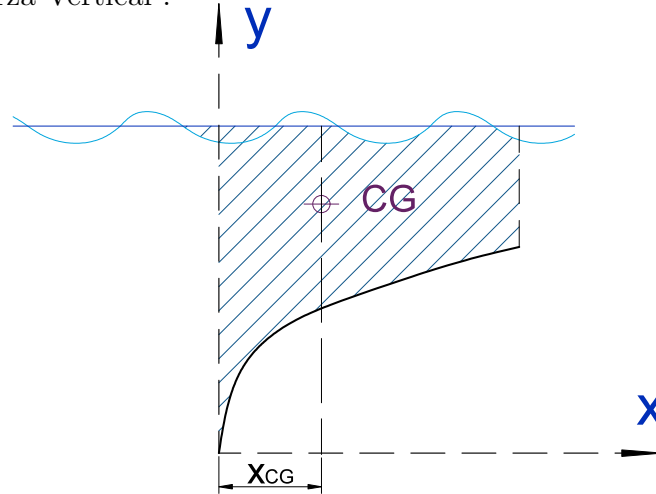


Figura 36: Paso 2

3. Con los dos pasos anteriores, tenemos las coordenadas x e y de un punto que **NO** tiene por qué estar en la superficie sumergida. Por tanto, **NO** es el CP. En este paso se comprobará si pertenece o no a la superficie.

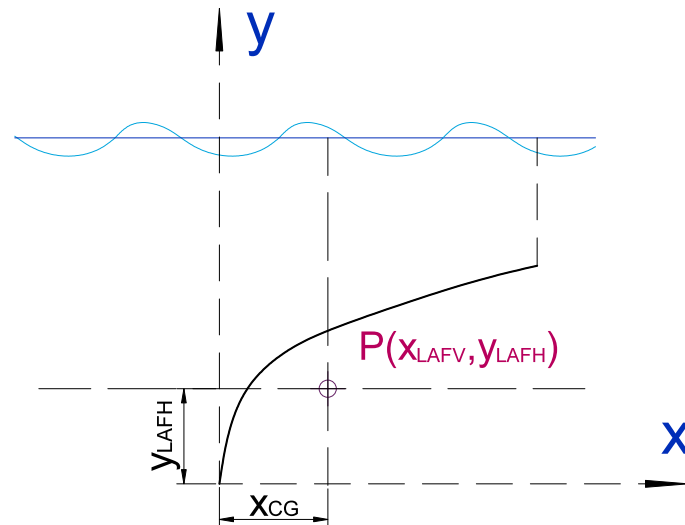


Figura 37: Paso 3

4. Para calcular el centro de presiones, vamos desde el cruce de las líneas de acción hacia la superficie sumergida siguiendo una recta con la dirección (es decir, con la pendiente) de la fuerza hidrostática total $\vec{F}_T = F_H \hat{i} - F_V \hat{j}$.

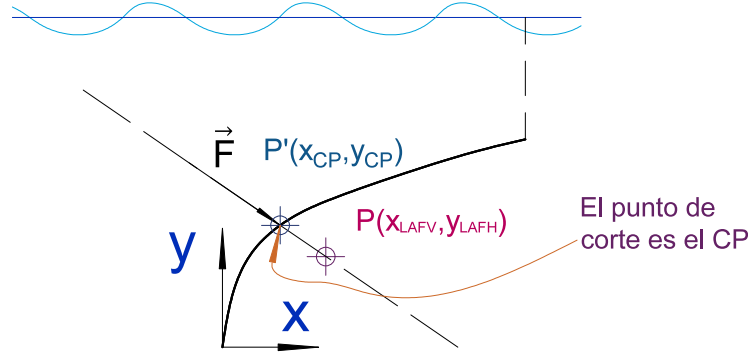


Figura 38: Pasos 4 y 5

Para eso, hace falta calcular la ecuación de una recta que pasa por las coordenadas obtenidas en los pasos 1 y 2 (x_{LAFV}, y_{LAFH}), y que tenga una pendiente:

$$m = \pm \frac{F_V}{F_H} \text{ (Componentes de } \vec{F}_T \text{)} \quad (23)$$

El signo dependerá de cómo esté situada la recta con respecto al sistema de coordenadas elegido. Conocidos estos datos, la ecuación de la recta (de tipo punto-pendiente) que pasa por el centro de presiones será:

$$y = y_{LAFH} + m(x - x_{LAFV}) \quad (24)$$

5. Obtención de las coordenadas del C.P.

Esta ecuación (24), junto **con la ecuación que especifica la superficie curva sumergida**, es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolviéndolo obtenemos las dos coordenadas del centro de presiones (x_{CP}, y_{CP}).

¡Veámoslo con el siguiente ejemplo!

Problema 4.5. En la siguiente figura se ilustra una superficie curva expuesta a fuerzas hidrostáticas. Se trata de una superficie de sección circular con una profundidad igual al radio R (el agua llega al borde), y ancho b .

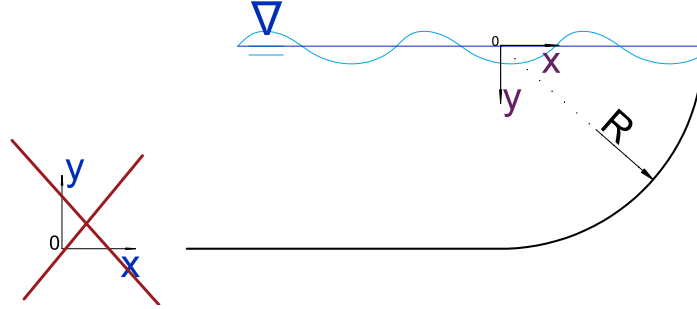


Figura 39: Ejemplo CP superficie Curva

Para calcular el centro de presiones de la superficie nos conviene cambiar el sistema de coordenadas. En la mayoría de los ejercicios que se han ido resolviendo a lo largo del tema, el Sistema de Coordenadas estaba colocado en el fondo del fluido, de manera que la coordenada y era positiva a medida que se acercaba más a la superficie libre. En este caso, por comodidad, colocaremos el origen del nuevo sistema de coordenadas en el centro de curvatura.

$$\vec{F}_T = F_H \hat{i} + F_V \hat{j}$$

Nota: El signo es + ya que según nuestro sistema de coordenadas, y es positivo hacia el fondo y x es positivo hacia la derecha.

Teniendo en cuenta lo explicado en las primeras secciones de este tema, la fuerza horizontal y la fuerza vertical que actúa sobre esta superficie es:

$$F_H = \frac{1}{2} \rho g b R^2$$

$$F_V = \frac{1}{4} \pi \rho g b R^2$$

Paso 1: Cálculo de y_{LAFH} .

Nos fijamos en la proyección vertical (P_{ver}). Según el sistema de coordenadas elegido la presión es $p = \rho g y$, por lo tanto,

$$F_H y_{LAFH} = \iint_{P_{ver}} y df = \int_{z=0}^b \int_{y=0}^R \rho g y^2 dy dz = \frac{1}{3} \rho g b R^3$$

- $F_H = \frac{1}{2} \rho g b R^2$
- $F_H y_{LAFH} = \frac{1}{3} \rho g b R^3$

$$y_{LAFH} = \frac{2}{3} R$$

Es decir a $\frac{2}{3}R$ de la superficie libre o a $\frac{1}{3}R$ del fondo.

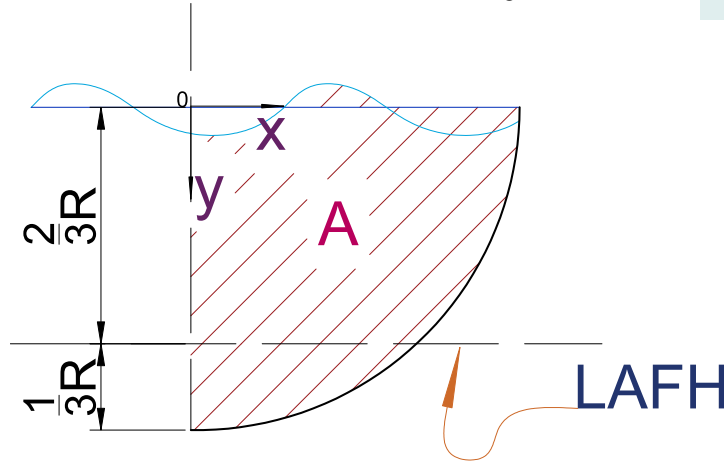


Figura 40: Paso 1: Determinación de y_{LAFH}

Paso 2: Cálculo del CG del Área A, que se corresponde con el volumen de la columna de fluido que queda por encima de la superficie ($x_{LAFV} = x_{CG}$).

$$x_{CG} A = \iint_A x dA,$$

donde A es el área de cuarto de circunferencia, es decir:

$$A = \frac{\pi}{4} R^2$$

Para saber entre qué intervalos hay que integrar, recordemos la **Ecuación de una circunferencia**:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\text{Donde si despejamos } y \Rightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Donde si despejamos } x \Rightarrow x = \pm \sqrt{R^2 - y^2}$$

Entonces,

$$x_{CG} A = \int_{y=0}^R \int_{x=0}^{\sqrt{R^2-y^2}} x \, dx dy = \int_{y=0}^R \frac{1}{2} (R^2 - y^2) \, dy = \frac{1}{2} (R^3 - \frac{1}{3} R^3) = \frac{R^3}{3}$$

$$\Rightarrow x_{CG} = \frac{4}{3\pi} R \Rightarrow x_{LAFV} = \frac{4}{3\pi} R$$

Paso 3: Comprobación de la localización del punto P donde se cruzan las líneas de acción.

Dibujándolo:

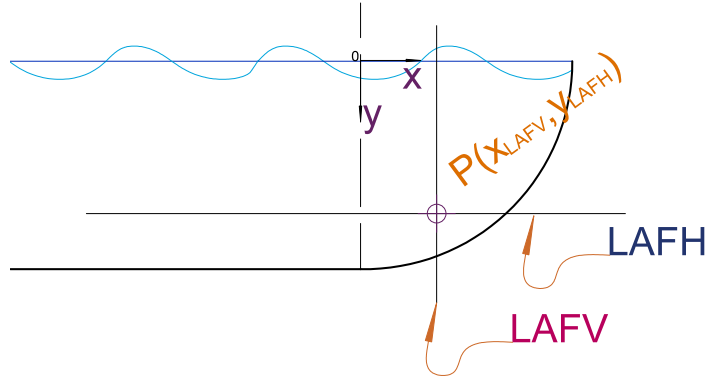


Figura 41: Paso 2 y 3. El punto $P=(x_{LAFV}, y_{LAFH})$

Vemos que el punto P tiene las siguientes coordenadas $P = (\frac{4}{3\pi}R, \frac{2}{3}R)$ y NO está en la presa. Verifiquémoslo numéricamente:

$$x_{LAFV}^2 + y_{LAFH}^2 = \left(\frac{16}{9\pi^2}R^2\right) + \left(\frac{4}{9}R^2\right) \approx 0,62...R^2 \neq R^2 \Rightarrow \notin presa$$

Paso 4: Ecuación de la recta que pasa por P.

La pendiente será (¡el signo es positivo por el sistema de coordenadas!):

$$m = \frac{F_V}{F_H} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho g b R^2}{\frac{1}{2}\rho g b R^2} = \frac{\pi}{2}$$

Con esto la ecuación de la recta será:

$$y = \frac{2}{3}R + \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{4}{3\pi}R\right) = \frac{\pi}{2}x$$

$$y = \frac{\pi}{2}x$$

Paso 5: Resolución del Sistema de ecuaciones.

Las dos ecuaciones que tenemos son los siguientes:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2}x \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

Sustituyendo,

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 + \left(\frac{\pi^2}{4}x^2\right) = R^2$$

$$\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)x^2 = R^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4R^2}{4 + \pi}} = \pm \frac{2R}{\sqrt{4 + \pi}}$$

Nota: La intersección de una circunferencia y una recta son dos puntos, de manera que para cada valor de x_{CP} tendremos su correspondiente y_{CP} , obtenida de sustituir en la ecuación de la recta o de la ecuación de la circunferencia.

$$\blacksquare \text{ Para } x_{CP} = +\frac{2R}{\sqrt{4+\pi}} \implies y_{CP} = +\frac{R\pi}{\sqrt{4+\pi}}$$

$$\blacksquare \text{ Para } x_{CP} = -\frac{2R}{\sqrt{4+\pi}} \implies y_{CP} = -\frac{R\pi}{\sqrt{4+\pi}}$$

Según nuestro Sistema de Coordenadas nos interesa el Positivo.

$$\text{Sol: } \implies \left[x_{CP} \approx 0,53R; \quad y_{CP} \approx 0,84R \right]$$

Nota Importante: Siempre ocurre que la fuerza hidrostática sobre una superficie de sección circular pasa por el centro de la circunferencia, es decir, la línea de acción de la fuerza total pasa por el centro de la circunferencia.

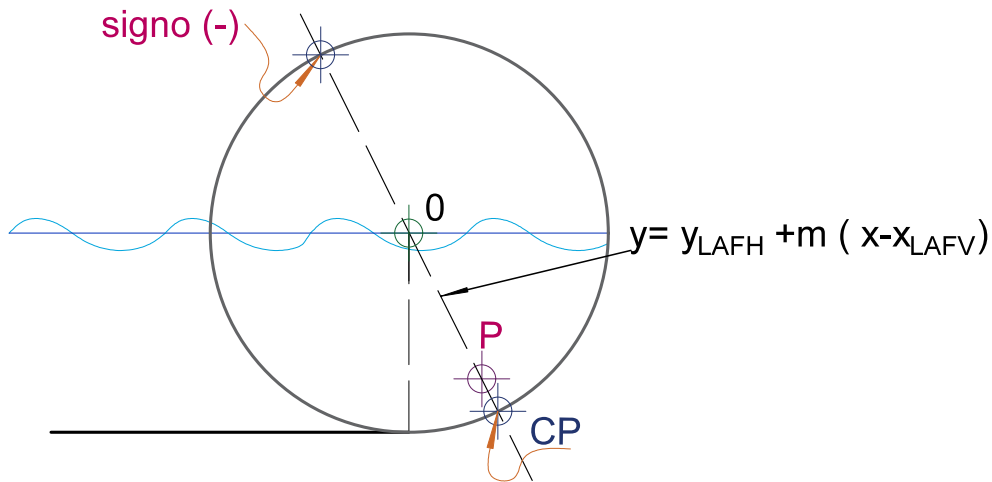
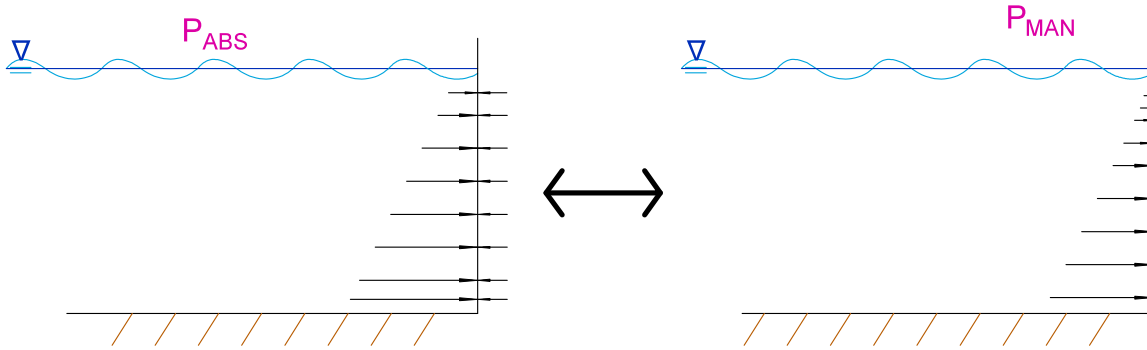


Figura 42: Paso 4 y 5. Resultados ejemplo.

5. Instrumentos de Medida de la Presión

5.1. Presión Absoluta y Presión Relativa (Manométrica)

Todo lo visto anteriormente se puede resolver también haciendo uso de la **presión absoluta**. La equivalencia se debe a que al usar presiones absolutas (P_{abs}), la presión atmosférica (P_{atm}) es una constante que se añade a todas las presiones manométricas (P_{man}) usadas. Esto se puede observar en la siguiente ilustración:



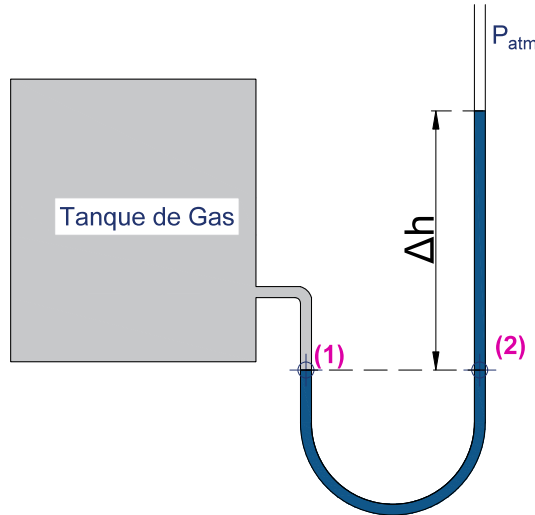
5.2. El Manómetro

Un manómetro es un instrumento de medida que permite medir la presión de un fluido en un recinto cerrado. El mecanismo está basado en que una columna de líquido puede usarse para medir diferencias de presión.

$$\Delta p = -\rho g \Delta z \quad \uparrow z \quad (25)$$

$$\Rightarrow \Delta z = -\frac{\Delta p}{\rho g} \quad (\text{O bien } \Delta p = \rho g \Delta h) \quad \downarrow h \quad (26)$$

Como se aprecia en la siguiente ilustración, el manómetro consta principalmente de un tubo en forma de U de vidrio o plástico que contiene uno o más fluidos. Normalmente suele usar mercurio, agua, alcohol o aceite. A continuación, observamos que se desea medir la presión en un tanque de gas, por lo que una parte del manómetro se colocará en el tanque (1) y, por otro lado, se dejará el segundo orificio abierto a la atmósfera.



Debido a que la presión es la misma en planos horizontales, en los puntos (1) y (2) tenemos igualdad de presión, es decir $p_1 = p_2 \iff h_1 = h_2 = h$

$$p_{man} = \rho g \Delta h \implies p_{abs} - p_{atm} = \rho g \Delta h \quad (27)$$

Y, por ende la presión absoluta en 2 será: $P_2 = P_{atm} + \rho g h$

Consideraciones a tener en cuenta:

- La forma del manómetro no es relevante mientras sea lo bastante grueso.
- Si hay varios fluidos, hay que tenerlos en cuenta por separado, atendiendo a su densidad.

¡Veámoslo con el siguiente ejemplo!

Problema 5.1. Medición de la presión con un manómetro de fluidos múltiples.

(Çengel, pg.73, Ejer-3.3)

El agua en un tanque se presuriza con aire y se mide la presión con un manómetro de fluidos múltiples, como se muestra en la figura (43). El tanque está en una montaña a una altitud de 1.400 m, donde la presión atmosférica es de 85,6 kPa. Determinar la presión del aire en el tanque si $h_1 = 0,1$ m, $h_2 = 0,2$ m, y $h_3 = 0,35$ m. Tome las densidades del agua, el aceite y el mercurio como 1.000 kg/m^3 , 850 kg/m^3 , y 13.600 kg/m^3 , respectivamente.

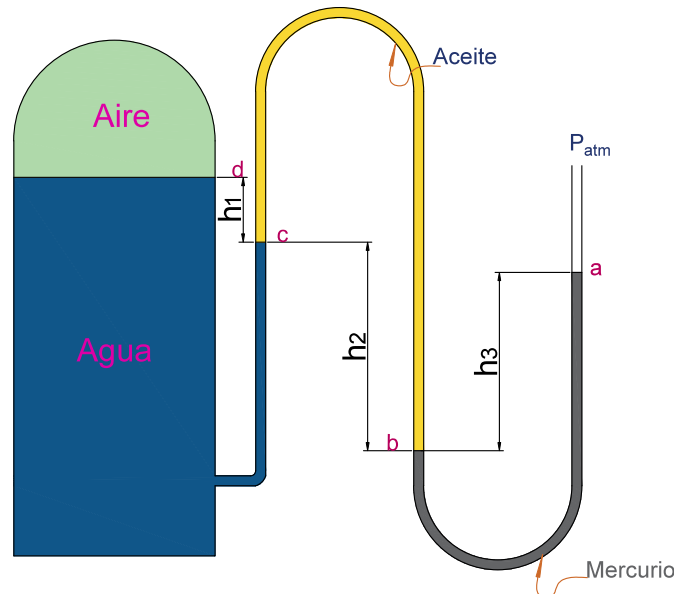


Figura 43: Ejercicio Manómetro con fluidos múltiples

Paso 1: Datos.

- $P_{atm} = 85,6 \text{ kPa} = 85.600 \text{ N/m}^2$
- $h_1 = 0,1 \text{ m}$
- $h_2 = 0,2 \text{ m}$
- $h_3 = 0,35 \text{ m}$
- Aceite: $\rho_{ac} = 850 \text{ kg/m}^3$
- Mercurio: $\rho_{Hg} = 13.600 \text{ kg/m}^3$
- Agua: $\rho_{agua} = 1000 \text{ kg/m}^3$

Paso 2: Resolución.

Recorremos el manómetro desde la presión conocida:

$$p_a = p_{atm}$$

$$p_b = p_a + \rho_{Hg} g h_3 = p_{atm} + \rho_{Hg} g h_3$$

$$p_c = p_b - \rho_{ac} g h_2$$

$$p_d = p_c - \rho_{agua} g h_1$$

Por lo tanto, la presión del aire será:

$$\begin{aligned} p_{aire} &= p_d = p_{atm} + \rho_{Hg} g h_3 - \rho_{ac} g h_2 - \rho_{agua} g h_1 = \\ &= p_{atm} + g (h_3 \rho_{Hg} - h_2 \rho_{ac} - h_1 \rho_{agua}) = \\ &= 85.600 \frac{N}{m^2} + 9,81 \frac{m}{s^2} (13.600 \cdot 0.35 - 850 \cdot 0.2 - 1000 \cdot 0.1) \frac{kg}{m^3} = \\ &= 129,6 \text{ kPa} \end{aligned}$$

5.3. El Barómetro

Al igual que el manómetro, el barómetro es un instrumento de medición de la presión, aunque, a diferencia del anterior, un barómetro permite obtener el valor de la presión **absoluta** del medio; por ejemplo, la presión atmosférica absoluta. Esta es la razón por la que se suele hacer referencia a la presión atmosférica como presión barométrica.

El primer físico en probar de manera concluyente la medición de la presión atmosférica fue Evangelista Torricelli, por lo que la forma de realizar esta medida se conoce como la Experiencia de Torricelli. Esta experiencia consistió en invertir un tubo lleno de mercurio en un recipiente lleno de este mismo fluido, con la particularidad de que éste se encontraba abierto a la atmósfera. Podemos ver un barómetro básico en la siguiente figura (Fig. 44).

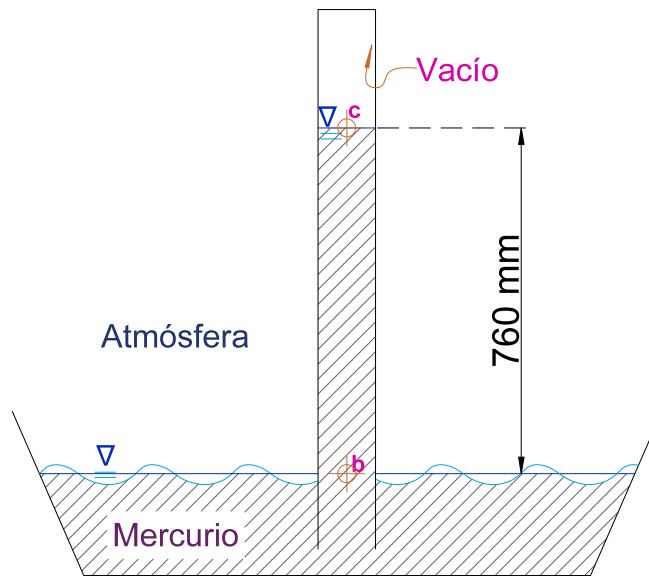


Figura 44: Barómetro Básico

En la ilustración podemos definir dos puntos claramente diferentes, un punto b a la altura de la flotación del recipiente, donde la presión es igual a la presión atmosférica y otro punto c, situado en la superficie libre del tubo, donde la presión es prácticamente nula debido a que sólo existen gases de mercurio. Con estas dos consideraciones, la presión atmosférica se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_{atm} = \rho gh$$

Siendo en este caso ρ la densidad del mercurio, y h la altura de la columna de mercurio por encima de la superficie libre. Con el experimento de Torricelli se demostró que a nivel del mar la altura de la columna de **mercurio** ascendía a **760 mm**. Si

en vez de mercurio usáramos **agua** para medir la presión atmosférica, se necesitaría una columna de agua de alrededor de **10,3 m**.

6. Aplicación de la Estática de fluidos

Para un ingeniero naval, la estática de fluidos tiene aplicaciones para el cálculo de estructuras que estén expuestas al mar o deban contener líquidos. Pero quizás la aplicación más importante sea el estudio de la estabilidad en buques.

El objetivo en esta última sección será introducir algunos conceptos de Teoría del Buque y dar las bases del estudio de la estabilidad de cuerpos flotantes.

6.1. Vocabulario

6.1.1. Dimensiones Principales

Eslora [L = Length o E]

Es la dimensión del barco en sentido longitudinal, es decir, de proa a popa. Aunque hay distintos tipos de esloras, nos centraremos en la eslora entre perpendiculares. Se define la eslora entre perpendiculares (Lpp) a la dimensión longitudinal de trazado del casco del buque, medida horizontalmente entre las perpendiculares de proa y popa.

Manga [B= Beam o M]

Es la dimensión del barco en sentido transversal, de estribor a babor.

Puntal [D = Depth o P]

Dimensión en sentido vertical, definido desde el fondo hasta cubierta principal.

Calado [T= Draft o C]

El calado es la distancia vertical correspondiente a la parte sumergida del buque.

6.1.2. Puntos Notables

Antes de comenzar con el análisis de la estabilidad de un buque, debemos de identificar cuatro puntos significativos que tiene un buque y algunos otros conceptos básicos. Nos centraremos principalmente en la vista transversal del buque. Estos son:

- **Centro Metacéntrico / Metacentro (M):** intersección de la vertical a través de los centros de empuje con el plano de crujía para dos ángulos de escora consecutivos. El metacentro es el punto alrededor del cual gira la línea de acción del empuje. Para ángulos pequeños, éste se mantiene fijo.
- **Centro de Gravedad (G):** El centro de gravedad es un punto imaginario donde actúa la resultante de la fuerza gravitatoria.
- **Centro de Carena o de Empuje (C o B):** es el centro de gravedad o centro geométrico del volumen de carena para la flotación considerada. Es el punto de aplicación de la fuerza empuje.
- **Fondo del buque o centro de quilla (K).**
- **Radio Metacéntrico (CM):** Es el segmento de recta que une cada centro de carena con su metacentro. Corresponde al momento de inercia de la superficie de flotación entre el volumen de carena.
- **Volumen de carena (∇):** Volumen de la parte sumergida del buque a una flotación considerada.
- **Altura Metacéntrica (GM):** Es la distancia entre el metacentro (M) y el centro de gravedad (G). Veremos que la estabilidad depende de este parámetro.
- **Brazo de estabilidad transversal (GZ):** Equivale a $GZ = GM_t \sin \theta$.
- **Brazo de estabilidad longitudinal (GS):** Equivale a $GS = GM_l \sin \theta$.

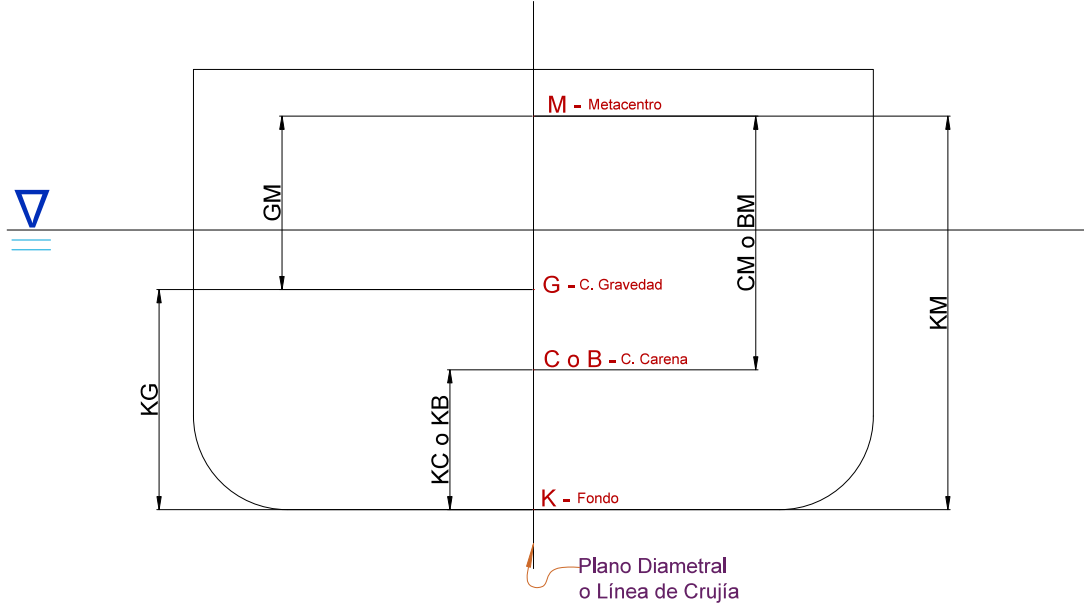


Figura 45: Puntos Notables

6.2. Principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes afirma que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje igual al peso del fluido desalojado.

Pensemos ahora en un cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido en reposo. Este fluido ejercerá presiones sobre las distintas partes de la superficie del cuerpo, siendo mayor a mayor profundidad. La fuerza total que ejerce el fluido sobre el cuerpo sumergido se denomina **empuje (T)**.

Para demostrar el Principio de Arquímedes, veamos la siguiente figura (Fig. 46), en la que se aprecia un objeto que ocupa un volumen V y se encuentra sumergido en un fluido en estado líquido y en reposo. Al volumen de la columna de fluido que se encuentra encima del objeto se le denominará V_C . Para poder obtener el empuje, partimos la superficie del objeto en dos trozos, un tramo superior (a) y un tramo inferior (b), y calculamos la magnitud de las fuerzas que se ejercen en cada trozo, F_{V_a} (peso de la columna de fluido que queda encima) y F_{V_b} (peso de la columna de fluido que *quedaría* encima):

$$\begin{aligned}\text{Peso de } V_C &\implies F_{V_a} = -\rho g V_C \\ \text{Peso de } V_C + V &\implies F_{V_b} = \rho g (V_C + V)\end{aligned}$$

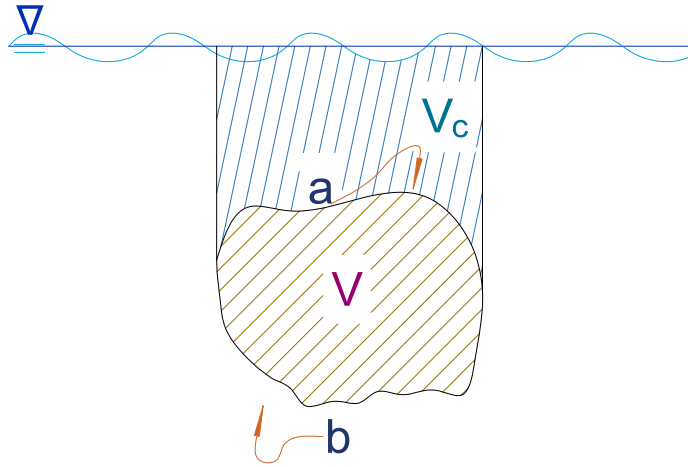


Figura 46: Principio de Arquímedes

La suma de ambas fuerzas proporciona el empuje:

$$T = F_{V_a} + F_{V_b} = \rho g V \quad \text{hacia arriba}$$

Por supuesto, para que flote el objeto, el empuje deberá ser igual al peso.

6.3. Flotación y Estabilidad

A partir de aquí seguimos parcialmente el libro de White [1], aunque también hay otros criterios [2, 3].

Cuando estudiamos cuerpos sumergidos, no solamente es importante conocer el valor del empuje, sino cómo actúa el empuje sobre los cuerpos. Esto resulta ser crucial para poder conocer la capacidad del cuerpo de recuperar su estado de equilibrio.

La estabilidad longitudinal en buques (es decir, con respecto a lo largo de la eslora) es muy considerable, por lo que es más importante ver qué le ocurre al buque en sentido transversal, o sea, cuando se inclina o escora a babor o estribor.

¿Qué quiere decir que un cuerpo flotante es estable? Un objeto semi-sumergible se dice que es estable si al escorarlo un poco (inclinación en sentido transversal) es capaz de volver a su posición de equilibrio (adrizado). Esto solo ocurrirá si aparece un **momento restaurador**.

6.3.1. Análisis de Estabilidad

Sea una superficie semisumergible que se encuentra flotando entre dos fluidos con distintas densidades, como es el ejemplo de un buque. Cuando se encuentra sobre un fluido en reposo aparecen dos fuerzas, el peso y el empuje, que son iguales en módulo y opuestas. Los puntos de aplicación de estas fuerzas son el centro de masas o de gravedad (G) y el centroide del volumen sumergido, es decir, el centro de carena (C o B). Analicemos los dos casos siguientes:

- Si el buque está en equilibrio (adrizado), el centro de carena y el centro de gravedad estarán alineados y se encontrarán en el plano diametral o plano de crujía (Fig 47). Peso y empuje son fuerzas iguales en la dirección vertical y de sentido opuesto, de forma que el buque está en equilibrio.

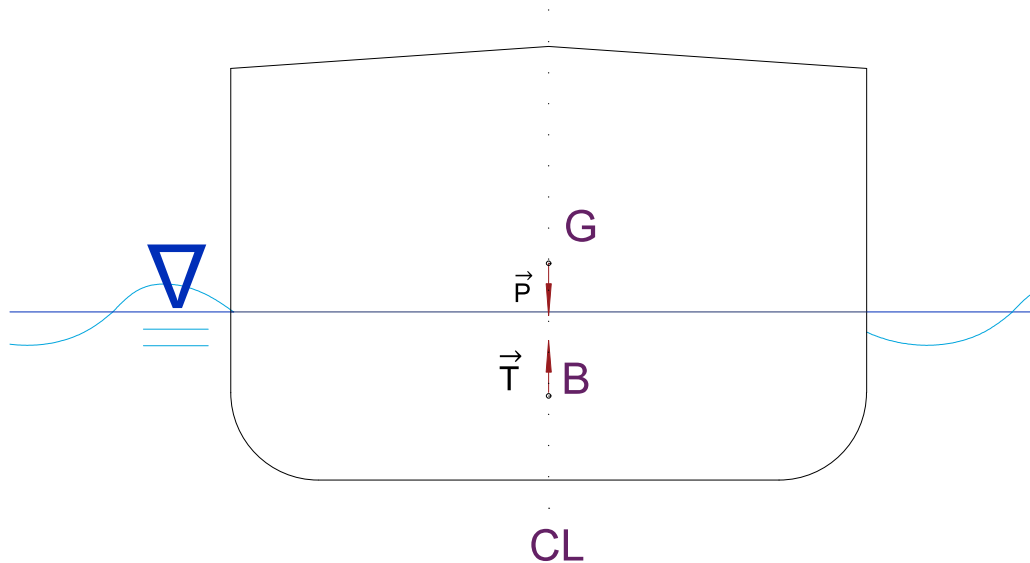


Figura 47: Situación de adrizamiento. Buque en equilibrio.

- Como consecuencia de fuerzas externas como el viento, carga interna u oleaje, el buque puede verse escorado un cierto ángulo, provocando una inclinación respecto a la crujía. Una variación del ángulo implica una nueva posición del centro de empuje ($B \rightsquigarrow B'$), determinando el Metacentro (M), que se corresponde con el cruce de la vertical desde B' con el plano de crujía. Como veremos en el ejemplo más adelante, la estabilidad estática nos dice que para pequeños ángulos de escora el metacentro no varía su posición. Esta es la razón por la que se suele denominar metacentro inicial.

Según la posición relativa de G con respecto al metacentro M podremos deter-

minar si el buque volverá a su posición de equilibrio, ya que, para un pequeño ángulo θ de escora, pueden darse tres situaciones:

- Que el Metacentro se encuentre por encima de G ($KM > KG$), lo que significa que el par generado por la escora es adrizante. En este caso, se dice que el buque es **Estable** o posee **Equilibrio estable** (altura metacéntrica positiva $GM > 0$).
- Que el Metacentro se encuentre por debajo de G ($KM < KG$), por lo que el par generado es escorante, es decir, el buque tiende a escorarse apartándose cada vez más de su punto de equilibrio. En este caso, se dice que el buque es **Inestable** o posee **Equilibrio Inestable** (altura metacéntrica negativa $GM < 0$).
- **KM= KG:** En este caso el Metacentro coincide con G, por lo que no se genera par de fuerza. Esto quiere decir que el buque navega con la escora que tiene y se dice que el buque tiene **Estabilidad Indiferente** o **Equilibrio indiferente**.

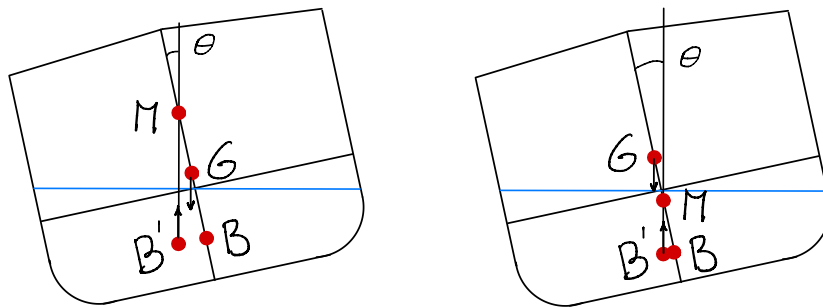


Figura 48: Estabilidad de buque escorado. Izquierda buque estable. Derecha buque inestable.

Consideración Importante: Para un objeto de sección transversal constante (Pontona), los cálculos de estabilidad son más sencillos. En el caso de un buque esto no es así. Debido a las características del proyecto, la carena del buque (casco) no se suele diseñar de manera que tenga una sección transversal constante, implicando que los cálculos sean más complicados. Además, es importante resaltar que un buen cálculo de estabilidad garantiza entre otros muchos aspectos la navegabilidad del buque.

Problema 6.1. La gabarra de la figura posee sección transversal rectangular constante, semimanga b , calado T . Se inclina un ángulo θ .

a) Determinar la altura metacéntrica GM para inclinaciones pequeñas.

b) ¿Para qué rango de $\frac{b}{T}$ la gabarra es estáticamente estable?

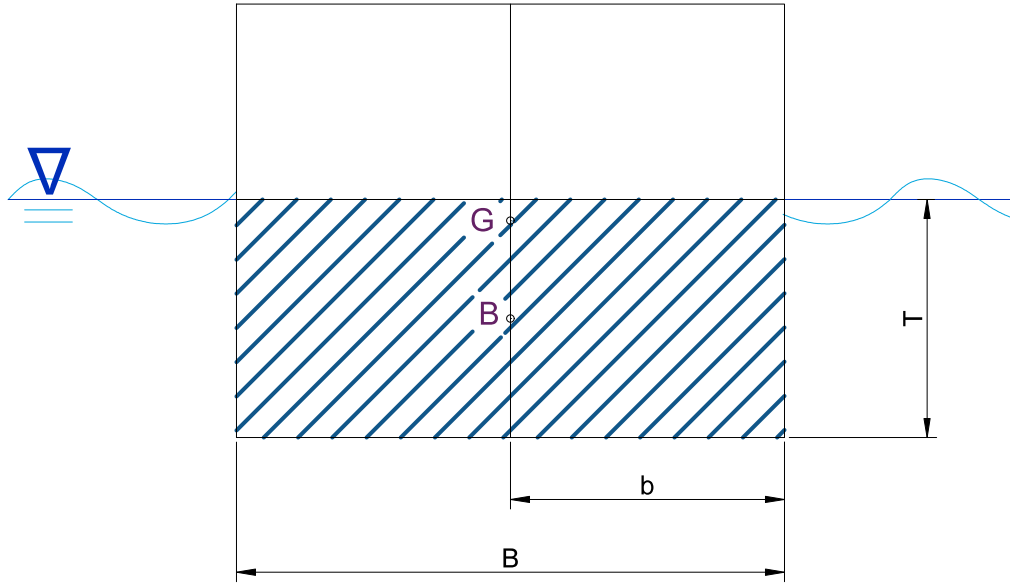


Figura 49: Gabarra sección transversal constante

Sea la manga de la gabarra $B = 2b$. El volumen sumergido (volumen de carena) se puede obtener como el producto del área transversal sumergida por la eslora.

$$\nabla = A_{T_{sumergida}} L$$

$$A_{T_{sumergida}} = A_{rectang} = B \cdot T = 2bT$$

Cuando la gabarra se escora un ángulo θ , el volumen sumergido se mantiene constante, ya que el empuje debe seguir compensando el mismo peso.

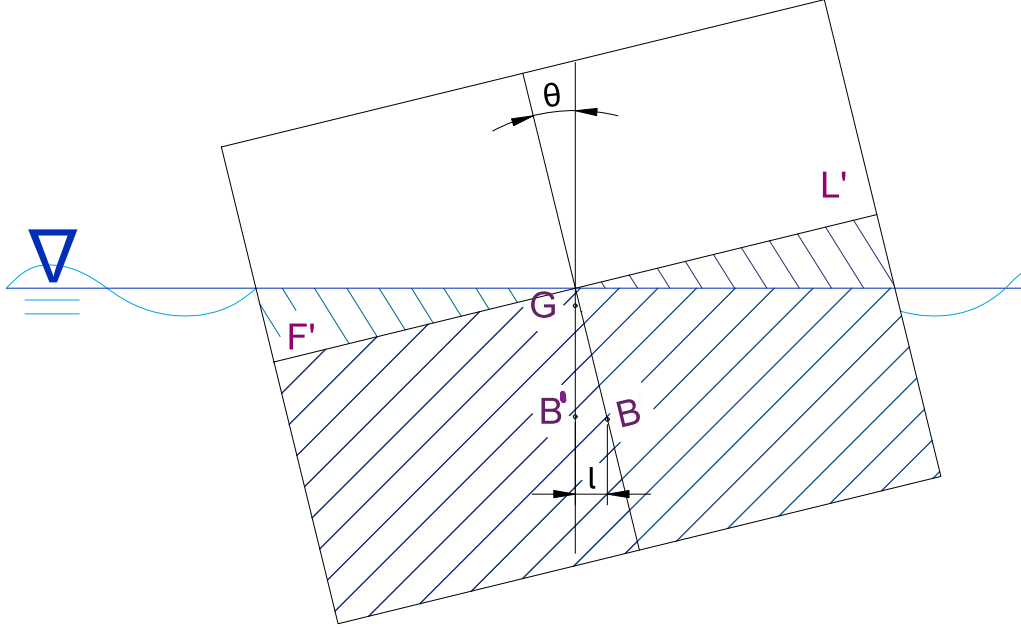


Figura 50: Gabarra escorada

- a) Para obtener la altura metacéntrica un primer paso será determinar el centro de carena de la parte sumergida de la gabarra tras la inclinación (B'). Esto se consigue calculando l , que es la separación horizontal desde el nuevo centro de carena hasta el plano de crujía (diametral).

La coordenada horizontal l del centro de carena tras la escora, B' , se obtiene a su vez haciendo el cálculo del centro geométrico del área sumergida A :

$$A l = \iint_A x dA, \quad (28)$$

donde x es la distancia de cada punto del área A a la vertical.

Para facilitar los cálculos partimos la integral en dos trozos, un tramo trapezoidal y otro trozo triangular.

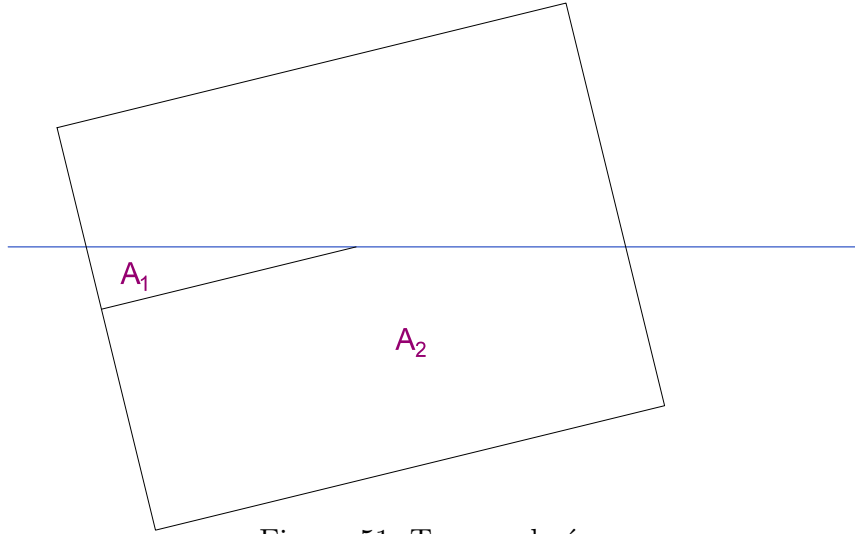


Figura 51: Tramos de área

$$\iint_A x \, dA = \iint_{A_1} x \, dA + \iint_{A_2} x \, dA \quad (29)$$

Analizando bien la figura anterior, observamos que el trozo triangular de la izquierda (Babor) posee igual área que el triángulo que se incrementa al nuevo volumen sumergido.

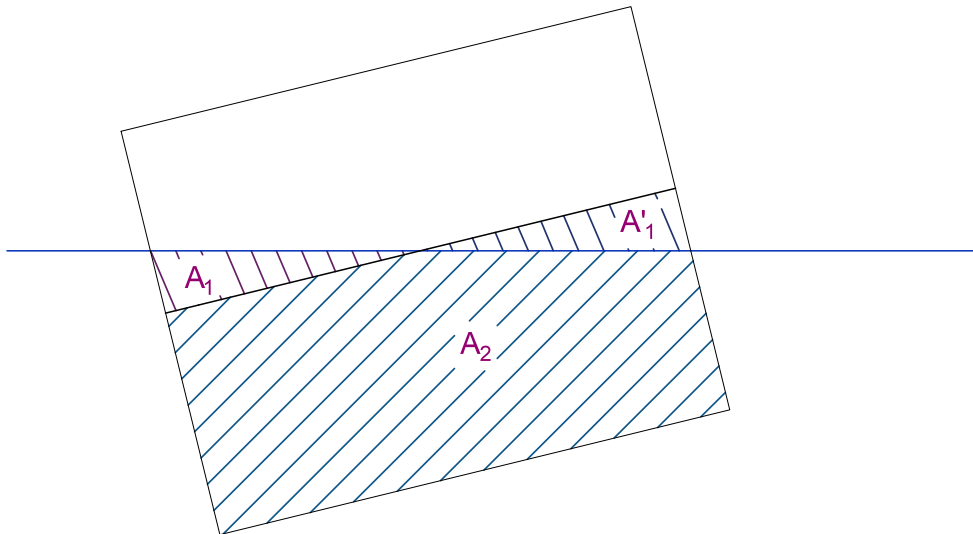


Figura 52: Zonas sumergidas

$$\begin{aligned} A'_{T_{sumergida}} &= A_2 + A'_1, & A_1 &= A'_1 \\ A_2 &= A_{rec} - A'_1 \end{aligned}$$

$$\nabla' = LA'_{T_{sumergida}} = L(A_2 + A'_1) = L(A_{rec} - A_1 + A_1) = LA_{rec}$$

$\Rightarrow \nabla' = \nabla \Rightarrow$ el volumen sumergido se mantiene constante

Esta fragmentación en áreas con geometría conocidas nos permite separar la integral (29) y sustituir cada una de las integrales que se obtienen para cada pieza por el producto del área por la coordenada de su centroide:

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} x dA + \iint_{A_2} x dA &= \iint_{A_1} x dA + \iint_{A_{rec}} x dA - \iint_{A'_1} x dA = \\ &= A_1 d_1 + A_{rec} d_{rec} - A'_1 d'_1 \end{aligned}$$

Siendo:

- $d_1 \equiv$ la distancia del centroide del triángulo de área A_1 a la vertical.
- $d'_1 \equiv$ la distancia del centroide del triángulo de área A'_1 a la vertical.
- $d_{rec} \equiv$ la distancia del centroide del rectángulo de área A_{rec} a la vertical.

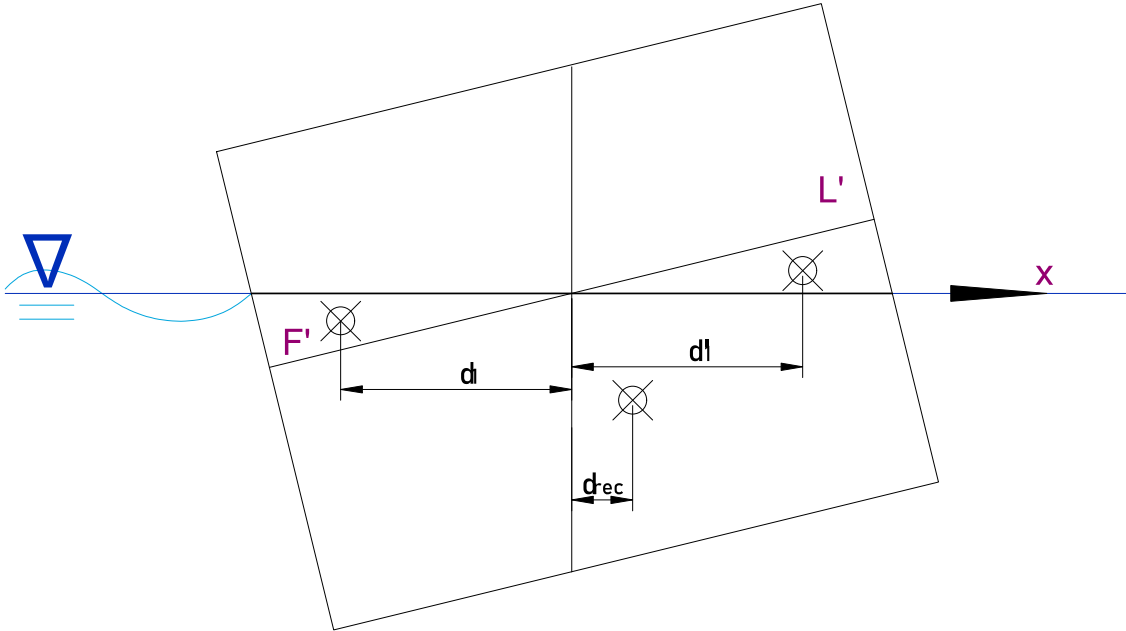


Figura 53: Áreas y Distancias

Con eso:

$$A_T l = A_1 d_1 + A_{rec} d_{rec} - A'_1 d'_1 \quad (30)$$

Como sabemos, el centroide de un triángulo queda a $\frac{1}{3}$ de su altura. Hay que tener en cuenta la inclinación un ángulo θ , con lo que las distancias son:

$$d_1 = \frac{2}{3}b \cos \theta$$

$$d'_1 = -d_1 = -\frac{2}{3}b \cos \theta$$

$$d_{rec} = -\frac{1}{2}T \sin \theta$$

Analizando correctamente la geometría de las distintas formas obtenemos los siguientes datos:

$$A_T = 2bT$$

$$A_1 = A'_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot b \tan \theta}{2} = \frac{1}{2}b^2 \tan \theta$$

$$A_{rec} = A_{T_{sumergida}} = 2bT$$

Sustituyendo en (30):

$$A_T l = A_1 d_1 + A_{rec} d_{rec} - A'_1 d'_1$$

$$2bTl = \left(\frac{1}{2}b^2 \tan \theta\right)\left(\frac{2}{3}b \cos \theta\right) + (2bT)\left(-\frac{1}{2}T \sin \theta\right) - \left(\frac{1}{2}b^2 \tan \theta\right)\left(-\frac{2}{3}b \cos \theta\right)$$

$$2bTl = \frac{1}{3}b^3 \sin \theta - T^2b \sin \theta + \frac{1}{3}b^3 \sin \theta$$

$$2bTl = \frac{2}{3}b^3 \sin \theta - T^2b \cos \theta$$

$$l = \frac{1}{3} \frac{b^2}{T} \sin \theta - \frac{1}{2}T \cos \theta$$

Cuando el ángulo de escora es muy pequeño (**¡Ojo! EN RADIANTES**) las funciones trigonométricas se pueden aproximar a :

$$\text{Si } \theta \ll \implies \sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\tan \theta \approx \theta$$

Por lo tanto, l quedará de la siguiente manera:

$$l = \frac{1}{3} \frac{b^2}{T} \theta - \frac{1}{2} T \theta$$

- b) Para saber que rango de semimanga - calado es estable deberemos saber que en buques, para alturas metacéntricas positivas, se considera estable. Por lo tanto, calculemos la altura metacéntrica para ángulos pequeños:

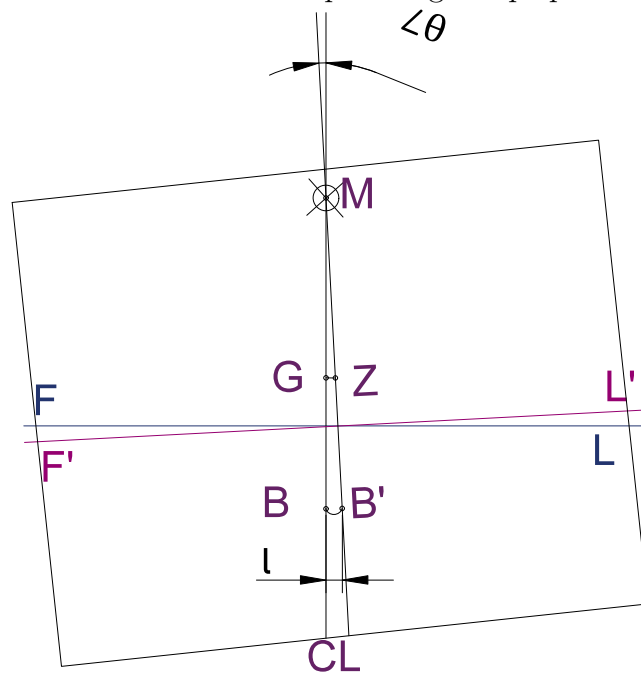


Figura 54: cálculo de GM

$$l = GM \sin \theta \implies GM = \frac{l}{\theta} = \frac{1}{3} \frac{b^2}{T} - \frac{1}{2} T$$

$$\text{Si } GM > 0 \implies \text{Estable}$$

$$\frac{1}{3} \frac{b^2}{T} - \frac{1}{2} T > 0 \implies \left(\frac{b}{T} \right)^2 > \frac{3}{2}$$

$$\text{Para } \left(\frac{b}{T} \right) > \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ la gabarra es estable.}$$

Por lo tanto concluimos que cuanto más ancha sea la gabarra, más estable será.

Referencias

- [1] Frank M. White, *Fluid Mechanics*, 4th Edition, McGraw-Hill (2000).
- [2] Apuntes de la asignatura "Fundamentos y Teoría del Buque".
- [3] Y.A. Çengel, J.M. Cimbala, *Fluid Mechanics. Fundamentals and Applications*, McGraw-Hill (2006).