

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

TESIS DOCTORAL

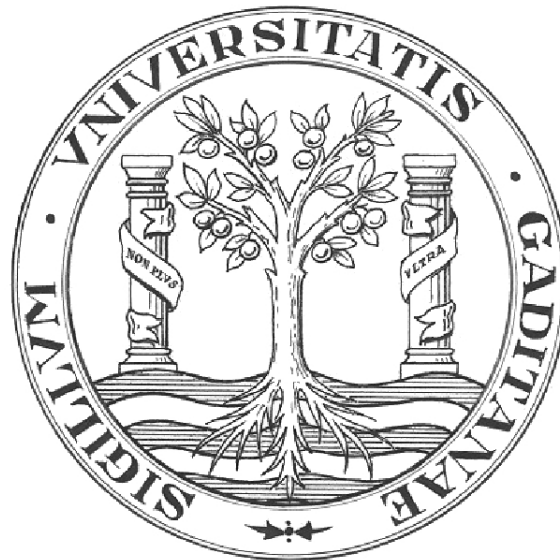
**Métodos de clasificación de álgebras con
anulador no nulo**

Autor:

A. FERNÁNDEZ OUARIDI

Director:

A. J. CALDERÓN MARTÍN



9 de junio de 2020

Abstract

The classification of algebras is an important and an interesting problem in Modern Algebra. There are algebraic classifications, geometric classifications, degeneration level classifications and some other. In this essay, we focus on the algebraic classification, that is, on the problem of finding all the algebras module isomorphisms of a certain dimension. Specifically, in the classification of algebras with non null annihilator. To this end, we make use of one type of algebra extensions: the so-called annihilator extensions.

This concept has been studied in depth in Theory of Lie Algebras, due to its numerous applications, especially outstanding in Physics. Due to this remarkable interest, the study of annihilator extensions of Lie algebras has a long history. However, the use of this notion to classify algebraically different classes of algebras is relatively recent, and that's the center of our study.

As a result of our research, we obtain a procedure to algebraically classify all algebras, of a certain class defined by polynomial identities, of dimension n with a m -dimensional annihilator, using the classification of algebras of dimension $n - m$. In addition, we apply this procedure in different specific cases, obtaining the classification of the n -dimensional algebras with $(n - 2)$ -dimensional annihilator, the classification of the n -dimensional anticommutative algebras with $(n - 3)$ -dimensional annihilator and the classification of the n -dimensional non-malcev binary-Lie algebras with $(n - 4)$ -dimensional annihilator.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que, en virtud de su sabiduría, me han ayudado a llegar al punto en el que me encuentro. En especial, a Antonio Jesús Calderón, quien con su ayuda ha hecho posible este trabajo.

Muchas gracias.

Índice general

Agradecimientos	v
Prefacio	1
1. Álgebras no asociativas	5
1.1. Introducción	5
1.1.1. Clases de álgebras definidas por identidades polinómicas	7
1.1.2. Clases de álgebras no definidas por identidades polinómicas	11
1.2. Conceptos básicos	13
2. Clasificación de las álgebras con anulador no nulo	19
2.1. Fundamentos del procedimiento	19
2.2. Construcción del Algoritmo Principal	24
2.3. Algoritmo Principal	27
2.4. Aplicación: clasificación de las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$	36
2.4.1. Álgebras $A_1(\alpha)$, con $\alpha \in k$	38
2.4.2. Álgebra A_2	40
2.4.3. Álgebra A_3	43
2.4.4. Álgebras $A_4(\alpha)$, con $\alpha \in k_{\geq 0}$	46
2.4.5. Álgebras $B_1(\alpha)$, con $\alpha \in k$	47
2.4.6. Álgebras $B_2(\alpha)$, con $\alpha \in k$	48
2.4.7. Álgebra B_3	50
2.4.8. Álgebras $C(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in k \times k_{\geq 0}$	53
2.4.9. Álgebras $D_1(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$	55
2.4.10. Álgebras $D_2(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in k^2 \setminus \mathcal{T}$	59
2.4.11. Álgebras $D_3(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in k^2 \setminus \mathcal{T}$	62

2.4.12. Álgebras $E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{V}$	64
2.4.13. Álgebras $E_2(\alpha, \beta, \gamma)$, con $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{k}^3 \setminus \mathbf{k} \times \mathcal{T}$	66
2.4.14. Álgebras $E_3(\alpha, \beta, \gamma)$, con $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{k}^2 \times \mathbf{k}_{>1}^*$	67
2.4.15. Álgebra E_4	68
2.4.16. Álgebras $E_5(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbf{k}$	69
2.4.17. Álgebra N_2	71
2.4.18. Álgebras <i>split</i>	76
2.4.19. Clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión tres	77
3. Clasificación de las álgebras, con anulador no nulo, pertenecientes a una clase fijada	81
3.1. Algoritmo Principal para una clase fijada de álgebras	82
3.2. Aplicación: clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$	89
3.2.1. Álgebra N_3	93
3.2.2. Álgebra \mathfrak{g}_1	96
3.2.3. Álgebra \mathfrak{g}_3^0	97
4. Clasificación de las álgebras, con anulador no nulo, de una clase fijada que no pertenecen a una subclase dada	101
4.1. Algoritmo Principal para clases de álgebras no pertenecientes a otra subclase de álgebras	101
4.2. Aplicación: clasificación de las álgebras de Lie-binarias complejas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$ que no son de Malcev	103
4.2.1. Álgebra \mathcal{L}_1	108
4.2.2. Álgebra \mathcal{L}_2^0	110
4.2.3. Álgebra \mathcal{L}_2^{-1}	111
4.2.4. Álgebra \mathcal{M}_1	114
4.2.5. Álgebra \mathcal{B}_2	116
Conclusiones	121
A. Álgebras de partida	123
A.1. Clasificación de las álgebras de dimensión dos	123

A.2. Clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres . . .	127
A.3. Clasificación de las álgebras de Lie-binarias de dimensión cuatro . . .	128
B. Álgebras en Wolfram Mathematica	129
B.1. Definición de álgebras	129
B.2. Identidades polinómicas	130
B.3. Cálculo del anulador de una álgebra	134
B.4. Cálculo del grupo de automorfismos de una álgebra	135
B.5. Cálculo del espacio de cociclos de una álgebra	138
C. Tablas de clasificación	143

A mi familia.

Fue, es y será un placer coincidir en esta vida.

Prefacio

La clasificación de álgebras es un importante y apasionante problema en el Álgebra Moderna. Existen clasificaciones algebraicas [1–13], clasificaciones geométricas [2–4,10,11,13–27], clasificaciones según el nivel de degeneración [28], entre otras. En esta memoria, nos centramos en la clasificación algebraica, esto es, en el problema de encontrar todas las álgebras módulo isomorfismos de una cierta dimensión. Concretamente, en la clasificación de álgebras con anulador no nulo. Con este fin, hacemos uso de un tipo de extensiones de álgebras: las denominadas extensiones por anulador.

La noción de extensión por anulador de una álgebra, o de extensión central en Teoría de Álgebras de Lie, sigue una definición semejante a la de extensión central de un grupo. Esta es:

Sean \mathbb{A}' una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial sobre un mismo cuerpo k . Una extensión por anulador de la álgebra \mathbb{A}' por \mathbb{V} es una álgebra \mathbb{A} tal que el anulador de \mathbb{A} es \mathbb{V} y la álgebra cociente \mathbb{A}/\mathbb{V} es isomorfa a \mathbb{A}' .

Este concepto ha sido estudiado en profundidad en la Teoría de Álgebras de Lie, debido a sus numerosas aplicaciones, especialmente destacables en distintas áreas de la Física.

En general, en Física, el grupo de simetría de un sistema es el conjunto de transformaciones que dejan invariante el Lagrangiano que define la evolución temporal de un sistema físico. En algunas ocasiones, este grupo se corresponde con una extensión central del grupo simétrico, que, a su vez, se corresponde con una extensión por anulador de la álgebra simétrica [29,30].

Esto ocurre por ejemplo en la Teoría de Corrientes Conservadas. Estas corrientes se identifican con una álgebra que está relacionada con las llamadas álgebras de Kac-Moody afines, que son extensiones por anulador universales de álgebras *loop*,

un cierto tipo de álgebra de Lie. A propósito de las álgebras de Kac-Moody, existen conjeturas sobre la posibilidad de que sean los grupos de simetría de los sistemas de una teoría de supercuerdas unificada [31].

Asimismo, en Teoría Conforme de Campos y en Teoría de Cuerdas, se utiliza ampliamente la álgebra de Virasoro, una álgebra de Lie compleja que es la única extensión por anulador de la álgebra de Witt [29, 32].

Otra área en la que encontramos extensiones por anulador es en Mecánica Cuántica: uno de los primeros encuentros es por medio del Teorema de Wigner, que establece que una simetría de un sistema mecánico cuántico determina una transformación lineal y unitaria o antilineal y antiunitaria de un espacio de Hilbert [33]. Esta materia guarda una estrecha relación con las álgebras de Lie y la cohomología de álgebras de Lie, que está orientada al estudio de este tipo de extensiones.

Debido a este notable interés, el estudio de las extensiones por anulador de álgebras de Lie tiene una larga historia. Sin embargo, el uso de esta noción para clasificar algebraicamente distintas variedades de álgebras es relativamente reciente.

Los primeros en estudiar las extensiones por anulador de álgebras de Lie con el propósito de obtener clasificaciones algebraicas fueron Skjelbred y Sund, que las utilizaron para clasificar las álgebras de Lie nilpotentes [34].

Posteriormente, surgieron trabajos que utilizaban extensiones por anulador para clasificar otras clases de álgebras. De este modo, tenemos la clasificación de todas las álgebras de Malcev de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$ [35] o la clasificación de todas las álgebras de Jordan de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$ [36], entre otros trabajos [37–40]. No obstante, existen numerosas clases de álgebras con anulador no nulo que no han sido estudiadas todavía y de las cuales no se dispone de una clasificación.

En este estudio, consideramos el problema de clasificar algebraicamente las álgebras con anulador no nulo de una clase que esté definida por identidades polinómicas. Para resolver esta cuestión, hacemos uso del concepto de extensión por anulador y formulamos un procedimiento a través del cual obtener dicha clasificación.

El primer capítulo recoge todos aquellos requisitos previos que son necesarios para poder abordar este problema. Esto incluye una breve introducción a la teoría

de álgebras no asociativas, junto con algunos ejemplos de las clases de álgebras más conocidas.

En el segundo capítulo, desarrollamos un algoritmo para obtener una clasificación salvo isomorfismos de las extensiones por anulador de una álgebra. Seguidamente, aplicamos este algoritmo a un problema concreto, el de clasificar las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$.

En el tercer capítulo, nos planteamos el problema de generalizar el procedimiento de tal forma que obtengamos únicamente las álgebras de una determinada clase definida por identidades polinómicas. Después, aplicamos esta generalización al problema de clasificar las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$.

Finalmente, en el cuarto capítulo, abordamos otra variante del problema, la de clasificar las álgebras de una cierta clase que no sean de otra cierta clase, lo que nos lleva a tener que adaptar ligeramente el procedimiento del capítulo anterior. Posteriormente, aplicamos esta nueva variante con el fin de clasificar las álgebras de Lie-binarias que no son de Malcev de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$.

Capítulo 1

Álgebras no asociativas

En este capítulo, vamos a introducir brevemente los conceptos y resultados de la teoría de álgebras no asociativas que serán necesarios en el desarrollo de esta memoria. Comenzaremos definiendo el concepto de álgebra y presentando algunas de las clases de álgebras más conocidas, junto con ejemplos, dejando ver que existen dos grandes bloques: las clases definidas por identidades polinómicas y las clases no definidas por identidades polinómicas. A continuación, presentaremos algunos de los conceptos básicos de la teoría de álgebras no asociativas, como la noción de ideal de una álgebra, la de anulador de una álgebra, la de cociente de una álgebra por un ideal o la de homomorfismo entre álgebras. Finalmente, utilizando estos conceptos, enunciaremos el problema al que se debe este estudio.

1.1. Introducción

Cuando hablamos de álgebras no asociativas no nos referimos a aquellas álgebras que no cumplen la propiedad asociativa, si no a aquellas a las cuales no se requiere en su definición tal propiedad. Siendo precisos, llamaremos álgebra a la estructura que definimos a continuación.

Definición 1.1. Sea k un cuerpo arbitrario. Una álgebra \mathbb{A} es un k -espacio vectorial junto con una aplicación bilineal, a la que llamaremos multiplicación de la álgebra, denotada de la siguiente forma:

$$- \bullet - : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$$

$$(x, y) \mapsto x \bullet y$$

Además, definimos la dimensión de la álgebra \mathbb{A} como su dimensión como espacio vectorial.

Por tanto, una álgebra tiene dos operaciones internas, la suma y la multiplicación $-\bullet-$, y una operación externa, el producto por un escalar del cuerpo.

Históricamente, las primeras definiciones de álgebra que surgen incorporan la condición de que la aplicación bilineal $-\bullet-$ deba ser asociativa, esto es, que cumpla

$$(x \bullet y) \bullet z - x \bullet (y \bullet z) = 0$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{A}$, y unitaria, es decir, que exista un elemento $1 \in \mathbb{A}$ tal que $1 \bullet x = x \bullet 1 = x$. En este caso, la suma y la multiplicación dotan a \mathbb{A} de estructura de anillo unitario.

Uno de los ejemplos de mayor peso en la teoría de álgebras asociativas es la álgebra libre:

Ejemplo 1.1. La álgebra libre asociativa unitaria en n variables $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sobre \mathbf{k} , a la que denotaremos por $\mathbf{k}\langle X \rangle$, es la álgebra cuyo espacio vectorial está generado por todas las palabras (o monomios asociativos) del alfabeto X (incluida la palabra vacía, necesaria para que sea unitaria) y cuya multiplicación de dos elementos de la base se obtiene por concatenación:

$$(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r}) \bullet (\alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \dots \alpha_{j_s}) = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_r} \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \dots \alpha_{j_s}.$$

El resto de productos se infieren de la bilinealidad de la multiplicación. Claramente, la palabra vacía es el elemento unitario y la asociatividad se deduce de que la multiplicación no preserve los paréntesis.

Análogamente, en la teoría de álgebras no asociativas tenemos la álgebra libre no asociativa:

Ejemplo 1.2. La álgebra libre no asociativa en n variables $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sobre \mathbf{k} , a la que denotaremos por $\mathbf{k}(X)$, es la álgebra cuyo espacio vectorial está generado por los monomios no asociativos (que retienen los paréntesis) de X y cuya multiplicación de dos elementos de la base se obtiene por concatenación conservando los paréntesis. Basta incluir el monomio vacío para que sea unitario.

Con la emersión de la teoría de grupos de Lie, se acrecentó el interés por estudiar estructuras no asociativas y surgieron una amplia variedad de clases de álgebras no

asociativas (con y sin unidad), que se diferencian en las propiedades que satisface la multiplicación de la álgebra. Dentro de las clases de álgebras no asociativas podemos distinguir dos grandes grupos: las clases definidas por identidades polinómicas y las clases no definidas por identidades polinómicas.

1.1.1. Clases de álgebras definidas por identidades polinómicas

Una identidad polinómica es una igualdad $P = 0$ donde $P = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un polinomio no conmutativo y no asociativo cuyos monomios son de grado estrictamente mayor que uno. Diremos que una álgebra \mathbb{A} satisface la identidad polinómica $P = 0$, si para cualesquiera elementos $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{A}$ se tiene que $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ en \mathbb{A} . De forma que una clase de álgebras está definida por identidades polinómicas si las propiedades que debe satisfacer la multiplicación para que la álgebra pertenezca a la clase son identidades polinómicas (o equivalentes a identidades polinómicas). En otro caso, diremos que la clase no está definida por identidades.

Nótese que el término “identidad polinómica” es un abuso del lenguaje, ya que con polinómica nos referimos a polinomios no conmutativos y no asociativos.

Que una clase esté definida por identidades polinómicas es una propiedad deseable, ya que, en geometría algebraica, esto garantiza que esta clase de lugar a una variedad algebraica, lo que justifica que en ocasiones se utilice el término variedad para referirse a una clase definida por este tipo de identidades. A continuación, veremos algunas de estas clases, junto con algunos ejemplos.

Definición 1.2. Una álgebra \mathbb{A} es anticonmutativa si satisface la identidad polinómica $x \bullet x = 0$, para $x \in \mathbb{A}$.

La condición $x \bullet x = 0$ implica que $x \bullet y + y \bullet x = 0$. Sin embargo, el recíproco solo es cierto si la característica de k no es dos.

Ejemplo 1.3. Las matrices cuadradas de dimensión n , $M_n(k)$, junto con el producto definido como $x \bullet y = xy - yx$ para $x, y \in M_n(k)$ forman una álgebra anticonmutativa.

Definición 1.3. Una álgebra \mathbb{A} es álgebra de Leibniz si para $x, y, z \in \mathbb{A}$ la multiplicación satisface la identidad polinómica, conocida como identidad de Leibniz, dada por:

$$x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z + (x \bullet z) \bullet y = 0.$$

Ejemplo 1.4. Si tomamos un espacio vectorial de dimensión dos con una base $\{e_1, e_2\}$, junto con la aplicación bilineal definida por:

$$e_1 \bullet e_1 = 0 \quad e_1 \bullet e_2 = 0 \quad e_2 \bullet e_1 = e_1 \quad e_2 \bullet e_2 = e_1$$

tenemos una álgebra de Leibniz.

Definición 1.4. Una álgebra \mathbb{A} es álgebra de Lie si es anticonmutativa y de Leibniz. Es decir, la multiplicación, a la que se suele llamar corchete y se denota $[-, -]$, satisface las identidades polinómicas:

- $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathbb{A}$. (anticonmutatividad)
- $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$, para $x, y, z \in \mathbb{A}$. (identidad de Jacobi)

La comprobación de que la identidad de Leibniz y la identidad de Jacobi son equivalentes en álgebras anticonmutativas se obtiene de forma inmediata.

Ejemplo 1.5. La forma clásica de construir un ejemplo de álgebra de Lie consiste en tomar una álgebra asociativa, como puede ser $M_n(\mathbf{k})$ con el producto usual, y modificar la multiplicación, tomando una nueva definida como $[x, y] = xy - yx$. Mediante cálculos sencillos, se puede comprobar que esta construcción siempre genera una álgebra de Lie.

A partir de la identidad de Jacobi que acabamos de introducir, podemos definir el operador jacobiano $\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{k}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ como

$$\mathcal{J}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := [[\alpha_1, \alpha_2], \alpha_3] + [[\alpha_2, \alpha_3], \alpha_1] + [[\alpha_3, \alpha_1], \alpha_2].$$

Así, surgen generalizaciones de álgebras de Lie como las siguientes:

Definición 1.5. Sea \mathbb{A} una álgebra anticonmutativa.

- La álgebra \mathbb{A} es álgebra de Lie si

$$\mathcal{J}(x, y, z) = 0 \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathbb{A}.$$

- La álgebra \mathbb{A} es álgebra de Malcev si

$$\mathcal{J}(x, y, [x, z]) = [\mathcal{J}(x, y, z), x] \quad \text{para todo } x, y, z \in \mathbb{A}.$$

- La álgebra \mathbb{A} es álgebra de Lie-binaria si

$$\mathcal{J}([x, y], x, y) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{A}.$$

Observación 1.1. Toda álgebra de Lie es álgebra de Malcev y toda álgebra de Malcev es álgebra de Lie-binaria. Por lo que afirmamos que la clase de las álgebras de Lie es una subclase de la clase de las álgebras de Malcev y la clase de las álgebras de Malcev es una subclase de la clase de las álgebras de Lie-binarias.

Ejemplo 1.6. Un espacio vectorial de dimensión cuatro con una base $\{e_1, \dots, e_4\}$, junto con la aplicación bilineal anticonmutativa definida por:

$$\mathcal{M}_{4,1} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_1 \quad [e_2, e_4] = e_2 \quad [e_3, e_4] = -e_3$$

donde los productos que no se indican son nulos o se deducen de la anticonmutatividad, es una álgebra de Malcev. Por otra parte, un espacio vectorial de dimensión cinco con una base $\{e_1, \dots, e_5\}$, junto con la aplicación bilineal anticonmutativa definida por:

$$\mathcal{B}_{5,3} : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5$$

es una álgebra de Lie-binaria que no es álgebra de Malcev.

Otros ejemplos de clases de álgebras de interés son los que resultan de la construcción de Cayley-Dickson.

Ejemplo 1.7. La construcción de Cayley-Dickson es un proceso por el cual se obtiene una secuencia de álgebras sobre el cuerpo de los reales \mathbb{R} en la que cada una tiene el doble de dimensión que la anterior. Esta secuencia aporta una gran cantidad de ejemplos interesantes. Previamente, necesitamos introducir el concepto de conjugado:

Sea \mathbb{A} una álgebra, diremos que una aplicación lineal $\bar{\cdot} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es un conjugado si $\bar{\bar{x}} = x$ para $x \in \mathbb{A}$.

A partir de aquí, la construcción se hace de la siguiente forma:

- Tomamos $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$ y definimos el conjugado de un elemento $x \in \mathbb{R}$ como $\bar{x} = x$. La multiplicación en \mathbb{A}_0 es la usual en los reales.

- Definimos $\mathbb{A}_{k+1} = \mathbb{A}_k \oplus \mathbb{A}_k$ y definimos el conjugado como $\overline{(x, y)} = (\bar{x}, -y)$. La multiplicación en \mathbb{A}_{k+1} se define a partir de la multiplicación en \mathbb{A}_k como:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - \overline{y_2}y_1, y_2x_1 + y_1\overline{x_2}).$$

Construyamos las primeras álgebras de la serie.

0. En primer lugar, tenemos a $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$ con la multiplicación usual. Se trata de una álgebra de dimensión uno, asociativa y conmutativa, es decir, para $x, y \in \mathbb{A}_0$ se tiene que $xy - yx = 0$.
1. En segundo lugar, tenemos a $\mathbb{A}_1 = \mathbb{C}$ con la multiplicación usual de números complejos. Una base de \mathbb{C} es $\{1, i\}$, por tanto es una álgebra de dimensión dos. Además, es asociativa y conmutativa.
2. En tercer lugar, tenemos el espacio $\mathbb{A}_2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Se trata de una álgebra de dimensión cuatro asociativa pero no conmutativa: los cuaterniones, que se suelen denotar por \mathbf{H} . Para una base $\{1, i, j, k\}$ de \mathbf{H} , la Tabla 1.1 describe la multiplicación entre los elementos de la base.

\mathbf{H}	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

TABLA 1.1: Tabla de multiplicar de los cuaterniones .

3. En cuarto lugar, tenemos el espacio $\mathbb{A}_3 = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$. Supongamos que $\{1, e_1, \dots, e_7\}$ es una base de \mathbb{A}_3 , entonces la multiplicación vendría dada por la Tabla 1.2.

Esta álgebra, que se conoce con el nombre de octoniones y se denota \mathbf{O} , no es conmutativa, ni asociativa. Sin embargo, satisface una asociatividad relajada, dada por las identidades polinómicas $x \bullet (x \bullet y) - (x \bullet x) \bullet y = 0$ e $(y \bullet x) \bullet x - y \bullet (x \bullet x) = 0$ para $x, y \in \mathbb{A}_3$. Las álgebras que satisfacen estas identidades se conocen como álgebras alternativas.

O	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

TABLA 1.2: Tabla de multiplicar de los octoniones .

4. Para $k = 4$, la álgebra resultante no es conmutativa, ni asociativa, ni alternativa.

1.1.2. Clases de álgebras no definidas por identidades polinómicas

El segundo gran grupo de clases de álgebras son las clases no definidas por identidades polinómicas. Dentro de este grupo, existen clases que están definidas por lo que se conoce coloquialmente como pseudoidentidades, como son las álgebras conservativas.

El concepto de álgebra conservativa fue introducido en 1972 por Kantor en [41]. Para su definición es necesario conocer previamente el producto entre una aplicación lineal y una aplicación bilineal, que se define en dicho artículo.

Definición 1.6. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una aplicación lineal y $\mathcal{P} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ una aplicación bilineal. Definimos la multiplicación $[\psi, \mathcal{P}] : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ como

$$[\psi, \mathcal{P}](x, y) = \psi(\mathcal{P}(x, y)) - \mathcal{P}(\psi(x), y) - \mathcal{P}(x, \psi(y)), \text{ para } x, y \in \mathbb{V}.$$

Ahora estamos preparados para dar la definición de álgebra conservativa de Kantor.

Definición 1.7. Una álgebra \mathbb{A} con multiplicación $\mathcal{P} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es una álgebra conservativa si existe otra multiplicación $\mathcal{F} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que:

$$[L_b^{\mathcal{P}}, [L_a^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}]] = -[L_{\mathcal{F}(a,b)}^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}], \text{ para } a, b \in \mathbb{A},$$

donde $L_a^{\mathcal{P}}$ es el operador de multiplicación de $a \in \mathbb{A}$ por la izquierda de \mathcal{P} , es decir, la aplicación lineal $L_a^{\mathcal{P}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que $L_a^{\mathcal{P}}(x, y) = \mathcal{P}(a, \mathcal{P}(x, y))$. Esta pseudoidentidad puede desarrollarse dando lugar a la siguiente pseudoidentidad polinómica (en la que hemos denotado $\mathcal{P}(x, y)$ como xy), que debe cumplirse para todo $a, b, x, y \in \mathbb{A}$:

$$b(a(xy) - (ax)y - x(ay)) - a((bx)y + (a(bx))y + (bx)(ay) - a(x(by)) + (ax)(by) + x(a(by))) = -\mathcal{F}(a, b)(xy) + (\mathcal{F}(a, b)x)y + x(\mathcal{F}(a, b)y).$$

Ejemplo 1.8. Un ejemplo de álgebra conservativa es la álgebra de dimensión dos $\mathbf{A}_1(1)$, que podemos encontrar en [2]. Para una base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbf{A}_1(1)$, su multiplicación \mathcal{P} vendría dada por:

$$\mathbf{A}_1(1) : \mathcal{P}(e_1, e_1) = e_1 + e_2 \quad \mathcal{P}(e_1, e_2) = e_2 \quad \mathcal{P}(e_2, e_1) = 0 \quad \mathcal{P}(e_2, e_2) = 0$$

Es fácil comprobar que podemos tomar la segunda multiplicación \mathcal{F} como cualquier aplicación de la forma:

$$\mathcal{F}(e_1, e_1) = e_1 + \lambda_1 e_2 \quad \mathcal{F}(e_1, e_2) = \lambda_2 e_2 \quad \mathcal{F}(e_2, e_1) = \lambda_3 e_2 \quad \mathcal{F}(e_2, e_2) = \lambda_4 e_2$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbf{k}$.

También existen álgebras que no están definidas ni por identidades, ni por pseudoidentidades, es el caso de las álgebras de evolución, que fueron introducidas en 2008 por Tian en [42].

Definición 1.8. Una álgebra \mathbb{A} es álgebra de evolución si existe una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{A} tal que $e_i \bullet e_j = 0$ para $i \neq j$. Una base con dicha propiedad se le denomina base natural. Además, los escalares $a_{ki} \in \mathbf{k}$ tal que $e_i e_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$ se conocen como constantes estructurales de \mathbb{A} respecto a la base B .

Estas álgebras siempre son conmutativas. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Mas allá de esta identidad, no se conocen otras identidades o pseudoidentidades que cumplan todas las álgebras de evolución.

Ejemplo 1.9. Un ejemplo de álgebra de evolución es un espacio vectorial de dimensión dos con una base $\{e_1, e_2\}$, junto con la multiplicación:

$$e_1 \bullet e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1 \bullet e_2 = 0 \quad e_2 \bullet e_1 = 0 \quad e_2 \bullet e_2 = e_2$$

1.2. Conceptos básicos

Ahora que conocemos algunas clases de álgebras y hemos visto una gran variedad de ejemplos de ellas, veamos algunos de los conceptos básicos de la teoría de álgebras no asociativas.

Definición 1.9. Una **subálgebra** de una álgebra \mathbb{A} es un subespacio vectorial \mathbb{A}' de \mathbb{A} tal que $x \bullet y \in \mathbb{A}'$ para todo $x, y \in \mathbb{A}'$. Esto es, $\mathbb{A}' \bullet \mathbb{A}' \subset \mathbb{A}'$.

De la definición de subálgebra se deduce que si una álgebra \mathbb{A} satisface una identidad $P = 0$ entonces cualquiera de sus subálgebras también la satisface.

Definición 1.10. Un **ideal** por la derecha (respectivamente por la izquierda) de una álgebra \mathbb{A} es un subespacio vectorial \mathbb{I} de \mathbb{A} tal que $a \bullet x \in \mathbb{I}$ (respectivamente $x \bullet a \in \mathbb{I}$) para todo $a \in \mathbb{I}$ y $x \in \mathbb{A}$. Esto es $\mathbb{I} \bullet \mathbb{A} \subset \mathbb{I}$ (respectivamente $\mathbb{A} \bullet \mathbb{I} \subset \mathbb{I}$).

Si un subespacio \mathbb{I} de \mathbb{A} es simultáneamente ideal por la derecha y por la izquierda entonces diremos que es un ideal o ideal bilátero.

Además, una álgebra cuyos únicos ideales son $\{0\}$ y ella misma la llamaremos simple.

Observación 1.2. Todo ideal es una subálgebra.

Como es natural, podemos definir cocientes de álgebras por sus ideales.

Definición 1.11. Sea \mathbb{A} una álgebra y sea \mathbb{I} un ideal de esta álgebra. Definimos la **álgebra cociente** de \mathbb{A} por \mathbb{I} como la álgebra con espacio vectorial base \mathbb{A}/\mathbb{I} (cociente de espacios vectoriales), junto con la multiplicación:

$$(x + \mathbb{I}) \bullet (y + \mathbb{I}) = x \bullet y + \mathbb{I} \text{ para } x, y \in \mathbb{A}.$$

Ejemplo 1.10. La álgebra anticonmutativa \mathcal{A} generada por la base $\{e_1, e_2\}$ con multiplicación $e_1 \bullet e_2 = e_1 + e_2$ (el resto de productos se pueden deducir) tiene un ideal generado por $e_1 + e_2$.

El cociente de \mathcal{A} por el ideal $\langle e_1 + e_2 \rangle$ es la álgebra de dimensión uno con multiplicación:

$$(x + \langle e_1 + e_2 \rangle) \bullet (y + \langle e_1 + e_2 \rangle) = x \bullet y + \langle e_1 + e_2 \rangle \text{ para } x, y \in \mathcal{A}.$$

Como para todo $x, y \in \mathcal{A}$ tenemos que $x \bullet y \in \langle e_1 + e_2 \rangle$, entonces todos los productos son nulos.

Este ejemplo inspira la siguiente observación:

Observación 1.3. Dada una álgebra \mathbb{A} , el subespacio vectorial $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \bullet \mathbb{A}$ es ideal de \mathbb{A} . Además, el cociente \mathbb{A}/\mathbb{A}^2 es una álgebra de productos nulos.

Ejemplo 1.11. La álgebra de Lie \mathcal{L}_1 generada por la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ con multiplicación:

$$\mathcal{L}_1 : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4$$

tiene siete ideales fácilmente identificables, que se corresponden a los subespacios vectoriales $\langle e_i \rangle$ con $2 \leq i \leq 4$; $\langle e_i, e_j \rangle$ con $2 \leq i, j \leq 4$, $y i \neq j$, y $\mathcal{L}_1^2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$. Además, es una álgebra unitaria cuya unidad es el elemento e_1 .

Vamos a calcular las álgebras cocientes por ideales de dimensión dos, las demás se obtienen de forma análoga. La álgebra cociente $\mathcal{L}_1/\langle e_i, e_j \rangle$ es la álgebra de dimensión dos generada por la base $\{e_1, e_k\}$ con multiplicación $[e_1, e_k] = e_k$ donde $k \neq i, j$ y $2 \leq k \leq 4$.

Ejemplo 1.12. La álgebra A_{10} generada por la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ con multiplicación:

$$A_{10} : e_1 \bullet e_1 = e_2 \quad e_1 \bullet e_2 = 0 \quad e_2 \bullet e_1 = e_3 \quad e_2 \bullet e_2 = 0$$

tiene un ideal un tanto especial, el correspondiente al subespacio vectorial $\langle e_3 \rangle$ de A_{10} . Este ideal cumple que $\langle e_3 \rangle \bullet A_{10} = A_{10} \bullet \langle e_3 \rangle = 0$.

Definición 1.12. Sea \mathbb{A} una álgebra. Definimos el anulador de \mathbb{A} , y lo denotamos por $\text{Ann}(\mathbb{A})$, como el conjunto de elementos $x \in \mathbb{A}$ tales que $x \bullet \mathbb{A} = \mathbb{A} \bullet x = 0$.

Observación 1.4. El anulador de \mathbb{A} es un ideal de \mathbb{A} .

Definición 1.13. La álgebra opuesta de una álgebra \mathbb{A} con multiplicación $\bullet : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es la álgebra con el mismo espacio vectorial base, es decir, como espacio vectorial $\mathbb{A}^{op} = \mathbb{A}$, y con multiplicación $\bullet^{op} : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A}^{op} \rightarrow \mathbb{A}^{op}$ definida por $x \bullet^{op} y = y \bullet x$.

Ejemplo 1.13. La álgebra opuesta de la álgebra conservativa

$$\mathbb{A}_1(1) : \mathcal{P}(e_1, e_1) = e_1 + e_2 \quad \mathcal{P}(e_1, e_2) = e_2 \quad \mathcal{P}(e_2, e_1) = 0 \quad \mathcal{P}(e_2, e_2) = 0$$

es la álgebra

$$\mathbb{A}_1(1)^{op} : \mathcal{P}^{op}(e_1, e_1) = e_1 + e_2 \quad \mathcal{P}^{op}(e_1, e_2) = 0 \quad \mathcal{P}^{op}(e_2, e_1) = e_2 \quad \mathcal{P}^{op}(e_2, e_2) = 0$$

Definición 1.14. Sean \mathbb{A} y \mathbb{A}' dos álgebras con multiplicaciones \bullet y \bullet' , respectivamente.

Diremos que $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ es un **homomorfismo de álgebras** si:

- $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$ para $x, y \in \mathbb{A}$ y $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ (es homomorfismo de \mathbf{k} -espacios vectoriales).
- $\phi(x \bullet y) = \phi(x) \bullet' \phi(y)$ para $x, y \in \mathbb{A}$.

A partir de aquí, podemos definir epimorfismos entre álgebras, monomorfismos entre álgebras, endomorfismos entre álgebras, isomorfismos entre álgebras y automorfismos entre álgebras, de la forma usual.

Observación 1.5. Sean \mathbb{A} y \mathbb{A}' dos álgebras tal que existe un epimorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$. Supongamos que \mathbb{A} satisface las identidades polinómicas $P_1 = 0, \dots, P_n = 0$, entonces como para cualesquiera $x'_1, \dots, x'_{s(i)} \in \mathbb{A}'$ existen $x_1, \dots, x_{s(i)} \in \mathbb{A}$ tales que $\phi(x_1) = x'_1, \dots, \phi(x_{s(i)}) = x'_{s(i)}$, tenemos que:

$$P_i(x'_1, \dots, x'_{s(i)}) = P_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_{s(i)})) = \phi(P_i(x_1, \dots, x_{s(i)})) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

en donde la segunda igualdad se deduce de que ϕ es un homomorfismo de álgebras. Luego, \mathbb{A}' satisface las identidades que satisface \mathbb{A} .

De forma análoga tenemos la siguiente observación:

Observación 1.6. Sean \mathbb{A} y \mathbb{A}' dos álgebras tal que existe un monomorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$. Supongamos que \mathbb{A}' satisface las identidades polinómicas $Q_1 = 0, \dots, Q_m = 0$,

entonces para $x_1, \dots, x_{s(i)} \in \mathbb{A}$ tenemos

$$\phi(Q_i(x_1, \dots, x_{s(i)})) = Q_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_{s(i)})) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Como ϕ es monomorfismo, tenemos que $Q_i(x_1, \dots, x_{s(i)}) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Por tanto, \mathbb{A} satisface las identidades que satisface \mathbb{A}' .

A partir de las dos observaciones anteriores tenemos la siguiente:

Observación 1.7. Sean \mathbb{A} y \mathbb{A}' dos álgebras tal que existe un isomorfismo de álgebras $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$. Entonces \mathbb{A} y \mathbb{A}' satisfacen las mismas identidades polinómicas. Además, diremos que las álgebras \mathbb{A} y \mathbb{A}' son isomorfas y lo denotaremos por $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'$.

En esta memoria trabajaremos frecuentemente con homomorfismos de espacios vectoriales y con homomorfismos de álgebras, por lo que por una cuestión de economía lingüística utilizaremos los términos homomorfismos lineales para referirnos a los primeros y homomorfismos para referirnos a los segundos.

Observación 1.8. Dada una álgebra \mathbb{A} , podemos considerar el conjunto de endomorfismos de \mathbb{A} , $End(\mathbb{A})$, junto la operación composición. Esto da lugar a un grupo cuyo elemento neutro es el homomorfismo identidad. Si consideramos el subconjunto de $End(\mathbb{A})$ correspondiente a los automorfismos, podemos comprobar que se trata de un subgrupo de este, al que denotaremos por $Aut(\mathbb{A})$ y denominaremos grupo de automorfismos de \mathbb{A} . El grupo $Aut(\mathbb{A})$ tendrá gran importancia en el estudio que realizaremos en los próximos capítulos.

Ejemplo 1.14. En este ejemplo calcularemos el grupo de automorfismos de la álgebra \mathbf{B}_3 , definido sobre un espacio vectorial de dimensión dos con una base $\{e_1, e_2\}$ y cuya multiplicación viene dada por los productos:

$$\mathbf{B}_3 : e_1 \bullet e_1 = 0 \quad e_1 \bullet e_2 = e_2 \quad e_2 \bullet e_1 = -e_2 \quad e_2 \bullet e_2 = 0$$

Como sabemos, las aplicaciones lineales biyectivas se pueden identificar con el grupo lineal general de \mathbf{B}_3 , al que denotaremos $GL(\mathbf{B}_3)$. Por lo que tenemos que encontrar los isomorfismos lineales $\phi \in GL(\mathbf{B}_3)$ que cumplan que $\phi(x \bullet y) = \phi(x) \bullet \phi(y)$, para $x, y \in \mathbf{B}_3$.

Supongamos que $\phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$ donde $\phi_{ij} \in \mathbf{k}$ y que $x = x_1e_1 + x_2e_2$ para $x_1, x_2 \in \mathbf{k}$ e $y = y_1e_1 + y_2e_2$ para $y_1, y_2 \in \mathbf{k}$. Entonces como

$$x \bullet y = (x_1e_1 + x_2e_2) \bullet (y_1e_1 + y_2e_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)e_2,$$

tenemos por un lado que $\phi(x \bullet y) = (x_1y_2 - x_2y_1)\phi(e_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)(\phi_{12}e_1 + \phi_{22}e_2)$.

Por otro lado, como

$$\phi(x) = (\phi_{11}x_1 + \phi_{12}x_2)e_1 + (\phi_{21}x_1 + \phi_{22}x_2)e_2$$

$$\phi(y) = (\phi_{11}y_1 + \phi_{12}y_2)e_1 + (\phi_{21}y_1 + \phi_{22}y_2)e_2, \text{ entonces}$$

$$\phi(x) \bullet \phi(y) = ((\phi_{11}x_1 + \phi_{12}x_2)(\phi_{21}y_1 + \phi_{22}y_2) - (\phi_{21}x_1 + \phi_{22}x_2)(\phi_{11}y_1 + \phi_{12}y_2))e_2.$$

Igualando cada componente obtenemos un sistema de ecuaciones que debe cumplirse para todo $x, y \in \mathbf{B}_3$, y que podemos resolver fácilmente. De aquí, concluimos que el grupo de automorfismos de la álgebra \mathbf{B}_3 está formado por los isomorfismos lineales de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \text{ tales que } \phi_{21} \in \mathbf{k} \text{ y } \phi_{22} \in \mathbf{k}^*.$$

Un ejercicio interesante sería calcular ahora el grupo de automorfismos de \mathbf{B}_3^{op} , para comprobar que está formado por los isomorfismos lineales de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \phi_{12} \\ 0 & \phi_{22} \end{pmatrix} \text{ tales que } \phi_{12} \in \mathbf{k} \text{ y } \phi_{22} \in \mathbf{k}^*.$$

La siguiente observación es fruto de este ejercicio.

Observación 1.9. Dada una álgebra \mathbb{A} , existe una correspondencia biyectiva entre $\text{Aut}(\mathbb{A})$ y $\text{Aut}(\mathbb{A}^{op})$. Siendo más precisos, los elementos de $\text{Aut}(\mathbb{A}^{op})$ son los transpuestos de los elementos de $\text{Aut}(\mathbb{A})$.

En este punto, nos encontramos en disposición de introducir el problema que nos ocupará los próximos capítulos de esta tesis: la clasificación de álgebras.

Fijada una cierta clase de álgebras \mathcal{C} , surge la pregunta:

¿Podríamos dar una lista de todas las álgebras que pertenecen a esta clase?

Para resolver este interrogante recurrimos a dar una clasificación algebraica.

Una clasificación algebraica de las álgebras de la clase \mathcal{C} de dimensión $n \in \mathbb{N}$ consiste en hallar todas las álgebras de la clase \mathcal{C} de dimensión n módulo isomorfismos, es decir, encontrar el cociente del conjunto de álgebras de dimensión n de la clase \mathcal{C} por la relación de equivalencia:

Dos álgebras \mathbb{A} y \mathbb{A}' están relacionadas si y solo si son isomorfas.

En esta situación, podemos afirmar que cualquier álgebra de la clase \mathcal{C} de dimensión n es isomorfa a alguna de las que hemos encontrado y, a su vez, dadas cualesquiera dos álgebras diferentes de las encontradas, estas no son isomorfas entre si (véase Apéndice A para encontrar algunos ejemplos de clasificaciones conocidas).

Sin embargo, abordar esta cuestión sin distinguir más que la dimensión de la álgebra suele resultar demasiado ambicioso cuando se consideran dimensiones altas. Es por ello que se pueden considerar otro tipo de restricciones que nos permitan clasificar las álgebras de cualquier dimensión: en esta memoria desarrollamos un algoritmo que da respuesta al interrogante anterior en el caso de las álgebras con anulador no nulo.

Comenzaremos desarrollando un procedimiento que nos permita clasificar las álgebras de dimensión finita con anulador no nulo y pondremos en práctica este método en un caso concreto. A continuación, adaptaremos este procedimiento para clasificar las álgebras definidas por identidades polinómicas de dimensión finita con anulador no nulo y aplicaremos este nuevo método a un caso concreto. Para finalizar, volveremos a adaptar el procedimiento para clasificar las álgebras de dimensión finita con anulador no nulo, que cumplan unas identidades polinómicas pero que no cumplan otras, volviendo a dar una aplicación concreta.

Capítulo 2

Clasificación de las álgebras con anulador no nulo

Este capítulo está dedicado a encontrar un algoritmo para clasificar las álgebras con anulador no nulo. En él, desarrollamos un conjunto de resultados que culminarán con la presentación del procedimiento a seguir para clasificar las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $m \neq 0$, utilizando la clasificación de las álgebras de dimensión $n - m$. Posteriormente, aplicaremos el procedimiento obtenido al caso particular de las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$, para ello nos apoyaremos en la clasificación de las álgebras de dimensión dos. Finalmente, extraeremos la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión tres de la clasificación obtenida.

Este capítulo es una versión extendida de los artículos [43] y [44].

2.1. Fundamentos del procedimiento

Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión $n - m$ sobre un cuerpo k y sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión m sobre el mismo cuerpo. Tomemos una aplicación bilineal $\theta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ y consideramos la álgebra \mathbb{A}_θ , definida por el espacio vectorial $\mathbb{A} \oplus \mathbb{V}$, junto con la multiplicación $\bullet_{\mathbb{A}_\theta} : (\mathbb{A} \oplus \mathbb{V}) \times (\mathbb{A} \oplus \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{A} \oplus \mathbb{V}$ dada por:

$$(x + x') \bullet_{\mathbb{A}_\theta} (y + y') = x \bullet_{\mathbb{A}} y + \theta(x, y), \text{ para cualquier } x, y \in \mathbb{A} \text{ y } x', y' \in \mathbb{V}.$$

En primer lugar, observamos que se trata de una álgebra de dimensión n . También, observamos que \mathbb{V} es un subespacio del anulador de la nueva álgebra \mathbb{A}_θ . Además, si denotamos por $Rad(\theta)$ al subespacio vectorial de \mathbb{A} formado por los elementos $x \in \mathbb{A}$ tales que $\theta(x, \mathbb{A}) + \theta(\mathbb{A}, x) = 0$ (al que llamaremos el radical de θ), podemos probar fácilmente el siguiente resultado con respecto al anulador de \mathbb{A}_θ .

Lema 2.1. *Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial. Dada una aplicación bilineal $\theta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$, entonces*

$$Ann(\mathbb{A}_\theta) = (Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A})) \oplus \mathbb{V}.$$

Puesto que acudiremos recurrentemente a aplicaciones bilineales, denotaremos al conjunto de todas las aplicaciones bilineales definidas de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$ en \mathbb{V} como $Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Además, cuando el contexto lo permita, denotaremos la multiplicación de \mathbb{A} como \bullet (en lugar de $\bullet_{\mathbb{A}}$) y la de \mathbb{A}_θ como \bullet_θ (en lugar de $\bullet_{\mathbb{A}_\theta}$).

El motivo por el que hemos considerado esta construcción se pone de manifiesto en el siguiente resultado, que será fundamental para introducir el algoritmo que nos permita clasificar las álgebras con anulador no nulo.

Teorema 2.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión n con anulador de dimensión $m \neq 0$. Entonces existe una única álgebra \mathbb{A}' , salvo isomorfismos, de dimensión $n - m$ y una única aplicación bilineal $\theta : \mathbb{A}' \times \mathbb{A}' \rightarrow Ann(\mathbb{A})$ con $Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}') = 0$ (que depende de \mathbb{A}'), de forma que \mathbb{A} es isomorfa a \mathbb{A}'_θ y $\mathbb{A}/Ann(\mathbb{A})$ es isomorfa a \mathbb{A}' .*

Además, si \mathbb{A}'' es una álgebra isomorfa a \mathbb{A}' , entonces existe otra aplicación bilineal $v : \mathbb{A}'' \times \mathbb{A}'' \rightarrow Ann(\mathbb{A})$ con $Rad(v) \cap Ann(\mathbb{A}'') = 0$ tal que \mathbb{A}''_v es isomorfa a \mathbb{A} .

Demostración. Tomamos un complemento lineal \mathbb{A}' de $Ann(\mathbb{A})$ en \mathbb{A} . Consideramos $\pi_{\mathbb{A}'} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ la proyección de \mathbb{A} sobre \mathbb{A}' y definimos una multiplicación $\bullet_{\mathbb{A}'}$ en \mathbb{A}' de la siguiente forma:

$$x \bullet_{\mathbb{A}'} y = \pi_{\mathbb{A}'}(x \bullet_{\mathbb{A}} y) \text{ para } x, y \in \mathbb{A}'.$$

También, consideramos $\pi_{Ann(\mathbb{A})} : \mathbb{A} \rightarrow Ann(\mathbb{A})$ la proyección de \mathbb{A} sobre $Ann(\mathbb{A})$ y definimos la aplicación bilineal $\theta : \mathbb{A}' \times \mathbb{A}' \rightarrow Ann(\mathbb{A})$ dada por:

$$\theta = \pi_{Ann(\mathbb{A})}(x \bullet_{\mathbb{A}} y) \text{ para } x, y \in \mathbb{A}'.$$

Observamos que $Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}') = 0$, ya que de existir un $x_0 \in Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}')$, entonces $x_0 \in Ann(\mathbb{A})$, lo cual contradice el hecho de que x_0 pertenece a su complemento lineal \mathbb{A}' .

También, para $x, y \in \mathbb{A}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{A}'}(x \bullet_{\mathbb{A}} y) &= \pi_{\mathbb{A}'}((\pi_{\mathbb{A}'}(x) + \pi_{Ann(\mathbb{A})}(x)) \bullet_{\mathbb{A}} (\pi_{\mathbb{A}'}(y) + \pi_{Ann(\mathbb{A})}(y))) = \\ &= \pi_{\mathbb{A}'}(\pi_{\mathbb{A}'}(x) \bullet_{\mathbb{A}} \pi_{\mathbb{A}'}(y)) = \pi_{\mathbb{A}'}(x) \bullet_{\mathbb{A}'} \pi_{\mathbb{A}'}(y). \end{aligned}$$

Por lo que la proyección $\pi_{\mathbb{A}'}$ es un homomorfismo entre las álgebras \mathbb{A} y \mathbb{A}' . Como $Ker(\pi_{\mathbb{A}'}) = Ann(\mathbb{A})$, entonces el cociente $\mathbb{A}/Ann(\mathbb{A})$ es isomorfo a \mathbb{A}' . Además, de aquí se deduce la unicidad salvo isomorfismos de \mathbb{A}' , ya que de haber otra álgebra \mathbb{A}'' en las mismas condiciones debe ser isomorfa a $\mathbb{A}/Ann(\mathbb{A})$.

Por otra parte, por definición de la álgebra \mathbb{A}' y de la aplicación bilineal θ , tenemos que $\mathbb{A}'_{\theta} = \mathbb{A}$ y por tanto son trivialmente isomorfas.

Para probar la segunda parte del teorema, denotamos por $\varphi : \mathbb{A}'' \rightarrow \mathbb{A}'$ al isomorfismo entre estas dos álgebras y definimos $\nu : \mathbb{A}'' \times \mathbb{A}'' \rightarrow Ann(\mathbb{A})$ como $\nu(x, y) := \theta(\varphi(x), \varphi(y))$, para $x, y \in \mathbb{A}''$. Basta observar que $Rad(\nu) \cap Ann(\mathbb{A}') = 0$.

Ahora, definimos la aplicación $\phi : \mathbb{A}'' \oplus Ann(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{A}' \oplus Ann(\mathbb{A})$ tal que $\phi|_{\mathbb{A}''} = \varphi$ y $\phi|_{Ann(\mathbb{A})} = Id$. Claramente es biyectiva, veamos que se trata de un isomorfismo. Para $x_1, x_2 \in \mathbb{A}''$ y $v_1, v_2 \in Ann(\mathbb{A})$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi((x_1 + v_1) \bullet_{\mathbb{A}''} (x_2 + v_2)) &= \phi(x_1 \bullet_{\mathbb{A}''} x_2) + \nu(x_1, x_2) = \\ &= \varphi(x_1 \bullet_{\mathbb{A}''} x_2) + \theta(\varphi(x_1), \varphi(x_2)). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \phi(x_1 + v_1) \bullet_{\mathbb{A}'_{\theta}} \phi(x_2 + v_2) &= (\varphi(x_1) + v_1) \bullet_{\mathbb{A}'_{\theta}} (\varphi(x_2) + v_2) = \\ &= \varphi(x_1) \bullet_{\mathbb{A}'} \varphi(x_2) + \theta(\varphi(x_1), \varphi(x_2)). \end{aligned}$$

Como φ es un isomorfismo, concluimos que ϕ también es un isomorfismo y puesto que \mathbb{A}'_θ es isomorfa a \mathbb{A} , por transitividad, \mathbb{A}''_ν es isomorfa a \mathbb{A} . \square

Antes de examinar las consecuencias de este resultado, veamos un ejemplo para fijar algunos conceptos.

Ejemplo 2.1. Tomemos la álgebra de dimensión dos

$$\mathbb{A}_2 : e_1e_1 = e_2 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 \quad e_2e_2 = 0$$

junto con un espacio \mathbb{V} generado por la base $\{e_3, e_4\}$. Denotemos por $\theta : \mathbb{A}_2 \times \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{V}$ a una aplicación bilineal con $\theta(e_i, e_j) = \theta_{ij}^3 e_3 + \theta_{ij}^4 e_4$, para $1 \leq i, j \leq 2$ y donde $\theta_{ij}^k \in \mathbf{k}$.

La álgebra $(\mathbb{A}_2)_\theta$ es la álgebra de dimensión cuatro generado por la base $\{e_1, \dots, e_4\}$ con multiplicación:

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}_2)_\theta : e_1e_1 &= e_2 + \theta_{11}^3 e_3 + \theta_{11}^4 e_4 & e_1e_2 &= e_2 + \theta_{12}^3 e_3 + \theta_{12}^4 e_4 \\ e_2e_1 &= -e_2 + \theta_{21}^3 e_3 + \theta_{21}^4 e_4 & e_2e_2 &= \theta_{22}^3 e_3 + \theta_{22}^4 e_4 \end{aligned}$$

Puesto que $\text{Ann}(\mathbb{A}_2) = 0$, tenemos que $\text{Ann}((\mathbb{A}_2)_\theta) = \mathbb{V}$. Además, la álgebra cociente $(\mathbb{A}_2)_\theta / \mathbb{V}$ es isomorfa a \mathbb{A}_2 . Estas dos condiciones, hacen de $(\mathbb{A}_2)_\theta$ una extensión por anulador de la álgebra \mathbb{A}_2 por el espacio vectorial \mathbb{V} , que definiremos a continuación.

Definición 2.1. Sean \mathbb{A}' una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial. Una extensión por anulador de la álgebra \mathbb{A}' por \mathbb{V} es una álgebra \mathbb{A} tal que $\text{Ann}(\mathbb{A}) = \mathbb{V}$ y \mathbb{A} / \mathbb{V} es isomorfa a \mathbb{A}' .

Equivalentemente, algunos autores simplemente escriben que una extensión por anulador de la álgebra \mathbb{A}' por \mathbb{V} es una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}' \rightarrow 0$$

donde el anulador de la álgebra \mathbb{A} es \mathbb{V} .

Observación 2.1. Toda construcción de la forma \mathbb{A}_θ , donde $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ tal que $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$, es una extensión por anulador de la álgebra \mathbb{A} por \mathbb{V} .

Recíprocamente, si $\hat{\mathbb{A}}$ es una extensión por anulador de \mathbb{A} por \mathbb{V} , entonces, por el Teorema 2.1, existe una única álgebra \mathbb{A}' , salvo isomorfismos, y una aplicación $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}', \mathbb{V})$

con $Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}') = 0$ tal que $\mathbb{A}'_\theta \cong \hat{\mathbb{A}}$ y $\mathbb{A}' \cong \hat{\mathbb{A}}/\mathbb{V} \cong \mathbb{A}$. Utilizando la segunda parte del teorema, tenemos que como $\mathbb{A}' \cong \mathbb{A}$, entonces existe otra aplicación $\nu \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ con $Rad(\nu) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0$ tal que $\mathbb{A}_\nu \cong \hat{\mathbb{A}}$.

El Teorema 2.1 asegura que toda álgebra con anulador no nulo puede obtenerse mediante una construcción como la que hemos descrito anteriormente: por medio de una álgebra de dimensión inferior y una aplicación bilineal. Como consecuencia de ello, si conociéramos la clasificación de las álgebras \mathbb{A} de dimensión $n - m$, el problema de clasificar las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión m no nulo se reduciría a clasificar las álgebras de la forma \mathbb{A}_θ , donde $\theta \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ con $Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0$.

Utilizando la Observación 2.1, podemos afirmar de forma análoga que toda álgebra \mathbb{A} de dimensión n con anulador de dimensión m es isomorfa a alguna extensión por anulador de una álgebra de dimensión $n - m$ por un espacio vectorial de dimensión m . Reduciendo el problema de clasificar las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión m al problema de clasificar las extensiones por anulador de cada una de las álgebras, salvo isomorfismos, de dimensión $n - m$ por un espacio vectorial de dimensión m .

Sabemos que cada aplicación $\theta \in \{\theta \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0\}$ define una única extensión por anulador de la álgebra \mathbb{A} . Sin embargo, el recíproco no es cierto. Como veremos en la próxima sección, existen otras aplicaciones $\nu \in \{\theta \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0\}$ tal que $\mathbb{A}_\nu \cong \mathbb{A}_\theta$.

Por lo tanto, nuestro objetivo será encontrar un cociente del conjunto

$$\{\theta \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : Rad(\theta) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0\}$$

sobre el que podamos establecer una correspondencia con las extensiones por anulador, salvo isomorfismos, de la álgebra \mathbb{A} por el espacio vectorial \mathbb{V} .

2.2. Construcción del Algoritmo Principal

En esta sección desarrollaremos los resultados que nos llevarán a enunciar el algoritmo de clasificación de álgebras con anulador. Con este fin, comenzamos introduciendo la aplicación δ .

Definición 2.2. Definimos la aplicación $\delta : \text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, que envía un homomorfismo $h \in \text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ a la aplicación bilineal definida como $\delta h(x, y) = h(x \bullet y)$.

Además, denotaremos por $B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ al conjunto $\delta(\text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{V}))$ y a sus elementos los llamaremos cobordes.

Observación 2.2. El conjunto de cobordes $B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un espacio vectorial.

Lema 2.2. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $\theta, \nu : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ dos aplicaciones bilineales tal que $\theta - \nu \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Entonces $\text{Ann}(\mathbb{A}_\theta) = \text{Ann}(\mathbb{A}_\nu)$ y las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas.

Demostración. En primer lugar, como $\theta - \nu \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, existe una aplicación lineal $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $\theta - \nu = \delta h$. A continuación, construimos la aplicación σ definida de la siguiente forma, para $x \in \mathbb{A}$ y $v \in \mathbb{V}$:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{A} \oplus \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{A} \oplus \mathbb{V} \\ x + v &\mapsto x + h(x) + v. \end{aligned}$$

Claramente se trata de una aplicación biyectiva, veamos si es un isomorfismo de álgebras.

Por un lado, para $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tenemos que

$$\sigma((x_1 + v_1) \bullet_\nu (x_2 + v_2)) = \sigma(x_1 \bullet x_2 + \nu(x_1, x_2)) = x_1 \bullet x_2 + h(x_1 \bullet x_2) + \nu(x_1, x_2).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\sigma(x_1 + v_1) \bullet_\theta \sigma(x_2 + v_2) = (x_1 + h(x_1) + v_1) \bullet_\theta (x_2 + h(x_2) + v_2) = x_1 \bullet x_2 + \theta(x_1, x_2).$$

Como $\theta(x_1, x_2) = \nu(x_1, x_2) + h(x_1 \bullet x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, concluimos que σ es un isomorfismo de álgebras y por tanto las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas.

Además, $\nu(x_1, x_2) = x_1 \bullet x_2 = 0$ si y solo si $\theta(x_1, x_2) = x_1 \bullet x_2 = 0$ y por tanto, $Ann(\mathbb{A}_\theta) = Ann(\mathbb{A}_\nu)$. \square

Este resultado nos lleva a introducir el siguiente espacio cociente:

Definición 2.3. Dada \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial. Definimos el segundo espacio de cohomología de \mathbb{A} con respecto a \mathbb{V} como el espacio vectorial

$$H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V}) / B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}).$$

A los elementos de este espacio vectorial los denotaremos $[\theta] \in H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

En este punto, observamos que si conociéramos la clasificación de las álgebras \mathbb{A} de dimensión $n - m$, el problema de clasificar las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión m se reduciría a estudiar los conjuntos $\{[\theta] \in H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : Ann(\mathbb{A}) \cup Rad(\theta) = 0\}$ donde \mathbb{V} es un espacio vectorial de dimensión m . Sin embargo, todavía no tenemos suficiente información para distinguir cuando dos elementos $[\theta], [\nu] \in H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ darán lugar a dos álgebras isomorfas o no isomorfas. El siguiente resultado resolverá esta cuestión, pero antes vamos a introducir una nueva notación.

Notación 2.1. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $\theta \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ y $\phi \in Hom(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ dos aplicaciones. Entonces denotaremos por $\phi\theta \in Bil(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ a la aplicación definida por $\phi\theta(x, y) = \theta(\phi(x), \phi(y))$ para $x, y \in \mathbb{A}$.

Lema 2.3. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial. Sean $\theta, \nu : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ dos aplicaciones bilineales tal que $Ann(\mathbb{A}) \cap Rad(\theta) = Ann(\mathbb{A}) \cap Rad(\nu) = 0$. Entonces \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas si y solo si existe un automorfismo $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ y un isomorfismo lineal $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $\phi\nu - \psi\theta \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

Demostración. Supongamos que las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas y denotemos por $\Phi : \mathbb{A}_\theta \rightarrow \mathbb{A}_\nu$ a este isomorfismo. Como $Ann(\mathbb{A}) \cap Rad(\theta) = Ann(\mathbb{A}) \cap Rad(\nu) = 0$, tenemos que $\Phi(\mathbb{V}) = \Phi(Ann(\mathbb{A}_\theta)) = Ann(\mathbb{A}_\nu) = \mathbb{V}$ y entonces la aplicación lineal $\psi := \Phi|_{\mathbb{V}}$ es biyectiva.

Ahora, tomamos $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de \mathbb{A} y supongamos que $\Phi(e_i) = e'_i + v_i$, donde $e'_i \in \mathbb{A}$ y $v_i \in \mathbb{V}$. Podemos definir las aplicaciones:

$$\begin{array}{ll} \phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} & \varphi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A} \\ e_i \mapsto e'_i & e_i \mapsto v_i \end{array}$$

Para $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, tenemos que

$$\Phi(x_1 \bullet_{\theta} x_2) = \Phi(x_1 \bullet x_2 + \theta(x_1, x_2)) = \phi(x_1 \bullet x_2) + \varphi(x_1 \bullet x_2) + \psi(\theta(x_1, x_2))$$

y también que

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) \bullet_{\nu} \Phi(x_2) &= (\phi(x_1) + \varphi(x_1)) \bullet_{\nu} (\phi(x_2) + \varphi(x_2)) = \\ &= \phi(x_1) \bullet \phi(x_2) + \mu(\phi(x_1), \phi(x_2)). \end{aligned}$$

Como Φ es un isomorfismo entre las álgebras \mathbb{A}_{θ} y \mathbb{A}_{ν} , podemos igualar ambas ecuaciones. La parte en \mathbb{A} muestra que ϕ es un automorfismo de \mathbb{A} y la parte en \mathbb{V} muestra que

$$\mu(\phi(x_1), \phi(x_2)) = \varphi(x_1 \bullet x_2) + \psi(\theta(x_1, x_2)).$$

Utilizando la notación anterior, tenemos $\phi\mu - \psi\theta = \delta\varphi \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

Recíprocamente, supongamos ahora que existe un automorfismo $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ y un isomorfismo lineal $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $\phi\mu - \psi\theta \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Entonces existe un homomorfismo $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ tal que $\phi\mu - \psi\theta = \delta\varphi$ y podemos definir un isomorfismo lineal $\Phi : \mathbb{A} \oplus \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A} \oplus \mathbb{V}$ como

$$\Phi := \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}.$$

Claramente, por construcción Φ es un isomorfismo entre las álgebras \mathbb{A}_{θ} y \mathbb{A}_{ν} . \square

El Teorema 2.1 nos proporciona una vía para clasificar, salvo isomorfismos, las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión m , en el caso de que conociéramos previamente la clasificación de las álgebras de dimensión $n - m$. Esta vía se basa en dar la clasificación algebraica de las extensiones por anulador de cada una de las

álgebras \mathbb{A} de dimensión $n - m$ módulo isomorfismos por un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión m . Para dar la clasificación de las extensiones por anulador de una álgebra \mathbb{A} hemos desarrollado el siguiente procedimiento, en virtud del Lema 2.3.

Teorema 2.2. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial.

- (I) Calcular $\text{Aut}(\mathbb{A})$ y $\mathcal{P} = \{[\theta] \in H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \text{Ann}(\mathbb{A}) \cap \text{Rad}(\theta) = 0\}$.
- (II) Estudiar el cociente de \mathcal{P} por la relación: dados $[\theta], [\mu] \in \mathcal{P}$, entonces $[\theta] \sim [\mu]$ si y solo si existe un automorfismo ϕ de \mathbb{A} y un isomorfismo lineal $\psi \in \text{GL}(\mathbb{V})$ tal que $[\psi\mu] = [\phi\theta]$.
- (III) Construir las álgebras \mathbb{A}_θ donde θ es un representante de cada una de las clases de \mathcal{P}/\sim .

La clasificación algebraica de las extensiones por anulador de la álgebra \mathbb{A} por \mathbb{V} consiste en las álgebras obtenidas en el paso (III).

Sin embargo, este procedimiento no es demasiado útil en la práctica debido a que estudiar el cociente \mathcal{P}/\sim no es tarea sencilla. Por este motivo, vamos a introducir un nuevo elemento que nos ayudará a simplificar este procedimiento de manera significativa, este elemento son las coordenadas en el segundo espacio de cohomología.

2.3. Algoritmo Principal

Consideramos la álgebra \mathbb{A} , el espacio vectorial \mathbb{V} y fijamos una base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de \mathbb{V} . Para cada aplicación bilineal $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ y elementos $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$, podemos escribir

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i,$$

donde θ_i es una aplicación bilineal en $\text{Bil}(\mathbb{A}, k)$, para $i = 1, \dots, m$. Utilizando esta notación, se puede probar fácilmente la siguiente observación.

Observación 2.3. $\text{Rad}(\theta) = \text{Rad}(\theta_1) \cap \dots \cap \text{Rad}(\theta_m)$.

Además, si $\theta \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, entonces existe un homomorfismo $h \in \text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ tal que $\theta = \delta h$ y utilizando la notación por coordenadas tenemos que:

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i = \sum_{i=1}^m \delta h_i(x_1, x_2)e_i,$$

de donde $\theta_i = \delta h_i$ y por tanto $\theta_i \in B^2(\mathbb{A}, k)$, para $i = 1, \dots, m$. El recíproco puede probarse de forma análoga.

No obstante, introducir coordenadas tiene un inconveniente, por el cual es necesario introducir el concepto de componente anulador de una álgebra. En teoría de álgebras de Lie, un componente anulador de una álgebra de Lie \mathcal{L} es un ideal $\langle x \rangle$ de dimensión uno de \mathcal{L} tal que existe otro ideal \mathbb{I} cumpliendo que $\mathcal{L} = \mathbb{I} \oplus \langle x \rangle$. Como \mathcal{L} es anticonmutativa, tenemos que $x \in \text{Ann}(\mathcal{L})$ y que $\mathcal{L}^2 \subset \mathbb{I}$. Este concepto puede extenderse a álgebras arbitrarias de la siguiente forma:

Definición 2.4. *Un componente anulador de una álgebra \mathbb{A} es un ideal de dimensión uno kx de \mathbb{A} tal que $x \in \text{Ann}(\mathbb{A})$ y satisfaciendo que existe otro ideal \mathbb{I} de \mathbb{A} tal que $\mathbb{A} = \mathbb{I} \oplus kx$ y $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{I}$.*

Asimismo, si \mathbb{A} tiene un componente anulador se dirá que es split.

Ejemplo 2.2. *La álgebra*

$$\mathbb{A}_3 : e_1 e_1 = e_1 \quad e_1 e_2 = 0 \quad e_2 e_1 = 0 \quad e_2 e_2 = 0$$

tiene $\text{Ann}(\mathbb{A}_3) = \langle e_2 \rangle$ y un componente anulador, el generado por e_2 . No obstante, tener anulador no garantiza tener componente anulador como podemos comprobar en la siguiente álgebra:

$$\mathbb{A}'_3 : e_1 e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1 e_2 = 0 \quad e_2 e_1 = 0 \quad e_2 e_2 = 0$$

Observación 2.4. *Es fácil comprobar que si \mathbb{A} tiene un componente anulador kx y \mathbb{A} es isomorfa a otro álgebra \mathbb{A}' por medio del isomorfismo ϕ , entonces $k\phi(x)$ es un componente anulador de \mathbb{A}' .*

El siguiente resultado relaciona la dependencia lineal de las coordenadas de un elemento $[\theta] \in H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ con la posibilidad de que la álgebra \mathbb{A}_θ sea *split*.

Lema 2.4. *Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Sea $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ tal que $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$. Si $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i$, entonces la álgebra \mathbb{A}_θ tiene un componente anulador si y solo si el conjunto $\{[\theta_1], \dots, [\theta_m]\}$ es linealmente dependiente en $H^2(\mathbb{A}, k)$.*

Demostración. Supongamos que \mathbb{A}_θ tiene un componente anulador, es decir, existe un elemento no nulo $v_1 \in \mathbb{V}$ tal que $v_1 \in \text{Ann}(\mathbb{A}_\theta)$ y existe un ideal \mathbb{I} de \mathbb{A}_θ tal que $\mathbb{A}_\theta = \mathbb{I} \oplus \langle v_1 \rangle$ con $\mathbb{A}_\theta^2 \subset \mathbb{I}$.

Ampliamos el conjunto $\{v_1\}$ para obtener una base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{V} . Entonces existe una matriz invertible $(a_{ij})_{ij}$ tal que $e_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}v_j$ para todo $i = 1, \dots, m$. De este modo, tendremos

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2) \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}v_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)a_{ij} \right) v_j.$$

Como $\mathbb{A}_\theta^2 \subset \mathbb{I}$, tenemos que $\sum_{i=1}^m a_{i1}\theta_i(x_1, x_2) = 0$ para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$. Por tanto, $\sum_{i=1}^m a_{i1}\theta_i = 0$ y entonces $\sum_{i=1}^m a_{i1}[\theta_i] = 0$. Además, si $\{[\theta_1], \dots, [\theta_m]\}$ fuera linealmente independiente, entonces $a_{11} = \dots = a_{m1} = 0$ y $(a_{ij})_{ij}$ no sería invertible. Por lo que concluimos que el conjunto $\{[\theta_1], \dots, [\theta_m]\}$ debe ser linealmente dependiente.

Recíprocamente, supongamos que el conjunto $\{[\theta_1], \dots, [\theta_m]\}$ es linealmente dependiente en $H^2(\mathbb{A}, \mathbb{k})$. Sin perder generalidad, supongamos que $[\theta_m] = \sum_{i=1}^{m-1} a_i[\theta_i]$ para $a_i \in \mathbb{k}$.

Ahora, definimos $v(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m v_i(x_1, x_2)e_i$ tomando $v_i = \theta_i$ para $i \leq m-1$ y $v_m = \sum_{i=1}^{m-1} a_i\theta_i$. Entonces $[v] = [\theta]$ y las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_v son isomorfas. Además:

$$v(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m-1} \theta_i(x_1, x_2)(e_i + a_i e_m).$$

Si $v_i = e_i + a_i e_m$ para $i = 1, \dots, m-1$, entonces $v(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{m-1} \theta_i(x_1, x_2)v_i$. Por tanto, tenemos que $\mathbb{A}_v^2 \subset \mathbb{A} \oplus \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle$ y $\langle v_m \rangle$ es un componente anulador de \mathbb{A}_v . Como \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_v son isomorfas concluimos que \mathbb{A}_θ tiene un componente anulador. \square

A continuación probamos un resultado que traslada lo obtenido en el Lema 2.3 a la notación por coordenadas. Para ello, es necesario tener en cuenta los componentes anuladores de las extensiones por anulador.

Lema 2.5. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Sean $\theta, v \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ dos aplicaciones bilineales tal que $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$ y $\text{Rad}(v) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$. Supongamos que \mathbb{A}_θ no tiene componentes anuladores. Si

$\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i$ y $\nu(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \nu_i(x_1, x_2)e_i$, entonces las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas si y solo si existe un automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ tal que el conjunto $\{[\phi\theta_1], \dots, [\phi\theta_m]\}$ genera el mismo subespacio de $H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$ que el conjunto $\{[\nu_1], \dots, [\nu_m]\}$.

Demostración. Supongamos que las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas. Por el Lema 2.3, existe un automorfismo $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ y un isomorfismo lineal $\psi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $\phi\nu - \psi\theta \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Si $\psi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}e_j$, entonces

$$(\phi\nu - \psi\theta)(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^m (\phi\nu_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\theta_i)(x_1, x_2)e_j$$

y $\phi\nu_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\theta_i \in B^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$ para $j = 1, \dots, m$.

Por tanto, tenemos que $[\phi\nu_j] = \sum_{i=1}^m a_{ij}[\theta_i]$ para $j = 1, \dots, m$ y concluimos que los conjuntos $\{[\phi\theta_1], \dots, [\phi\theta_m]\}$ y $\{[\nu_1], \dots, [\nu_m]\}$ generan el mismo subespacio de $H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$.

Recíprocamente, supongamos que $\{[\phi\theta_1], \dots, [\phi\theta_m]\}$ genera el mismo subespacio de $H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$ que $\{[\nu_1], \dots, [\nu_m]\}$ y sabemos que es de dimensión m por el Lema 2.4. Entonces existe una matriz invertible (a_{ij}) tal que $[\phi\nu_j] = \sum_{i=1}^m a_{ij}[\theta_i]$. Esto nos permite definir el isomorfismo lineal:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\ \psi(e_i) &\mapsto \sum_{j=1}^m a_{ij}e_j, \end{aligned}$$

tal que $\psi\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}\theta_i(x_1, x_2)e_j$. Entonces tenemos que

$$(\phi\nu - \psi\theta)(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^m (\phi\nu_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\theta_i)(x_1, x_2)e_j.$$

De donde, $[\phi\nu] = [\psi\theta]$ y, por el Lema 2.3, concluimos que las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas. \square

Ya tenemos un resultado análogo al Lema 2.3 con el que construir un nuevo algoritmo. A continuación, introduciremos algunos conceptos que nos servirán para enunciarlo.

Definición 2.5. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión finita. Definimos la grassmaniana de dimensión s de \mathbb{V} , la cual denotaremos como $\text{Grass}_s(\mathbb{V})$, como el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión s de \mathbb{V} .

En el siguiente ejemplo, calcularemos la grassmaniana del segundo espacio de cohomología de una álgebra con respecto a un espacio vectorial de dimensión uno, una operación que, como veremos, tendremos que realizar en repetidas ocasiones en la sección práctica de este capítulo (véase Sección 2.4).

Ejemplo 2.3. Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión n con una base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Denotaremos por $\Delta_{ij} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{k}$ a la aplicación bilineal tal que $\Delta_{ij}(e_i, e_j) = 1$ y $\Delta_{ij} = 0$ en otro caso. De este modo, el conjunto $\{\Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ es una base de $\text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbf{k})$.

Vamos a calcular $\text{Grass}_s(H^2(\mathbf{N}_2, \mathbf{k}))$, donde \mathbf{N}_2 es la álgebra de dimensión dos con multiplicación nula.

Por un lado, el conjunto $\{\Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2\}$ es una base de $\text{Bil}(\mathbf{N}_2, \mathbf{k})$. Por otro lado, el conjunto de cobordes $B^2(\mathbf{N}_2, \mathbf{k})$ es trivial. Luego el segundo espacio de cohomología resulta ser:

$$H^2(\mathbf{N}_2, \mathbf{k}) = \text{Bil}(\mathbf{N}_2, \mathbf{k}) / B^2(\mathbf{N}_2, \mathbf{k}) = \langle \{\Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2\} \rangle / 0 = \langle \{[\Delta_{ij}] : 1 \leq i, j \leq 2\} \rangle.$$

A continuación, estudiamos la grassmaniana de dimensión s de $H^2(\mathbf{N}_2, \mathbf{k})$ por casos.

■ Para $s = 1$. Los subespacios de dimensión uno de $H^2(\mathbf{N}_2, \mathbf{k})$ están generados por un elemento de la forma $a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}]$, donde $a, b, c, d \in \mathbf{k}$. Sin embargo, hay subespacios que se repiten, por ejemplo, $\langle [\theta_1] + b[\theta_2] \rangle = \langle r[\theta_1] + rb[\theta_2] \rangle$ para $r \in \mathbf{k}$. Para eliminar los subespacios repetidos fijamos uno de los escalares como uno, cuando sea posible. De esta forma, nos quedan los espacios vectoriales:

- $\langle [\Delta_{11}] + b[\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$, donde $b, c, d \in \mathbf{k}$.
- $\langle [\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$, donde $c, d \in \mathbf{k}$.
- $\langle [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$, donde $d \in \mathbf{k}$.
- $\langle [\Delta_{22}] \rangle$.

- Para $s = 2$. En el caso de los espacios de dimensión mayor que uno, además de fijar un escalar de uno de los vectores como uno, utilizamos ese vector para hacer ceros en el resto de vectores de la base. Procediendo de esta forma, obtenemos los espacios vectoriales:
 - $\langle [\Delta_{11}] + c_1[\Delta_{21}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + c_2[\Delta_{21}] + d_2[\Delta_{22}] \rangle$, donde $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + d_2[\Delta_{22}] \rangle$, donde $b_1, d_1, d_2 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}] + c_1[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $b_1, c_1 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{12}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + d_2[\Delta_{22}] \rangle$, donde $d_1, d_2 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{12}] + c_1[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $c_1 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.
- Para $s = 3$. Tenemos los espacios vectoriales:
 - $\langle [\Delta_{11}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + d_2[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + d_3[\Delta_{22}] \rangle$, donde $d_1, d_2, d_3 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{11}] + c_1[\Delta_{21}], [\Delta_{12}] + c_2[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $c_1, c_2 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $b_1 \in \mathbf{k}$.
 - $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.
- Para $s = 4$. El único subespacio de dimensión cuatro es $H^2(N_2, \mathbf{k})$.

Es fácil comprobar que están todos los subespacios de cada dimensión.

Definición 2.6. Sea \mathbb{A} una álgebra. Para cada $1 \leq s \leq \dim(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$ definimos el conjunto:

$$T_s(\mathbb{A}) = \{ \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in \text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})) : (\cap_{i=1}^s \text{Rad}(\theta_i)) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0 \},$$

donde $\text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$ es la grassmaniana de subespacios de dimensión s en $H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$.

Observación 2.5. Los elementos del conjunto $T_s(\mathbb{A})$ son subespacios $\langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle$ de dimensión s de $H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$. Por el Lema 2.4, tenemos que si definimos la aplicación bilineal $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ como $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^s \theta_i(x_1, x_2)e_i$ (donde \mathbb{V} es un espacio vectorial de dimensión s con una base $\{e_1, \dots, e_s\}$), entonces \mathbb{A}_θ no tiene componentes anuladores. Mas aún, la aplicación θ está en las condiciones del Lema 2.5.

Definición 2.7. Una acción de un grupo $(G, *)$ sobre un conjunto X es una aplicación $-\cdot- : G \times X \rightarrow X$ tal que

- $(g * h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para $g, h \in G$ y $x \in X$.
- $1 \cdot x = x$, donde 1 es el elemento neutro del grupo G .

En tal caso se dirá que el grupo G actúa sobre el conjunto X a través de la aplicación $-\cdot-$.

Además, la acción $-\cdot-$ se llamará estable en un subconjunto $S \subset X$ si $G \cdot S \subset S$.

Observación 2.6. Para cada espacio $W = \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in \text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$ y cada automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ podemos definir la aplicación

$$-\cdot- : \text{Aut}(\mathbb{A}) \times \text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})) \rightarrow \text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$$

$$\phi \cdot W = \phi \cdot \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \mapsto \langle [\phi\theta_1], \dots, [\phi\theta_s] \rangle$$

Veamos que se trata de una acción.

- Por un lado, para $\phi_1, \phi_2 \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ tenemos que

$$(\phi_1 \circ \phi_2) \cdot W = \langle [(\phi_1 \circ \phi_2)\theta_1], \dots, [(\phi_1 \circ \phi_2)\theta_s] \rangle =$$

$$= \langle [\phi_1(\phi_2\theta_1)], \dots, [\phi_1(\phi_2\theta_s)] \rangle = \phi_1 \cdot (\phi_2 \cdot W).$$

- Por otro lado, $I \cdot W = \langle [I\theta_1], \dots, [I\theta_s] \rangle = \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle$, donde I denota la identidad.

Efectivamente, se trata de una acción. A partir de ahora, denotaremos $\phi \cdot W$ como ϕW .

Lema 2.6. Dada una álgebra \mathbb{A} , el conjunto $T_s(\mathbb{A})$ es estable bajo la acción de $\text{Aut}(\mathbb{A})$.

Demostración. Sean $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ y $W = \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in \text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$. Como $x \in \text{Rad}(\phi\theta_i) \cap \text{Ann}(\mathbb{A})$ si y solo si $\phi(x) \in \text{Rad}(\theta_i) \cap \text{Ann}(\mathbb{A})$ para $i = 1, \dots, s$, entonces:

$$(\cap_{i=1}^s \text{Rad}(\phi\theta_i)) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0 \text{ si y solo si } (\cap_{i=1}^s \text{Rad}(\theta_i)) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}).$$

Luego $W \in T_s(\mathbb{A})$ si y solo si $\phi W \in T_s(\mathbb{A})$. □

Definición 2.8. Sea G un grupo que actúa sobre el conjunto X a través de la acción $-\cdot-$. La G -órbita de un elemento $x \in X$ es el conjunto:

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Observación 2.7. La acción $-\cdot-$ de un grupo G sobre un conjunto X define una relación de equivalencia para dos elementos $x, y \in X$:

$$x \sim y \text{ si y solo si existe un elemento } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$

Las órbitas son las clases de equivalencia de X módulo esta relación. De forma que podemos escribir:

$$x \sim y \text{ si y solo si } G \cdot x = G \cdot y.$$

Para finalizar, definimos el conjunto de álgebras sin componente anulador que son extensiones por anulador de una álgebra \mathbb{A} por un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión s , en virtud del Lema 2.2 y del Lema 2.4, de la siguiente forma:

Definición 2.9. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_s\}$. El conjunto de extensiones por anulador no split de \mathbb{A} por \mathbb{V} es el conjunto:

$$E(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \left\{ \mathbb{A}_\theta : \text{si } \theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^s \theta_i(x_1, x_2) e_i \text{ entonces } \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in T_s(\mathbb{A}) \right\}.$$

Utilizando estos nuevos conceptos, podemos escribir el Lema 2.5 de la siguiente forma:

Teorema 2.3. Sean \mathbb{A} una álgebra y \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Consideramos dos extensiones por anulador $\mathbb{A}_\theta, \mathbb{A}_\nu \in E(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Si $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2) e_i$ y $\nu(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \nu_i(x_1, x_2) e_i$, entonces

$$\mathbb{A}_\theta \cong \mathbb{A}_\nu \text{ si y solo si } \text{Aut}(\mathbb{A}) \langle [\theta_1], \dots, [\theta_m] \rangle = \text{Aut}(\mathbb{A}) \langle [\nu_1], \dots, [\nu_m] \rangle.$$

Este resultado establece una correspondencia biyectiva entre las órbitas de $T_s(\mathbb{A})$ por la acción de $\text{Aut}(\mathbb{A})$ y las extensiones por anulador no split de \mathbb{A} por un espacio vectorial de dimensión s módulo isomorfismos. Esta correspondencia es la siguiente:

- Por un lado, para cada órbita $Aut(\mathbb{A})\langle[\theta_1], \dots, [\theta_m]\rangle$, podemos tomar la aplicación bilineal $\theta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i$, donde \mathbb{V} es un espacio vectorial de dimensión s con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$, para construir la álgebra \mathbb{A}_θ .
- Por otro lado, para cada extensión por anulador no *split* \mathbb{A}_θ , podemos considerar las coordenadas $\theta_1, \dots, \theta_m : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{k}$ de la aplicación $\theta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{V}$ en una base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de \mathbb{V} . De esta forma, a la álgebra \mathbb{A}_θ le hacemos corresponder la órbita $Aut(\mathbb{A})\langle[\theta_1], \dots, [\theta_m]\rangle$.

Esta correspondencia nos permite enunciar un nuevo procedimiento para clasificar algebraicamente las extensiones por anulador no *split* de una álgebra \mathbb{A} de dimensión $n - m$ por un espacio vectorial de dimensión m .

Teorema 2.4 (Algoritmo Principal). *Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión $n - m$, en donde $1 \leq m \leq \dim(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$.*

- (I) *Calculamos $Aut(\mathbb{A})$, $H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$ y $Ann(\mathbb{A})$.*
- (II) *Determinamos el conjunto de $Aut(\mathbb{A})$ -órbitas en $T_m(\mathbb{A})$.*
- (III) *Para cada órbita, construimos la álgebra correspondiente a un representante de ella.*

*La clasificación algebraica de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra \mathbb{A} por un espacio vectorial de dimensión m consiste en las álgebras obtenidas en el paso (III).*

Este resultado culmina la parte teórica de este capítulo. No obstante, dado que para aplicar el Algoritmo Principal 2.4 necesitaremos calcular el segundo espacio de cohomología de varias álgebras, hemos desarrollado un resultado que facilitará esta tarea. Dada una álgebra \mathbb{A} , el siguiente lema proporciona un método para obtener una base de $B^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$.

Lema 2.7. *Sea \mathbb{A} una álgebra y sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base de \mathbb{A}^2 (el espacio vectorial formado por los elementos $\{x \bullet y : x, y \in \mathbb{A}\}$). Entonces $\{\delta e_1^*, \dots, \delta e_m^*\}$ es una base de $B^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$.*

Donde e_i^ denota la aplicación lineal de \mathbb{A} en \mathbf{k} tal que $e_i^*(e_j) = 1$ si $i = j$ y $e_i^*(e_j) = 0$ en caso contrario.*

Demostración. Extendemos la base $\{e_1, \dots, e_m\}$ a una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{A} . El conjunto $\{e_i^*\}_{i \leq n}$ es una base de $\text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbf{k})$. Entonces para todo $\delta h \in B^2(\mathbb{U}, \mathbf{k})$ podemos escribir $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$ para algún $\alpha_i \in \mathbf{k}$ y por tanto:

$$\delta h(e_l, e_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* e_l \bullet e_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \left(\sum_{j=1}^m \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^* e_l \bullet e_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta e_i^*(e_l, e_k).$$

Luego, $B^2(\mathbb{U} \times \mathbb{A}, \mathbf{k}) = \langle \{\delta e_1^*, \dots, \delta e_m^*\} \rangle$. Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{k}$ tal que $\sum_{i=1}^m \alpha_i \delta e_i^* = 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \delta e_i^*(\mathbb{A}, \mathbb{A}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^*(\mathbb{A}^2) = 0.$$

Como $\{e_i^*\}_{i \leq m}$ es una base de $\text{Hom}(\mathbb{A}^2, \mathbf{k})$ entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$. Por lo que concluimos que $\{\delta e_1^*, \dots, \delta e_m^*\}$ es una base de $B^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$. \square

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.1. $\dim(H^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})) = \dim(\mathbb{A})^2 - \dim(\mathbb{A}^2)$.

La siguiente observación, consecuencia del Lema 2.7 y del Teorema 2.4, acerca de las extensiones por anulador de una álgebra con respecto a las de su álgebra opuesta reducirá el número de casos a estudiar en algunas ocasiones puntuales.

Observación 2.8. Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión n . Si $\{\mathbb{A}_{k,i} : i \in I\}$ es el conjunto de extensiones por anulador de \mathbb{A} módulo isomorfismos. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre $\{\mathbb{A}_{k,i} : i \in I\}$ y $\{(\mathbb{A}^{op})_{k,i} : i \in J\}$.

En la próxima sección aplicaremos el método que hemos descrito a un problema de clasificación de álgebras con anulador no nulo.

2.4. Aplicación: clasificación de las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$

En esta sección aplicaremos el procedimiento que hemos presentado previamente al problema de clasificar, salvo isomorfismos, las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$. Recordamos que el Teorema 2.1 garantiza que las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$ pueden obtenerse como extensiones por anulador de las álgebras de dimensión dos. A su vez, la clasificación algebraica

de las extensiones por anulador no *split* de una álgebra de dimensión dos la podemos obtener utilizando el Algoritmo Principal 2.4.

El artículo [1] de Kaygorodov y Volkov estudia precisamente el problema de la clasificación de las álgebras de dimensión dos. En el Apéndice A, hemos resumido esta clasificación, incluyendo toda la información que emplearemos en esta memoria.

Así, el objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado.

Teorema 2.5 (Teorema principal). *Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_6\}$ una base y sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$.*

- *Si $n = 3$, entonces \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí. O bien, \mathbb{A} es isomorfa a $(A' \oplus \mathbf{k})$, donde A' es una álgebra de dimensión dos con anulador cero (véase Tabla A.1 y Observación A.1); o es isomorfa a A_i para algún $i = 1, \dots, 68$ (véase Tabla C.1).*
- *Si $n = 4$, entonces \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí. O bien, \mathbb{A} es isomorfa a $(A' \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k})$, donde A' es una álgebra de dimensión dos con anulador cero; o bien, es isomorfa a $A_i \oplus \mathbf{k}$ para algún $i = 1, \dots, 68$; o es isomorfa a A_i para algún $i = 69, \dots, 122$, (véase Tabla C.4).*
- *Si $n = 5$, entonces \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí. O bien, \mathbb{A} es isomorfa a $(A' \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k})$, donde A' es una álgebra de dimensión dos con anulador cero; o bien, es isomorfa a $(A_i \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k})$ para algún $i = 1, \dots, 68$; o bien, es isomorfa a A_i para algún $i = 69, \dots, 122$; o es isomorfa a $(A_i = (\mathbb{V}))$ para algún $i = 123, \dots, 134$ (véase Tabla C.6).*
- *Si $n = 6$, entonces \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí. O bien, \mathbb{A} es isomorfa a $(A' \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k})$, donde A' es una álgebra de dimensión dos con anulador cero; o bien, es isomorfa a $(A_i \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k})$ para algún $i = 1, \dots, 68$; o bien, es isomorfa a $(A_i \oplus \mathbf{k} \oplus \mathbf{k})$ para algún $i = 69, \dots, 122$; o bien, es isomorfa a $A_i \oplus \mathbf{k}$ para algún $i = 123, \dots, 134$; o es isomorfa a la álgebra:*

$$A_{135} : (N_2)_{6,14} : e_1e_1 = e_3 \quad e_1e_2 = e_4 \quad e_2e_1 = e_5 \quad e_2e_2 = e_6$$

- *Si $n \geq 7$ entonces \mathbb{A} tiene al menos $(n - 6)$ componentes anuladores.*

Para su demostración, vamos a considerar las álgebras de dimensión dos descritos en el Apéndice A. Para cada una de estas álgebras seguiremos los pasos que se indican en el Teorema 2.4, con el fin de obtener la clasificación algebraica de sus extensiones por anulador no *split*. A continuación, estudiaremos la clasificación de las álgebras *split* de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$. Finalmente, utilizando el Teorema 2.1, la clasificación de las extensiones por anulador no *split* y la clasificación de las álgebras *split* nos dará la clasificación de las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$.

2.4.1. Álgebras $A_1(\alpha)$, con $\alpha \in k$

Antes de comenzar, observamos que la álgebra $A_1(0)$ es equivalente a la álgebra opuesta de $A_1(1)$. Por la Observación 2.8, solo estudiaremos las extensiones por anulador no *split* de las álgebras $A_1(\alpha)$ con $\alpha \neq 0$. A partir de aquí, aplicaremos el método que hemos desarrollado previamente.

1. En primer lugar, comenzamos calculando $H^2(A_1(\alpha), k)$ y $T_s(A_1(\alpha))$. En virtud del Lema 2.7, tenemos que $\delta e_1^* = \Delta_{11}$ y $\delta e_2^* = \Delta_{11} + \alpha\Delta_{12} + (1 - \alpha)\Delta_{21}$ forman una base del espacio de cobordes:

$$B^2(A_1(\alpha), k) = \langle \delta e_1^*, \delta e_2^* \rangle = \langle \Delta_{11}, \Delta_{12} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \Delta_{21} \rangle.$$

De esta forma, concluimos que $\dim(H^2(A_1(\alpha), k)) = 4 - 2 = 2$ y que:

$$H^2(A_1(\alpha), k) = \langle \Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2 \rangle / \langle \Delta_{11}, \Delta_{12} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \Delta_{21} \rangle = \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle.$$

Además, como $\text{Ann}(A_1(\alpha)) = 0$, entonces $T_s(A_1(\alpha)) = \text{Grass}_s(H^2(A_1(\alpha), k))$.

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $T_s(A_1(\alpha))$ bajo la acción del grupo de automorfismos de $A_1(\alpha)$ (véase Apéndice A). Recordamos que la acción de un automorfismo (a_{ij}) sobre un espacio vectorial $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_s \rangle$ lo envía al espacio $\langle (a_{ij})^t \gamma_1(a_{ij}), \dots, (a_{ij})^t \gamma_s(a_{ij}) \rangle$. Asimismo, la acción de un automorfismo de

$A_1(\alpha)$ sobre un elemento arbitrario $a[\Delta_{21}] + b[\Delta_{22}] \in H^2(A_1(\alpha), \mathbf{k})$ lo envía a:

$$\begin{aligned} (bx^2 + ax)[\Delta_{11}] + bx[\Delta_{12}] + (bx + a)[\Delta_{21}] + b[\Delta_{22}] &= \\ &= \left(a + \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) bx \right) [\Delta_{21}] + b[\Delta_{22}]. \end{aligned}$$

★ Utilizando un argumento análogo al del Ejemplo 2.3, tenemos que:

$$T_1(A_1(\alpha)) = \{ \langle [\Delta_{21}] \rangle \} \cup \{ \langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}.$$

Por lo que estudiamos dos familias de subespacios de dimensión uno.

- Si $b = 0$, tenemos el espacio $\langle a[\Delta_{21}] \rangle$, cuya órbita es trivial, es decir, su único elemento es $\langle [\Delta_{21}] \rangle$.
- Si $b \neq 0$, si $\lambda = \frac{a}{b}$, entonces $\langle a[\Delta_{21}] + b[\Delta_{22}] \rangle = \langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$. De este modo, la órbita de $\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto de espacios:

$$\{ \langle \left(\lambda + \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) x \right) [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k} \}.$$

Esto nos lleva a diferenciar dos casos según el parámetro α de la familia de álgebras.

- ◇ Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, podemos elegir como representante de órbita a $\langle [\Delta_{22}] \rangle$, tomando $x = -\lambda \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1}$.
- ◇ Si $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos una órbita trivial, $\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, para cada elemento $\lambda \in \mathbf{k}$.

De la trivialidad de las órbitas se deduce que son disjuntas.

★ La única órbita de $T_2(A_1(\alpha))$ es la del espacio $H^2(A_1(\alpha), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, utilizando la correspondencia entre las clases de equivalencia de extensiones por anulador no *split* de $A_1(\alpha)$ y el conjunto de órbitas en $T_s(A_1(\alpha))$ bajo la acción de $Aut(A_1(\alpha))$, obtenemos las álgebras buscadas. Además, tenemos en cuenta la equivalencia entre las álgebras $A_1(0)$ y $A_1(1)^{op}$, que mencionábamos al principio, para construir sus correspondientes extensiones por anulador no *split*.

Con respecto a la notación, para designar a las extensiones por anulador no *split* de una cierta álgebra A utilizaremos dos subíndices tal que $(A)_{i,j}$. El subíndice i denotará la dimensión de la extensión, mientras que el subíndice j identificará la extensión entre las de esa dimensión.

Lema 2.8. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $A_1(\alpha)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{array}{ll}
(A_1(\alpha \neq 0))_{3,1} & : \quad e_1e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = \alpha e_2 \quad e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = 0 \\
(A_1(0))_{3,1} & : \quad e_1e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = e_3 \quad e_2e_1 = e_2 \quad e_2e_2 = 0 \\
(A_1(\alpha \neq \frac{1}{2}))_{3,2} & : \quad e_1e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = \alpha e_2 \quad e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2 \quad e_2e_2 = e_3 \\
(A_1(\frac{1}{2}))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & : \quad e_1e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = \frac{1}{2}e_2 \quad e_2e_1 = \frac{1}{2}e_2 + \lambda e_3 \quad e_2e_2 = e_3 \\
(A_1(\alpha \neq 0))_{4,3} & : \quad e_1e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = \alpha e_2 \quad e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = e_4 \\
(A_1(0))_{4,3} & : \quad e_1e_1 = e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = e_3 \quad e_2e_1 = e_2 \quad e_2e_2 = e_4
\end{array}$$

2.4.2. Álgebra A_2

1. En primer lugar, calculamos $H^2(A_2, \mathbf{k})$ y $T_s(A_2)$. Observamos que $\delta e_1^* = 0$ y $\delta e_2^* = \Delta_{11} + \Delta_{12} - \Delta_{21}$. Por el Lema 2.7, la aplicación δe_2^* forma una base de $B^2(A_2, \mathbf{k})$. Luego $\dim(H^2(A_2, \mathbf{k})) = 3$ y el segundo espacio de cohomología es:

$$H^2(A_2, \mathbf{k}) = \langle \Delta_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2 \rangle / \langle \Delta_{11} + \Delta_{12} - \Delta_{21} \rangle = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle.$$

Además, como $\text{Ann}(A_2) = 0$, entonces $T_s(A_2) = \text{Grass}_s(H^2(A_2, \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $T_s(A_2)$ por la acción del grupo $\text{Aut}(A_2)$ (véase Apéndice A).

★ La acción de un automorfismo sobre $\langle a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle \in T_1(A_2)$ lo envía al espacio vectorial:

$$\begin{aligned}
& \langle (a + bx + cx^2)[\Delta_{11}] + cx[\Delta_{12}] + (b + cx)[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle = \\
& = \langle (a + (b - c)x + cx^2)[\Delta_{11}] + (b + 2cx)[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle.
\end{aligned}$$

Asimismo, procediendo como en el Ejemplo 2.3, tenemos que:

$$T_1(\mathbf{A}_2) = \{ \langle [\Delta_{11}] \rangle \} \cup \{ \lambda \langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ \cup \{ \langle \lambda [\Delta_{11}] + \mu [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \}.$$

Por lo que tenemos que estudiar tres familias de espacios vectoriales de dimensión uno.

- Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces la órbita de $\langle a[\Delta_{11}] \rangle$ es trivial, tiene a $\langle [\Delta_{11}] \rangle$ como único elemento.
- Si $b \neq 0$ y $c = 0$, denotando $\lambda = \frac{a}{b}$, la órbita de $\langle \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] \rangle$ está formada por los espacios $\langle (\lambda + x)[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] \rangle$ donde $x \in \mathbf{k}$. Si tomamos $x = -\lambda$ obtenemos el representante $\langle [\Delta_{21}] \rangle$.
- Si $c \neq 0$, podemos denotar $\lambda = \frac{a}{c}$ y $\mu = \frac{b}{c}$. La órbita del espacio $\langle \lambda[\Delta_{11}] + \mu[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto de espacios vectoriales:

$$\{ \langle (\lambda + (\mu - 1)x + x^2)[\Delta_{11}] + (\mu + 2x)[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k} \}.$$

Sustituyendo $x = -\frac{\mu}{2}$ en la expresión anterior, tenemos el representante $\langle \lambda'[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$, donde $\lambda'(\lambda, \mu) = \lambda - \frac{(\mu-1)\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4}$. Por lo tanto, existe una órbita para cada $\lambda' \in \mathbf{k}$, ya que la imagen de λ' , como aplicación, es \mathbf{k} .

Claramente, estas órbitas son disjuntas.

- ★ La acción de un automorfismo de la álgebra \mathbf{A}_2 sobre un espacio arbitrario $\langle a_1[\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{11}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle \in T_2(\mathbf{A}_2)$ lo envía al espacio:

$$\langle (a_1 + (b_1 - c_1)x + c_1x^2)[\Delta_{11}] + (b_1 + 2c_1x)[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], \\ (a_2 + (b_2 - c_2)x + c_2x^2)[\Delta_{11}] + (b_2 + 2c_2x)[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle.$$

Vamos a estudiar cinco familias de espacios, dado que:

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{A}_2) = & \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{11}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}^* \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{21}], \mu[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k}^* \}. \end{aligned}$$

- La órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ es

$$\{ \langle [\Delta_{11}] + \frac{1}{x}[\Delta_{21}], (1+x)[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k} \} \cup \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \}.$$

- La órbita de $\langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle$ es el conjunto de espacios:

$$\begin{aligned} & \{ \langle [\Delta_{11}] + \frac{1}{x}[\Delta_{21}], (x+1 - \frac{1}{\lambda x})[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle \}, \text{ donde } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

De aquí, se deduce que hay una órbita estable para cada $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Por otra parte, para $\lambda = 0$, tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}] \rangle$.

- Los espacios $\langle [\Delta_{11}] + \lambda'[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ para $\lambda' \neq 0$ están en las órbitas del caso anterior para $\lambda = \frac{\lambda'}{1+\frac{1}{\lambda'}}$, basta tomar $x = \frac{1}{\lambda'}$ para comprobarlo. Si $\lambda' = 0$, entonces la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto $\{ \langle [\Delta_{11}], 2x[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k} \}$ y podemos elegir como representante $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$, tomando $x = 0$.
- Los espacios $\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{11}] \rangle$ con $\lambda \neq 0$ están en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$, tomando $x = \frac{\lambda}{2}$.
- Por último, los espacios $\langle [\Delta_{11}] + \lambda'[\Delta_{21}], \mu'[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ pertenecen al primer y segundo caso. Siendo más precisos, si $\mu' = 1 + \frac{1}{\lambda'}$ entonces el espacio está en la órbita del primer caso y si $\mu' \neq 1 + \frac{1}{\lambda'}$ entonces el espacio está en la órbita del segundo caso, basta tomar $\lambda = \frac{\lambda'^2}{1+\lambda'-\lambda'\mu'}$.

Ahora, observando los desarrollos de las órbitas de cada representante extraído, concluimos que se encuentran en órbitas disjuntas.

- ★ Finalmente, en $T_3(\mathbf{A}_2)$ existe una única órbita, correspondiente a $H^2(\mathbf{A}_2, \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra A_2 módulo isomorfismos, para ello utilizamos la correspondencia con las órbitas en $T_s(A_2)$ que hemos calculado previamente.

Lema 2.9. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra A_2 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{array}{ll}
(A_2)_{3,1} & : \quad e_1e_1 = e_2 + e_3 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 \quad e_2e_2 = 0 \\
(A_2)_{3,2} & : \quad e_1e_1 = e_2 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = 0 \\
(A_2)_{3,3}(\lambda \in \mathbf{k}) & : \quad e_1e_1 = e_2 + \lambda e_3 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 \quad e_2e_2 = e_3 \\
(A_2)_{4,4} & : \quad e_1e_1 = e_2 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = e_4 \\
(A_2)_{4,5}(\lambda \in \mathbf{k}) & : \quad e_1e_1 = e_2 + e_3 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 + e_4 \quad e_2e_2 = \lambda e_3 \\
(A_2)_{4,6} & : \quad e_1e_1 = e_2 + e_3 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 \quad e_2e_2 = e_4 \\
(A_2)_{5,7} & : \quad e_1e_1 = e_2 + e_3 \quad e_1e_2 = e_2 \quad e_2e_1 = -e_2 + e_4 \quad e_2e_2 = e_5
\end{array}$$

2.4.3. Álgebra A_3

1. En primer lugar, calculamos $H^2(A_3, \mathbf{k})$ y $T_s(A_3)$. Para $\delta e_1^* = 0$ y $\delta e_2^* = \Delta_{11}$, utilizando el Lema 2.7, tenemos que estas aplicaciones forman una base de $B^2(A_3, \mathbf{k})$. Por tanto, $H^2(A_3, \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Adicionalmente, pese a que $\text{Ann}(A_3) = \langle e_2 \rangle$, tenemos que $e_2 \notin \text{Rad}(\theta)$ para $[\theta] \in H^2(A_3, \mathbf{k})$ y $[\theta] \neq [0]$, por lo que $T_s(A_3) = \text{Grass}_s(H^2(A_3, \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $T_s(A_3)$ por la acción de $\text{Aut}(A_3)$ (véase Apéndice A).

- ★ La acción de un elemento de $\text{Aut}(A_3)$ sobre un espacio vectorial genérico $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle$ del conjunto $T_1(A_3)$ lo envía al espacio:

$$\langle (ax^3 + cx^2y)[\Delta_{12}] + (bx^3 + cx^2y)[\Delta_{21}] + cx^4[\Delta_{22}] \rangle.$$

Para encontrar las $\text{Aut}(A_3)$ -órbitas de $T_1(A_3)$ estudiamos los casos:

- Si $a = 0$ y $c = 0$, el espacio resultante está en la órbita trivial de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$.
- Si $a = 0$ y $c \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{b}{c}$, tenemos el espacio $\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$.
Si $\lambda \neq 0$, podemos tomar el representante de órbita $\langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$,

con $y = 0$ y $x = \lambda$. Si $\lambda = 0$, entonces podemos tomar el representante $\langle [\Delta_{22}] \rangle$, con $y = 0$ y $x = 1$.

- Si $a \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{b}{a}$ y $\mu = \frac{c}{a}$, tenemos el espacio vectorial $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle$. Si $\mu \neq 0$, entonces, tomando $x = \frac{\lambda-1}{\mu}$ y $y = \frac{1-\lambda}{\mu^2}$, tenemos el representante $\langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, del caso anterior. Si $\mu = 0$, entonces tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, para cada $\lambda \in k$.

Como el resto de órbitas son triviales, solo falta probar que las órbitas de los espacios $\langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ y $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ no coinciden. Esto se deduce del desarrollo de la órbita de $\langle [\Delta_{22}] \rangle$, que es el conjunto:

$$\{ \langle x^2y[\Delta_{12}] + x^2y[\Delta_{21}] + x^4[\Delta_{22}] \rangle : x \in k^*, y \in k \}.$$

- ★ Continuamos con el estudio de las órbitas del conjunto $T_2(\mathbf{A}_3)$. La acción de un elemento de $Aut(\mathbf{A}_3)$ sobre un espacio vectorial de dimensión dos $\langle a_1[\Delta_{12}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{12}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle$ lo envía a:

$$\begin{aligned} & \langle (a_1x^3 + c_1x^2y)[\Delta_{12}] + (b_1x^3 + c_1x^2y)[\Delta_{21}] + c_1x^4[\Delta_{22}], \\ & (a_2x^3 + c_2x^2y)[\Delta_{12}] + (b_2x^3 + c_2x^2y)[\Delta_{21}] + c_2x^4[\Delta_{22}] \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando el argumento empleado en el Ejemplo 2.3, tenemos que:

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{A}_3) = & \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in k \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in k \}. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a tener que estudiar tres familias de subespacios vectoriales.

- La órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ está formada por los espacios vectoriales $\langle [\Delta_{21}], y[\Delta_{12}] + x^2[\Delta_{22}] \rangle$, para $x \in k^*$ e $y \in k$.
- La órbita del espacio $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ depende de λ , pues su órbita está formada por $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}], y[\Delta_{12}] + y[\Delta_{21}] + x^2[\Delta_{22}] \rangle$ para $x \in k^*$ e $y \in k$. Se puede observar que, como $x \neq 0$, hay una órbita distinta con representante $\langle [\Delta_{12}] + \lambda'[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ para cada $\lambda' \in k$.

- Por último, la órbita del espacio $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle$ depende de los parámetros λ y μ .
 - ◇ Si $\lambda = 0$ y $\mu = 0$, entonces tenemos la órbita trivial del espacio $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$.
 - ◇ Si $\lambda \neq 0$ y $\mu = 0$, comprobamos que está en la órbita del espacio $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, tomando el automorfismo con $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ e $y = -\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}$.
 - ◇ Si $\mu \neq 0$, tenemos dos casos. Si $\lambda = -\mu$, entonces el espacio resultante está en la órbita de $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, basta tomar $x = \frac{1}{\mu}$ e $y = 0$. Si $\lambda \neq -\mu$, el espacio está en la órbita de $\langle [\Delta_{12}] + \lambda'[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ para cierto $\lambda' \in \mathbf{k}$, se puede comprobar tomando el automorfismo con $x = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}$ e $y = \frac{1}{\mu}$.

A la vista de los desarrollos de las órbitas de los espacios representantes escogidos, tenemos que:

- Por un lado, observamos que la órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ no contiene espacios con el vector $[\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}]$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{k}$. Luego, la órbita del espacio $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ no se interseca con la órbita del espacio $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, ni con la de $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$.
- Por otro lado, observamos que el vector $[\Delta_{12}] + [\Delta_{21}]$ no se encuentra en ningún espacio de la órbita de $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, para $\lambda \neq 1$. Ahora, si $\lambda = 1$, entonces el vector ausente en todos los espacios de la órbita de $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ es $[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}]$. De aquí, se deduce que la órbita de $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ y la de $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, para $\lambda \in \mathbf{k}$, son disjuntas.

★ Finalmente, en $T_3(A_3)$ tenemos una única órbita.

3. En tercer lugar, utilizamos la correspondencia de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra A_3 con las órbitas en $T_s(A_3)$ por la acción de $Aut(A_3)$ para obtener el siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra A_3 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$(A_3)_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
$(A_3)_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(A_3)_{3,3}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(A_3)_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(A_3)_{4,5}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$(A_3)_{4,6}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(A_3)_{4,7}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$(A_3)_{4,8}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_3 + e_4$	$e_2e_2 = e_4$
$(A_3)_{5,9}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$

2.4.4. Álgebras $A_4(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbf{k}_{\geq 0}$

1. En primer lugar, tenemos que calcular $H^2(A_4(\alpha), \mathbf{k})$ y $T_s(A_4(\alpha))$. Por el Lema 2.7, las aplicaciones:

$$\delta e_1^* = \alpha \Delta_{11} + \Delta_{12} - \Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \Delta_{11} + \alpha \Delta_{12}$$

forman una base de $B^2(A_4(\alpha), \mathbf{k})$. Por lo que $H^2(A_4(\alpha), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Además, como $\text{Ann}(A_4) = 0$, entonces $T_s(A_4(\alpha)) = \text{Grass}_s(H^2(A_4(\alpha), \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(A_4(\alpha))$ bajo la acción del grupo de automorfismos de $A_4(\alpha)$ (véase Apéndice A). Como $\text{Aut}(A_4(\alpha))$ depende del parámetro α de la familia de álgebras tenemos que distinguir dos casos.

- Si $\alpha = 0$, entonces la acción de un elemento de $\text{Aut}(A_4(\alpha))$ sobre un espacio $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{22}] \rangle$ lo envía a $\langle \pm a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{22}] \rangle$, según si tomamos la identidad o el automorfismo que envía e_1 y e_2 a $-e_1$ y e_2 , respectivamente.

★ Como $T_1(A_4(0)) = \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}$, tenemos que distinguir dos casos:

◇ Si $a = 0$, extraemos el espacio $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ como representante de órbita de este caso. Además, observamos que su órbita es trivial.

◇ Si $a \neq 0$, tenemos una órbita distinta para cada espacio vectorial $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, donde $\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0}$.

Las órbitas de los representantes que hemos extraído son disjuntas.

★ La única órbita de $T_2(A_4(0))$ es la del espacio $H^2(A_4(0), \mathbf{k})$.

- Si $\alpha \neq 0$, entonces el único automorfismo es la identidad. Por tanto concluimos que todas las órbitas de $T_s(\mathbf{A}_4(\alpha))$ son triviales. Como resultado, tenemos:

- ★ Existe una órbita trivial para cada uno de los espacios vectoriales del conjunto $T_1(\mathbf{A}_4(\alpha)) = \{\langle [\Delta_{22}] \rangle\} \cup \{\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$.
- ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{A}_4(\alpha))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{A}_4(\alpha), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra $\mathbf{A}_4(\alpha)$.

Lema 2.11. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $\mathbf{A}_4(\alpha)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{array}{ll}
(\mathbf{A}_4(\alpha))_{3,1} & : \quad e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 \quad e_2e_1 = -e_1 \quad e_2e_2 = e_3 \\
(\mathbf{A}_4(\alpha \neq 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & : \quad e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = -e_1 \quad e_2e_2 = \lambda e_3 \\
(\mathbf{A}_4(0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0}) & : \quad e_1e_1 = e_2 \quad e_1e_2 = e_1 + e_3 \quad e_2e_1 = -e_1 \quad e_2e_2 = \lambda e_3 \\
(\mathbf{A}_4(\alpha))_{4,3} & : \quad e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2 \quad e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = -e_1 \quad e_2e_2 = e_4
\end{array}$$

2.4.5. Álgebras $\mathbf{B}_1(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbf{k}$

1. En primer lugar, comenzamos calculando $H^2(\mathbf{B}_1(\alpha), \mathbf{k})$ y $T_s(\mathbf{B}_1(\alpha))$. Puesto que $\delta e_1^* = (1 - \alpha)\Delta_{12} + \alpha\Delta_{21}$ y $\delta e_2^* = \Delta_{12} - \Delta_{21}$ forman una base de $B^2(\mathbf{B}_1(\alpha), \mathbf{k})$ (como consecuencia del Lema 2.7), tenemos que:

$$H^2(\mathbf{B}_1(\alpha), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle.$$

Además, como $\text{Ann}(\mathbf{B}_1(\alpha)) = 0$, entonces $T_s(\mathbf{B}_1(\alpha)) = \text{Grass}_s(H^2(\mathbf{B}_1(\alpha), \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $T_s(\mathbf{B}_1(\alpha))$ bajo la acción de $\text{Aut}(\mathbf{B}_1(\alpha))$ (véase Apéndice A). Como el único automorfismo de $\mathbf{B}_1(\alpha)$ es la identidad tenemos que todas las órbitas de $T_s(\mathbf{B}_1(\alpha))$ son triviales.

- ★ Existe una órbita trivial para cada uno de los espacios vectoriales de $T_1(\mathbf{B}_1(\alpha)) = \{\langle [\Delta_{22}] \rangle\} \cup \{\langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$.
- ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{B}_1(\alpha))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{B}_1(\alpha), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de $\mathbf{B}_1(\alpha)$, como hemos hecho en los casos anteriores.

Lema 2.12. *Sea \mathbf{A} una extensión por anulador no *split* de la álgebra $\mathbf{B}_1(\alpha)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_1(\alpha))_{3,1} & : e_1e_1 = 0 \quad e_1e_2 = (1-\alpha)e_1 + e_2 \quad e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2 \quad e_2e_2 = e_3 \\ (\mathbf{B}_1(\alpha))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & : e_1e_1 = e_3 \quad e_1e_2 = (1-\alpha)e_1 + e_2 \quad e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2 \quad e_2e_2 = \lambda e_3 \\ (\mathbf{B}_1(\alpha))_{4,3} & : e_1e_1 = e_3 \quad e_1e_2 = (1-\alpha)e_1 + e_2 \quad e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2 \quad e_2e_2 = e_4 \end{aligned}$$

2.4.6. Álgebras $\mathbf{B}_2(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbf{k}$

Antes de comenzar, observamos que $\mathbf{B}_2(0)$ y $\mathbf{B}_2(1)^{op}$ son equivalentes. Haciendo uso de la Observación 2.8, consideraremos únicamente el caso $\alpha \neq 0$.

1. En primer lugar, calculamos $H^2(\mathbf{B}_2(\alpha), \mathbf{k})$ y $T_s(\mathbf{B}_2(\alpha))$. Dado que las aplicaciones $\delta e_1^* = (1-\alpha)\Delta_{12} + \alpha\Delta_{21}$ y $\delta e_2^* = 0$ forman una base de $B^2(\mathbf{B}_2(\alpha), \mathbf{k})$, tenemos que $H^2(\mathbf{B}_2(\alpha), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Además, como $\text{Ann}(\mathbf{B}_2(\alpha)) = 0$, entonces $T_s(\mathbf{B}_2(\alpha)) = \text{Grass}_s(H^2(\mathbf{B}_2(\alpha), \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(\mathbf{B}_2(\alpha))$ por la acción de $\text{Aut}(\mathbf{B}_2(\alpha))$ (véase Apéndice A).

★ La órbita de un espacio de la forma $\langle a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{12}] + c[\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto:

$$\{ \langle ax^2[\Delta_{11}] + bx[\Delta_{12}] + c[\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}^* \}.$$

Para estudiar las órbitas de $T_1(\mathbf{B}_2(\alpha))$, distinguimos los siguientes casos:

- Si $a = 0$ y $b = 0$, el espacio resultante $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ forma una órbita trivial.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{c}{b}$. Si $\lambda = 0$, entonces tenemos la órbita trivial del espacio $\langle [\Delta_{12}] \rangle$. Si $\lambda \neq 0$, obtenemos un único representante de órbita $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$, tomando $x = \lambda$.
- Si $a \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{b}{a}$ y $\mu = \frac{c}{a}$, y tenemos los siguientes casos.
 - ◇ Si $\lambda = 0$ y $\mu = 0$, entonces obtenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{11}] \rangle$.
 - ◇ Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 0$, entonces tenemos un único representante de órbita $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$, basta tomar $x = \sqrt{\mu}$.

◇ Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos una órbita distinta para cada espacio $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + \mu'[\Delta_{22}] \rangle$ con $\mu' \in \mathbf{k}$, tomando $x = \lambda$.

★ Por un lado, la acción de un automorfismo de la álgebra $\mathbf{B}_2(\alpha)$ sobre un espacio arbitrario $\langle a_1[\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{11}] + b_2[\Delta_{12}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle$ en $T_2(\mathbf{B}_2(\alpha))$ lo envía a:

$$\langle a_1x^2[\Delta_{11}] + b_1x[\Delta_{12}] + c_1[\Delta_{22}], a_2x^2[\Delta_{11}] + b_2x[\Delta_{12}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle.$$

Por otro lado, $T_2(\mathbf{B}_2(\alpha))$ es el conjunto de espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} & \{ \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{12}], \mu[\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

Por lo que tenemos las siguientes órbitas:

- La órbita del espacio $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$ es trivial.
- La órbita del espacio $\langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] \rangle$ depende de λ . Si $\lambda = 0$, entonces la órbita es trivial. Mientras que si $\lambda \neq 0$, existe un único representante común $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] \rangle$, tomando $x = \sqrt{\lambda}$.
- La órbita del espacio $\langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{12}], \mu[\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto $\{ \langle x^2[\Delta_{11}] + \lambda x[\Delta_{12}], \mu x[\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}^* \}$. Por tanto, si $\lambda = 0$ y $\mu = 0$, entonces obtenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$. Si $\lambda = 0$ y $\mu \neq 0$, entonces todos estos espacios están en la órbita con representante $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$, basta tomar $x = \frac{1}{\mu}$ para comprobarlo. Por último, si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos una órbita con representante $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}], \mu'[\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$ para cada $\mu' \in \mathbf{k}$, tomando $x = \lambda$.

Finalmente, nos falta ver que las órbitas de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] \rangle$, $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$ y $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}], \mu'[\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$ para $\mu' \in \mathbf{k}$ no se intersecan dos a dos. Sin embargo, esto se deduce fácilmente de la forma en la que actúa $\text{Aut}(\mathbf{B}_2(\alpha))$.

★ La única órbita de $T_3(\mathbf{B}_2(\alpha))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{B}_2(\alpha), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, utilizamos la correspondencia de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra $\mathbf{B}_2(\alpha)$ con las órbitas en $T_s(\mathbf{B}_2(\alpha))$ por la acción de su grupo

de automorfismos para obtener la clasificación, salvo isomorfismos, de sus extensiones por anulador no *split*. Para construir las extensiones por anulador no *split* de $\mathbf{B}_2(0)$ utilizamos su equivalencia con $\mathbf{B}_2(1)^{op}$, como mencionábamos al principio.

Lema 2.13. *Sea \mathbf{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $\mathbf{B}_2(\alpha)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$(\mathbf{B}_2(\alpha))_{3,1}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{B}_2(0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{3,3}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{B}_2(0))_{3,3}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{B}_2(\alpha))_{3,4}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{B}_2(\alpha))_{3,5}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{3,6}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$(\mathbf{B}_2(0))_{3,6}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{4,7}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(0))_{4,7}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{4,8}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{B}_2(0))_{4,8}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{4,9}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{B}_2(0))_{4,9}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{4,10}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(0))_{4,10}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(\alpha))_{4,11}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{4,12}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \lambda e_3 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(0))_{4,12}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = \lambda e_3 + e_4$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{5,13}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_5$
$(\mathbf{B}_2(0))_{5,13}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$

2.4.7. Álgebra \mathbf{B}_3

1. En primer lugar, calculamos $H^2(\mathbf{B}_3, \mathbf{k})$ y $T_s(\mathbf{B}_3)$. Por el Lema 2.7, tenemos que las aplicaciones:

$$\delta e_1^* = 0 \text{ y } \delta e_2^* = \Delta_{12} - \Delta_{21}$$

forman una base de $B^2(\mathbf{B}_3, \mathbf{k})$. Por tanto, $H^2(\mathbf{B}_3, \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Además, como $\text{Ann}(\mathbf{B}_3) = 0$, entonces $T_s(\mathbf{B}_3) = \text{Grass}_s(H^2(\mathbf{B}_3, \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $T_s(\mathbf{B}_3)$ por la acción de $\text{Aut}(\mathbf{B}_3)$ (véase Apéndice A).

★ La acción de un automorfismo de \mathbf{B}_3 envía un espacio vectorial arbitrario $\langle a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle$ en $T_1(\mathbf{B}_3)$ al espacio:

$$\langle (a + bx + cx^2)[\Delta_{11}] + (by + 2cxy)[\Delta_{21}] + cy^2[\Delta_{22}] \rangle.$$

Por lo que tenemos que distinguir los siguientes casos:

- ◇ Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{11}] \rangle$.
- ◇ Si $b \neq 0$ y $c = 0$, denotando $\lambda = \frac{a}{b}$, tenemos el espacio $\langle \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] \rangle$, cuya órbita está formada por los espacios $\langle (\lambda + x)[\Delta_{11}] + y[\Delta_{21}] \rangle$ para $x \in \mathbf{k}$ e $y \in \mathbf{k}^*$. De aquí se tiene que todos los espacios de este caso están en la misma órbita y podemos tomar a $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ como representante, basta elegir $x = -\lambda$ e $y = 1$.
- ◇ Si $c \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{a}{c}$ y $\mu = \frac{b}{c}$. Así, la órbita del espacio resultante es el conjunto:

$$\{ \langle (\lambda + x(x + \mu))[\Delta_{11}] + y(2x + \mu)[\Delta_{21}] + y^2[\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}, y \in \mathbf{k}^* \}.$$

Por un lado, si $\lambda = \frac{\mu^2}{4}$, entonces obtenemos una única órbita con representante $\langle [\Delta_{22}] \rangle$, tomando $x = -\frac{\mu}{2}$. Por otro lado, si $\lambda \neq \frac{\mu^2}{4}$, podemos tomar el automorfismo con $x = -\frac{\mu}{2}$ y $y = \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda - \mu^2}$, lo que probaría que están en la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$.

Finalmente, falta ver que las órbitas de los espacios $\langle [\Delta_{21}] \rangle$, $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ y $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$ son disjuntas dos a dos.

- Por un lado, como la órbita de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ no tiene término en $[\Delta_{22}]$, no se interseca con las otras.
- Por otro lado, la órbita de $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto:

$$\{ \langle x^2[\Delta_{11}] + 2xy[\Delta_{21}] + y^2[\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}, y \in \mathbf{k}^* \},$$

que no contiene al espacio $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$. Luego, la órbita de $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ y la de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$ son disjuntas.

- ★ Por un lado, la acción de un automorfismo de la álgebra B_3 sobre un espacio arbitrario $\langle a_1[\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{11}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle$ lo envía a:

$$\begin{aligned} & \langle (a_1 + b_1x + c_1x^2)[\Delta_{11}] + (b_1y + 2c_1xy)[\Delta_{21}] + c_1y^2[\Delta_{22}], \\ & (a_2 + b_2x + c_2x^2)[\Delta_{11}] + (b_2y + 2c_2xy)[\Delta_{21}] + c_2y^2[\Delta_{22}] \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado, $T_2(B_3)$ es el conjunto de espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} & \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{21}], \mu[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que distinguir los siguientes casos:

- Fijamos $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ como primer representante de órbita.
- La órbita de los espacios $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$ depende de λ . Si $\lambda = 0$, tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}] \rangle$. Si $\lambda \neq 0$, entonces podemos tomar $x = 0$ e $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, dando lugar a una única órbita, la de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$.
- Para los espacios de la forma $\langle [\Delta_{11}] + \lambda[\Delta_{21}], \mu[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ con $\lambda, \mu \in \mathbf{k}$ es necesario distinguir dos casos. Si $\lambda = 0$, entonces tomando $x = -\frac{\mu}{2}$ e $y = 1$, comprobamos que tenemos una única órbita, la de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$. Si $\lambda \neq 0$, entonces si $\lambda = \frac{1}{\mu}$, el espacio está en la primera órbita, $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, tomando $x = -\frac{1}{\lambda}$. Si $\lambda \neq \frac{1}{\mu}$, el espacio está en la órbita $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$, basta tomar $x = -\frac{1}{\lambda}$ e $y = \frac{\sqrt{1-\lambda\mu}}{\lambda}$ para comprobarlo.

Veamos que las órbitas de los representantes escogidos no se intersecan.

- Por un lado, la órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto:

$$\{ \langle x[\Delta_{11}] + y[\Delta_{21}], x^2[\Delta_{11}] + 2xy[\Delta_{21}] + y^2[\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}, y \in \mathbf{k}^* \}.$$

Observamos que este conjunto no contiene espacios con el vector $[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}]$, luego no coincide con las otras dos órbitas no triviales.

- Por otro lado, la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto:

$$\{ \langle [\Delta_{11}], x^2[\Delta_{11}] + 2xy[\Delta_{21}] + y^2[\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}, y \in \mathbf{k}^* \}.$$

Este conjunto no contiene espacios con el vector $[\Delta_{21}]$. Por lo que no coincide con la órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$.

- ★ La única órbita de $T_3(\mathbf{B}_3)$ es la del espacio $H^2(\mathbf{B}_3, \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador que hemos obtenido.

Lema 2.14. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra \mathbf{B}_3 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_3)_{3,1} & : e_1e_1 = e_3 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 & e_2e_2 = 0 \\ (\mathbf{B}_3)_{3,2} & : e_1e_1 = 0 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 + e_3 & e_2e_2 = 0 \\ (\mathbf{B}_3)_{3,3} & : e_1e_1 = e_3 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 & e_2e_2 = e_3 \\ (\mathbf{B}_3)_{3,4} & : e_1e_1 = 0 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 & e_2e_2 = e_3 \\ (\mathbf{B}_3)_{4,5} & : e_1e_1 = 0 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 + e_3 & e_2e_2 = e_4 \\ (\mathbf{B}_3)_{4,6} & : e_1e_1 = e_3 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 + e_4 & e_2e_2 = e_3 \\ (\mathbf{B}_3)_{4,7} & : e_1e_1 = e_3 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 + e_4 & e_2e_2 = 0 \\ (\mathbf{B}_3)_{4,8} & : e_1e_1 = e_3 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 & e_2e_2 = e_4 \\ (\mathbf{B}_3)_{5,9} & : e_1e_1 = e_3 & e_1e_2 = e_2 & e_2e_1 = -e_2 + e_4 & e_2e_2 = e_5 \end{aligned}$$

2.4.8. Álgebras $C(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in \mathbf{k} \times \mathbf{k}_{\geq 0}$

Antes de comenzar con el estudio de esta familia de álgebras, observamos que la álgebra $C(0, \beta)$ y la álgebra $C(1, -\beta)^{op}$ son equivalentes. Luego, por la Observación 2.8, bastará con estudiar los casos en los que $\alpha \neq 0$.

1. En primer lugar, calculamos $H^2(C(\alpha, \beta), \mathbf{k})$ y $T_s(C(\alpha, \beta))$. Dado que, por el Lema 2.7, las aplicaciones:

$$\delta e_1^* = (1 - \alpha)\Delta_{12} + \alpha\Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \Delta_{11} + \beta\Delta_{12} - \beta\Delta_{21} + \Delta_{22}$$

forman una base de $B^2(\mathbf{C}(\alpha, \beta), \mathbf{k})$, tenemos que $H^2(\mathbf{C}(\alpha, \beta), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Como $\text{Ann}(\mathbf{C}(\alpha, \beta)) = 0$, entonces $T_s(\mathbf{C}(\alpha, \beta)) = \text{Grass}_s(H^2(\mathbf{C}(\alpha, \beta), \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas, por la acción de $\text{Aut}(\mathbf{C}(\alpha, \beta))$ (véase Apéndice A), de $T_s(\mathbf{C}(\alpha, \beta)) = \text{Grass}_s(H^2(\mathbf{C}(\alpha, \beta), \mathbf{k}))$. Como el grupo de automorfismos depende del parámetro β de la familia de álgebras tenemos que distinguir los siguientes casos.

- Si $\beta = 0$, entonces el grupo $\text{Aut}(\mathbf{C}(\alpha, \beta))$ consta de dos elementos: la identidad y el homomorfismo que envía e_1 y e_2 a $-e_1$ y e_2 , respectivamente.

- ★ Por un lado, la acción de un automorfismo envía un espacio vectorial genérico $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{22}] \rangle$ en $T_1(\mathbf{C}(\alpha, 0))$ al espacio $\langle \pm a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{22}] \rangle$, según que automorfismo se tome.

Por otro lado, como $T_1(\mathbf{C}(\alpha, 0)) = \langle [\Delta_{22}] \rangle \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}$, hay que distinguir dos casos.

- ◇ Si $a = 0$, tenemos una única órbita, la de $\langle [\Delta_{22}] \rangle$, que es trivial.

- ◇ Si $a \neq 0$, tenemos una órbita distinta para cada $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, donde $\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0}$.

- ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{C}(\alpha, 0))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{C}(\alpha, 0), \mathbf{k})$.

Además, es fácil ver que estas órbitas son disjuntas.

- Si $\beta \neq 0$, entonces el único automorfismo es la identidad y por tanto todas las órbitas de $T_s(\mathbf{C}(\alpha, \beta))$ son triviales. De este modo, tenemos que:

- ★ Existe una órbita trivial para cada espacio vectorial del conjunto

$$T_1(\mathbf{C}(\alpha, \beta \neq 0)) = \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}.$$

- ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{C}(\alpha, \beta))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{C}(\alpha, \beta), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, finalizamos construyendo cada una de las extensiones por anulador no *split* que se extraen del estudio anterior.

Lema 2.15. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no *split* de la álgebra $\mathbf{C}(\alpha, \beta)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$(\mathbf{C}(\alpha, \beta))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_2 + e_3$
$(\mathbf{C}(\alpha \neq 0, 0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$(\mathbf{C}(0, 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$(\mathbf{C}(\alpha \neq 0, \beta \neq 0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = -\beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$(\mathbf{C}(0, \beta \neq 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_2 + e_4$
$(\mathbf{C}(\alpha \neq 0, \beta))_{4,3}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = -\beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2 + e_4$
$(\mathbf{C}(0, \beta))_{4,3}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = -\beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2 + e_4$

2.4.9. Álgebras $D_1(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$

1. En primer lugar, calculamos $H^2(D_1(\alpha, \beta), \mathbf{k})$ y $T_s(D_1(\alpha, \beta))$. Una base de $B^2(D_1(\alpha, \beta), \mathbf{k})$ es la formada por:

$$\delta e_1^* = \Delta_{11} + (1 - \alpha)\Delta_{12} + \alpha\Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \beta\Delta_{12} - \beta\Delta_{21}.$$

Luego, el segundo espacio de cohomología dependerá de β .

- Si $\beta = 0$, entonces $H^2(D_1(\alpha, 0), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.
- Si $\beta \neq 0$, entonces $H^2(D_1(\alpha, \beta), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Además, como en cualquier caso $\text{Ann}(D_1(\alpha, \beta)) = 0$, entonces

$$T_s(D_1(\alpha, \beta)) = \text{Grass}_s(H^2(D_1(\alpha, \beta), \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(D_1(\alpha, \beta))$ por la acción del grupo de automorfismos $\text{Aut}(D_1(\alpha, \beta))$ (véase Apéndice A). Dado que este grupo depende de los parámetros α y β tenemos que distinguir nuevos casos.

- Si $\beta = 0$, entonces:
 - Si $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos:
 - ★ La órbita de un espacio arbitrario $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle$ en $T_1(D_1(\frac{1}{2}, 0))$ es el conjunto:

$$\{ \langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle, \langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] + (a + b - c)[\Delta_{22}] \rangle \}.$$

Dado que el conjunto

$$T_1(D_1(\frac{1}{2}, 0)) = \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle : (\mu, \lambda) \in \mathbf{k}^2 \},$$

vamos a distinguir los siguientes casos:

- ◇ Si $a = b = 0$, la órbita del espacio $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ es trivial.
- ◇ Si $a \neq 0$ y $b = 0$, denotando $\lambda = \frac{c}{a}$, se observa que tenemos una órbita distinta para cada espacio $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, donde $(\lambda, 0) \in \mathcal{U}$.
- ◇ Si $b \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{a}{b}$ y $\mu = \frac{c}{b}$, tenemos una órbita distinta para cada espacio vectorial $\langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle$, donde $(\mu, \lambda) \in \mathcal{U}$.

Del desarrollo de las órbitas se deduce que son disjuntas.

- ★ La órbita de un espacio vectorial arbitrario en $T_2(D_1(\frac{1}{2}, 0))$ de la forma $\langle a_1[\Delta_{12}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{12}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle$ es el conjunto:

$$\{ \langle a_1[\Delta_{12}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{12}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle, \\ \langle a_1[\Delta_{12}] + b_1[\Delta_{21}] + (a_1 + b_1 - c_1), \\ a_2[\Delta_{12}] + b_2[\Delta_{21}] + (a_2 + b_2 - c_2)[\Delta_{22}] \rangle \}.$$

Utilizando el procedimiento del Ejemplo 2.3, tenemos que el conjunto $T_2(D_1(\frac{1}{2}, 0))$ es:

$$\{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle : (\mu, \lambda) \in \mathbf{k}^2 \}.$$

Por lo que vamos a distinguir los siguientes casos:

- ◇ La órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ es trivial. Al igual que la órbita de los espacios vectoriales $\langle [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, para $\lambda \in \mathbf{k}$, que también es trivial.

◇ La órbita de los espacios $\langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle$ es

$$\begin{aligned} & \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle, \\ & \langle [\Delta_{21}] + (1 - \lambda)[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + (1 - \mu)[\Delta_{22}] \rangle \}. \end{aligned}$$

Por este motivo, tomamos los representantes de órbitas distintas

$$\langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle \text{ con } (\lambda, 0), (\mu, 0) \in \mathcal{U}.$$

A la vista del desarrollo, concluimos que son disjuntas.

- ★ La única órbita de $T_3(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0), \mathbf{k})$.
- Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, entonces el grupo de automorfismos es trivial, y por tanto todas las órbitas de $T_s(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))$ son triviales. Por tanto:
 - ★ Existe una órbita trivial para cada espacio del conjunto:

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{D}_1(\alpha, 0)) &= \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

- ★ Hay una órbita trivial para cada espacio vectorial de:

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{D}_1(\alpha, 0)) &= \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

- ★ La única órbita de $T_3(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_1(\alpha, 0), \mathbf{k})$.
- Si $\beta \neq 0$, entonces:
 - Si $\beta = 2\alpha - 1$, entonces:
 - ★ La órbita de un espacio vectorial $\langle a[\Delta_{21}] + b[\Delta_{22}] \rangle$ por la acción de $\text{Aut}(\mathbf{D}_1(\alpha, 2\alpha - 1))$ es $\{ \langle a[\Delta_{21}] + b[\Delta_{22}] \rangle, \langle a[\Delta_{21}] + (a - b)[\Delta_{22}] \rangle \}$. Como $T_1(\mathbf{D}_1(\alpha, 2\alpha - 1)) = \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}$, vamos a distinguir dos casos:
 - ◇ Si $a = 0$, la órbita del espacio resultante $\langle [\Delta_{22}] \rangle$ es trivial.
 - ◇ Si $a \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{b}{a}$, se observa que tenemos una órbita distinta para cada espacio $\langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, donde $(\lambda, 0) \in \mathcal{U}$.
 - ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{D}_1(\alpha, 2\alpha - 1))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_1(\alpha, 2\alpha - 1), \mathbf{k})$.

- Si $\beta \neq 2\alpha - 1$, el grupo de automorfismos tiene como único elemento a la identidad, y por tanto todas las órbitas de $T_s(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta))$ son triviales, esto es, coinciden con los espacios vectoriales.

★ Existe una órbita trivial para cada espacio de

$$T_1(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta)) = \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}.$$

★ La única órbita de $T_2(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos las extensiones por anulador no *split* de esta familia de álgebras y las presentamos en el siguiente lema.

Lema 2.16. *Sea A una extensión por anulador no split de la álgebra $\mathbf{D}_1(\alpha, \beta)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

■ Si $\beta = 0$,

$(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha \neq \frac{1}{2}, 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0))_{3,2}((\lambda, 0) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha \neq \frac{1}{2}, 0))_{3,3}$					
$(\lambda, \mu \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \lambda e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \mu e_3$
$(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0))_{3,3}((\mu, \lambda) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + \lambda e_3$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \mu e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))_{4,5}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))_{4,6}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha \neq \frac{1}{2}, 0))_{4,7}(\lambda, \mu \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + \mu e_4$
$(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0))_{4,7}$					
$((\lambda, 0), (\mu, 0) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + \mu e_4$
$(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))_{5,9}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_4$	$e_2e_2 = e_5$

■ Si $\beta \neq 0$,

$(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta \neq 0))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha, 2\alpha - 1 \neq 0))_{3,4}$					
$((\lambda, 0) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + (2\alpha - 1)e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - (2\alpha - 1)e_2 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta \neq 2\alpha - 1, 0))_{3,4}$					
$(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta \neq 0))_{4,5}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$

2.4.10. Álgebras $D_2(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus \mathcal{T}$

Antes de empezar el estudio, observamos que las álgebras $D_2(\alpha, 0)$ y $D_2(0, \alpha)^{op}$ son equivalentes. Utilizando la Observación 2.8, bastará con estudiar la álgebra $D_2(0, 0)$ y la familia $D_2(\alpha, \beta)$ con $\beta \neq 0$, para después construir las extensiones restantes.

1. En primer lugar, hay que determinar $H^2(D_2(\alpha, \beta), \mathbf{k})$ y $T_s(D_2(\alpha, \beta))$. Por el Lema 2.7, las aplicaciones $\delta e_1^* = \Delta_{11}$ y $\delta e_2^* = \alpha\Delta_{12} + \beta\Delta_{21}$ forman una base del espacio de cobordes. De aquí, observamos que el segundo espacio de cohomología dependerá de los parámetros α y β .

- Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces $H^2(D_2(0, 0), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.
- Si $\beta \neq 0$, entonces $H^2(D_2(\alpha, \beta), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Con respecto a $T_s(D_2(\alpha, \beta))$, por un lado, como $Ann(D_2(\alpha, \beta)) = 0$ para $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, entonces $T_s(D_2(\alpha, \beta)) = Grass_s(H^2(D_2(\alpha, \beta), \mathbf{k}))$. Por otro lado, dado que $Ann(D_2(0, 0)) = \langle e_2 \rangle$, tenemos que el vector $e_2 \notin Rad(\theta)$ para todo $[\theta] \in H^2(D_2(0, 0), \mathbf{k})$ con $[\theta] \neq [0]$, y por tanto

$$T_s(D_2(0, 0)) = Grass_s(H^2(D_2(0, 0), \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(D_2(\alpha, \beta))$ por la acción del grupo $Aut(D_2(\alpha, \beta))$ (véase Apéndice A). Dado que $H^2(D_2(\alpha, \beta), \mathbf{k})$ depende de los parámetros α y β , tenemos que distinguir dos casos:

a) Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces

- ★ Comenzamos estudiando las órbitas de $T_1(D_2(0, 0))$. La acción de un elemento de $Aut(D_2(0, 0))$ envía un espacio $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] + c[\Delta_{22}] \rangle$ en $T_1(D_2(0, 0))$ a $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] + cx[\Delta_{22}] \rangle$. Por lo que tenemos que distinguir los siguientes casos:

- ◊ Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{22}] \rangle$.
- ◊ Si $a = 0$ y $b \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{c}{b}$. Por un lado, si $\lambda = 0$, obtenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$. Por otro lado, si $\lambda \neq 0$,

tenemos una única órbita con representante $\langle [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, basta tomar $x = \frac{1}{\lambda}$.

- ◇ Si $a \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{b}{a}$ y $\mu = \frac{c}{a}$. Entonces, si $\mu = 0$, tenemos la órbita trivial del espacio $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, para cada $\lambda \in \mathbf{k}$. Mientras que si $\mu \neq 0$, tenemos una órbita diferente para cada espacio vectorial $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, donde $\lambda \in \mathbf{k}$.

La comprobación de que estos representantes están en órbitas disjuntas es inmediata.

- ★ Estudiamos las órbitas de $T_2(\mathbf{D}_2(0,0))$. La acción de un automorfismo envía $\langle a_1[\Delta_{12}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{12}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2[\Delta_{22}] \rangle$ a:

$$\langle a_1[\Delta_{12}] + b_1[\Delta_{21}] + c_1x[\Delta_{22}], a_2[\Delta_{12}] + b_2[\Delta_{21}] + c_2x[\Delta_{22}] \rangle.$$

Dado que el conjunto $T_2(\mathbf{D}_2(0,0))$ está formado por los espacios vectoriales (véase Ejemplo 2.3):

$$\begin{aligned} & \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \}, \end{aligned}$$

tenemos los siguientes casos claramente disjuntos:

- ◇ La órbita de $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ es trivial. También, la órbita de los espacios vectoriales $\langle [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, para $\lambda \in \mathbf{k}$, es trivial.
- ◇ La órbita de los espacios $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \mu[\Delta_{22}] \rangle$ es:

$$\{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda x[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \mu x[\Delta_{22}] \rangle : x \in \mathbf{k}^* \}.$$

Luego, si $\lambda = 0$, entonces en el caso en el que $\mu = 0$, tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$; mientras que si $\mu \neq 0$, entonces, tomando $x = \frac{1}{\mu}$, tenemos al representante $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ de este caso. Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos las órbitas de los espacios $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \mu'[\Delta_{22}] \rangle$ para $\mu' \in \mathbf{k}$, tomando $x = \frac{1}{\lambda}$.

- ★ La única órbita de $T_3(\mathbf{D}_2(0,0))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_2(0,0), \mathbf{k})$.

b) Si $\beta \neq 0$, la acción de un automorfismo de $D_2(\alpha, \beta)$ sobre un espacio vectorial $\langle a[\Delta_{12}] + c[\Delta_{22}] \rangle$ en $T_1(D_2(\alpha, \beta))$ lo envía a $\langle a[\Delta_{12}] + cx[\Delta_{22}] \rangle$.

- ★ Para encontrar las órbitas de $T_1(D_2(\alpha, \beta))$ distinguimos dos casos.
 - Si $a = 0$, entonces tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{22}] \rangle$.
 - Si $a \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{c}{a}$. Entonces, si $\lambda = 0$, tenemos la órbita trivial de $\langle [\Delta_{12}] \rangle$, mientras que si $\lambda \neq 0$, tomando $x = \frac{1}{\lambda}$, obtenemos el representante $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}] \rangle$.

Del desarrollo de las órbitas se deduce que son disjuntas.

- ★ La única órbita de $T_2(D_2(\alpha, \beta))$ es la del espacio $H^2(D_2(\alpha, \beta), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos las extensiones por anulador no *split* de $D_2(\alpha, \beta)$.

Lema 2.17. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $D_2(\alpha, \beta)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

- Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$,

$(D_2(0, 0))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(0, 0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(0, 0))_{3,3}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(D_2(0, 0))_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(0, 0))_{3,5}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(D_2(0, 0))_{4,8}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$(D_2(0, 0))_{4,9}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_4$
$(D_2(0, 0))_{4,10}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
$(D_2(0, 0))_{4,11}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(0, 0))_{4,12}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + e_4$
$(D_2(0, 0))_{5,14}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$

- Si $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$,

$(D_2(\alpha, \beta))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(\alpha, \beta \neq 0))_{3,6}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(\alpha, 0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(D_2(\alpha, \beta \neq 0))_{3,7}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = 0$
$(D_2(\alpha, 0))_{3,3}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(D_2(\alpha, \beta \neq 0))_{4,13}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = e_4$
$(D_2(\alpha, 0))_{4,8}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$

2.4.11. Álgebras $D_3(\alpha, \beta)$, con $(\alpha, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus \mathcal{T}$

1. En primer lugar, calculamos $H^2(D_3(\alpha, \beta), \mathbf{k})$ y $T_s(D_3(\alpha, \beta))$. Como

$$\delta e_1^* = \Delta_{11} + \Delta_{12} - \Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \alpha \Delta_{12} + \beta \Delta_{21}$$

forman una base de $B^2(D_3(\alpha, \beta), \mathbf{k})$, observamos que el segundo espacio de cohomología dependerá de los parámetros α y β .

- Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces $H^2(D_3(0, 0), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.
- Si $(0, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus (\mathcal{T} \cup \{(0, 0)\})$, entonces $H^2(D_3(0, \beta), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{22}] \rangle$.
- Si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus \mathcal{T}$ y $\alpha \neq 0$, tenemos que $H^2(D_3(\alpha, \beta), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Además, como $\text{Ann}(D_3(\alpha, \beta)) = 0$, entonces tenemos que

$$T_s(D_3(\alpha, \beta)) = \text{Grass}_s(H^2(D_3(\alpha, \beta), \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, como el único automorfismo de $D_3(\alpha, \beta)$ es la identidad (véase Apéndice A), tenemos que todas las órbitas de $T_s(D_3(\alpha, \beta))$ son triviales. Luego, para cada caso tenemos que las órbitas se corresponden con los espacios vectoriales en $T_s(D_3(\alpha, \beta))$ (obtenidos como en el Ejemplo 2.3).

- Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces:

★ Cada espacio vectorial del conjunto:

$$\begin{aligned} T_1(D_3(0, 0)) = & \{ \langle [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{12}] + \lambda [\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda [\Delta_{12}] + \mu [\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \} \end{aligned}$$

forma una órbita trivial.

★ Cada espacio vectorial del conjunto:

$$\begin{aligned} T_2(D_3(0, 0)) = & \{ \langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \lambda [\Delta_{21}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{21}] + \lambda [\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + \mu [\Delta_{22}] \rangle : \lambda, \mu \in \mathbf{k} \} \end{aligned}$$

forma una órbita trivial.

★ La única órbita de $T_3(D_3(0, 0))$ es la del espacio $H^2(D_3(0, 0), \mathbf{k})$.

- Si $(0, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus (\mathcal{T} \cup \{(0,0)\})$, entonces:
 - ★ Cada espacio de $T_1(\mathbf{D}_3(0, \beta)) = \{\langle [\Delta_{22}] \rangle\} \cup \{\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$ forma una órbita trivial.
 - ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{D}_3(0, \beta))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_3(0, \beta), \mathbf{k})$.
- Si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus \mathcal{T}$ y $\alpha \neq 0$, entonces:
 - ★ Cada espacio de $T_1(\mathbf{D}_3(\alpha, \beta)) = \{\langle [\Delta_{22}] \rangle\} \cup \{\langle [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$ forma una órbita trivial.
 - ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{D}_3(\alpha, \beta))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{D}_3(\alpha, \beta), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de la familia de álgebras $\mathbf{D}_3(\alpha, \beta)$. De nuevo, distinguiremos cada uno de los casos a la hora de enunciar el correspondiente lema.

Lema 2.18. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $\mathbf{D}_3(\alpha, \beta)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

- Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$,

$$\begin{array}{llll}
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{3,1} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 & e_2e_1 = -e_1 & e_2e_2 = e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_3 & e_2e_1 = -e_1 & e_2e_2 = \lambda e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{3,3}(\lambda, \mu \in \mathbf{k}) & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + \lambda e_3 & e_2e_1 = -e_1 + e_3 & e_2e_2 = \mu e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{4,5} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 & e_2e_1 = -e_1 + e_3 & e_2e_2 = e_4 \\
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{4,6}(\lambda \in \mathbf{k}) & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_4 & e_2e_1 = -e_1 + \lambda e_4 & e_2e_2 = e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{4,7}(\lambda, \mu \in \mathbf{k}) & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_4 & e_2e_1 = -e_1 + e_3 & e_2e_2 = \lambda e_3 + \mu e_4 \\
 (\mathbf{D}_3(0,0))_{5,9} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_3 & e_2e_1 = -e_1 + e_4 & e_2e_2 = e_5
 \end{array}$$

- Si $(0, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus (\mathcal{T} \cup \{(0,0)\})$,

$$\begin{array}{llll}
 (\mathbf{D}_3(0, \beta \neq 0))_{3,1} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 & e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 & e_2e_2 = e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(0, \beta \neq 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_3 & e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 & e_2e_2 = \lambda e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(0, \beta \neq 0))_{4,8} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_3 & e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 & e_2e_2 = e_4
 \end{array}$$

- Si $(\alpha, \beta) \in \mathbf{k}^2 \setminus \mathcal{T}$ y $\alpha \neq 0$,

$$\begin{array}{llll}
 (\mathbf{D}_3(\alpha \neq 0, \beta))_{3,1} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 & e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 & e_2e_2 = e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(\alpha \neq 0, \beta))_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k}) & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 & e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 + e_3 & e_2e_2 = \lambda e_3 \\
 (\mathbf{D}_3(\alpha \neq 0, \beta))_{4,5} & : & e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 & e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 + e_3 & e_2e_2 = e_4
 \end{array}$$

2.4.12. Álgebras $E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{V}$

1. En primer lugar, vamos a calcular $H^2(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathbf{k})$ y $T_s(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$. Tenemos que $\delta e_1^* = \Delta_{11} + \alpha\Delta_{12} + \gamma\Delta_{21}$ y $\delta e_2^* = \beta\Delta_{12} + \delta\Delta_{21} + \Delta_{22}$ forman una base del espacio de cobordes. Luego, el segundo espacio de cohomología es:

$$H^2(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathbf{k}) = \{[\Delta_{12}], [\Delta_{21}]\}.$$

Además, como $Ann(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = 0$, tenemos que

$$T_s(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = Grass_s(H^2(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ por la acción de $Aut(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ (véase Apéndice A). Como $Aut(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ depende de los parámetros α, β, γ y δ , tenemos que distinguir los siguientes casos.

- Si $\alpha = \delta$ y $\beta = \gamma$, entonces el grupo de automorfismos, o bien es equivalente al grupo simétrico S_2 , es decir, tiene dos elementos: la identidad y el homomorfismo que envía e_1 y e_2 a e_2 y e_1 , respectivamente, o bien es equivalente al grupo simétrico S_3 , que explicaremos después. En ambos casos, la órbita de un espacio vectorial $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle$ de $T_1(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ es el conjunto:

$$\{\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle, \langle b[\Delta_{12}] + a[\Delta_{21}] \rangle\}.$$

Como para S_2 la afirmación anterior está clara, veamos qué ocurre cuando $\alpha = \delta = -1$ y $\beta = \gamma = -1$. En este caso, el grupo de automorfismos está formado por los seis homomorfismos que envían e_1 y e_2 a $e_{\sigma(1)}$ y $e_{\sigma(2)}$, respectivamente, donde $\sigma \in S_3$ y $e_3 = -e_1 - e_2$. Por lo tanto, la órbita de un espacio $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle$ es el conjunto de espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} & \{\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle, \langle (a+b)[\Delta_{11}] - b[\Delta_{12}] - a[\Delta_{21}] \rangle, \\ & \langle -b[\Delta_{12}] - a[\Delta_{21}] + (a+b)[\Delta_{22}] \rangle, \langle b[\Delta_{12}] + a[\Delta_{21}] \rangle, \\ & \langle (a+b)[\Delta_{11}] - a[\Delta_{12}] - b[\Delta_{21}] \rangle, \langle -a[\Delta_{12}] - b[\Delta_{21}] + (a+b)[\Delta_{22}] \rangle\}. \end{aligned}$$

De aquí, claramente los tres primeros espacios vectoriales son el mismo, módulo los cobordes, e igual ocurre con los tres últimos espacios. Por tanto tenemos las siguientes órbitas.

★ Como $T_1(E_1(\alpha, \beta, \beta, \alpha)) = \langle [\Delta_{21}] \rangle \cup \{ \langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in k \}$, vamos a distinguir dos casos:

◇ Si $a = 0$, la órbita del espacio resultante $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ es el conjunto $\{ \langle [\Delta_{21}] \rangle, \langle [\Delta_{12}] \rangle \}$.

◇ Si $a \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{b}{a}$, claramente se observa que tenemos una órbita distinta para cada espacio vectorial $\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle$, donde $\lambda \in k_{>1}^* \cup \{1\}$.

Observamos que los representantes que hemos tomado se encuentran en órbitas disjuntas.

★ La única órbita de $T_2(E_1(\alpha, \beta, \beta, \alpha))$ es la órbita trivial del espacio $H^2(E_1(\alpha, \beta, \beta, \alpha), k)$.

■ Si $\alpha \neq \delta$ o $\beta \neq \gamma$, el grupo de automorfismos de $E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tiene como único elemento a la identidad y por lo tanto todas las órbitas de $T_s(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ son triviales. Luego:

★ Existe una órbita trivial para cada espacio del conjunto $T_1(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) = \{ \langle [\Delta_{21}] \rangle \} \cup \{ \langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in k \}$ forma una órbita trivial.

★ La única órbita del conjunto $T_2(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ es la del espacio vectorial $H^2(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta), k)$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de $E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ utilizando su correspondencia con las órbitas de $T_s(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ por la acción de $Aut(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))$, como hemos hecho en casos anteriores.

Lema 2.19. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no *split* de la álgebra $E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))_{3,1} & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
(\mathbf{E}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & \\
(\gamma \neq \beta \text{ o } \delta \neq \alpha) & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2 + \lambda e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
(\mathbf{E}_1(\alpha, \beta, \beta, \alpha))_{3,2} & \\
(\lambda \in \mathbf{k}_{>1}^* \cup \{1\}) & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \beta e_1 + \alpha e_2 + \lambda e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
(\mathbf{E}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))_{4,3} & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2 + e_4 \quad e_2e_2 = e_2
\end{aligned}$$

2.4.13. Álgebras $\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma)$, con $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{k}^3 \setminus \mathbf{k} \times \mathcal{T}$

1. En primer lugar, calculamos $H^2(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})$ y $T_s(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma))$. El Lema 2.7 asegura que una base de $B^2(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})$ es la formada por:

$$\delta e_1^* = \Delta_{11} + (1 - \alpha)\Delta_{12} + \alpha\Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \beta\Delta_{12} + \gamma\Delta_{21} + \Delta_{22}$$

Por tanto, $H^2(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$. Como $\text{Ann}(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$,

$$T_s(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma)) = \text{Grass}_s(H^2(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, como $\text{Aut}(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma))$ tiene un único elemento, el automorfismo identidad (véase Apéndice A), tenemos que:

- ★ Existe una órbita trivial para cada uno de los espacios vectoriales de $T_1(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma)) = \{ \langle [\Delta_{21}] \rangle \} \cup \{ \langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k} \}$.
- ★ La única órbita de $T_2(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma))$ es la del espacio $H^2(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos las extensiones por anulador no *split* de $\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma)$.

Los resultados los presentamos en el siguiente lema.

Lema 2.20. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no *split* de la álgebra $\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma))_{3,1} & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 \quad e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma))_{3,2} & \\
(\lambda \in \mathbf{k}) & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2 + \lambda e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
(\mathbf{E}_2(\alpha, \beta, \gamma))_{4,3} & : e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2 + e_4 \quad e_2e_2 = e_2
\end{aligned}$$

2.4.14. Álgebras $E_3(\alpha, \beta, \gamma)$, con $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{k}^2 \times \mathbf{k}_{>1}^*$

1. En primer lugar, calculamos $H^2(E_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})$ y $T_s(E_3(\alpha, \beta, \gamma))$. Por el Lema 2.7, tenemos que:

$$\delta e_1^* = \Delta_{11} + (1 - \alpha)\gamma\Delta_{12} + \alpha\gamma\Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \frac{\beta}{\gamma}\Delta_{12} + \frac{1 - \beta}{\gamma}\Delta_{21} + \Delta_{22}$$

forman una base de $B^2(E_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})$. Por tanto, el segundo espacio de cohomología es:

$$H^2(E_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle.$$

Además, como $\text{Ann}(E_3(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$, entonces

$$T_s(E_3(\alpha, \beta, \gamma)) = \text{Grass}_s(H^2(E_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(E_3(\alpha, \beta, \gamma))$ por la acción de $\text{Aut}(E_3(\alpha, \beta, \gamma))$ (véase Apéndice A). Puesto que el grupo de automorfismos depende de los parámetros de la familia de álgebras tenemos que distinguir dos casos.

- Si $\gamma = -1$ y $\alpha = \beta$, entonces el grupo de automorfismos es S_2 , es decir, tiene dos elementos: la identidad y el homomorfismo que envía e_1 y e_2 a e_2 y e_1 , respectivamente. Por tanto, la órbita de un espacio vectorial $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle$ de $T_1(E_3(\alpha, \alpha, -1))$ es el conjunto:

$$\{\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle, \langle b[\Delta_{12}] + a[\Delta_{21}] \rangle\}.$$

- ★ Como $T_1(E_3(\alpha, \alpha, -1)) = \{[\Delta_{21}]\} \cup \{\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$, vamos a distinguir dos casos:

- ◊ Si $a = 0$, la órbita del espacio resultante $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ es el conjunto $\{\langle [\Delta_{21}] \rangle, \langle [\Delta_{12}] \rangle\}$.
- ◊ Si $a \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{b}{a}$, claramente se observa que tenemos una órbita distinta para cada espacio vectorial $\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle$, donde $\lambda \in \mathbf{k}_{>1}^* \cup \{1\}$.

★ La única órbita del conjunto $T_2(E_3(\alpha, \alpha, -1))$ es la del espacio $H^2(E_3(\alpha, \alpha, -1), \mathbf{k})$.

■ Si $\beta \neq \alpha$ ó $\gamma \neq -1$, el único automorfismo de $E_3(\alpha, \beta, \gamma)$ es la identidad y por lo tanto todas las órbitas de $T_s(E_3(\alpha, \beta, \gamma))$ son triviales. Por lo que:

★ Existe una órbita trivial para cada espacio del conjunto $T_1(E_3(\alpha, \beta, \gamma)) = \{\langle [\Delta_{21}] \rangle\} \cup \{\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$.

★ La única órbita de $T_2(E_3(\alpha, \beta, \gamma))$ es la del espacio $H^2(E_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra $E_3(\alpha, \beta, \gamma)$.

Lema 2.21. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $E_3(\alpha, \beta, \gamma)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{array}{ll}
 (E_3(\alpha, \beta, \gamma))_{3,1} & : \quad e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = (1-\alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma}e_2 \quad e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma}e_2 + e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
 (E_3(\alpha, \beta, \gamma))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}) & \\
 (\beta \neq \alpha \text{ o } \gamma \neq -1) & : \quad e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = (1-\alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma}e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma}e_2 + \lambda e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
 (E_3(\alpha, \alpha, -1))_{3,2} & \\
 (\lambda \in \mathbf{k}_{>1}^* \cup \{1\}) & : \quad e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = -(1-\alpha)e_1 - \alpha e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = -\alpha e_1 - (1-\alpha)e_2 + \lambda e_3 \quad e_2e_2 = e_2 \\
 (E_3(\alpha, \beta, \gamma))_{4,3} & : \quad e_1e_1 = e_1 \quad e_1e_2 = (1-\alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma}e_2 + e_3 \quad e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma}e_2 + e_4 \quad e_2e_2 = e_2
 \end{array}$$

2.4.15. Álgebra E_4

1. En primer lugar, empezamos calculando $H^2(E_4, \mathbf{k})$ y $T_s(E_4)$. Las aplicaciones:

$$\delta e_1^* = \Delta_{11} + \Delta_{12} \text{ y } \delta e_2^* = \Delta_{12} + \Delta_{22}$$

forman una base de $B^2(E_4, \mathbf{k})$. Luego, tenemos que $H^2(E_4, \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$.

Además, como $Ann(E_4) = 0$ entonces $T_s(E_4) = Grass_s(H^2(E_4, \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, como $Aut(E_4)$ tiene como único elemento la identidad (véase Apéndice A), las órbitas en $T_s(E_4)$ son triviales.

★ Hay una órbita trivial para cada uno de los espacios vectoriales del conjunto $T_1(E_4) = \{\langle [\Delta_{21}] \rangle\} \cup \{\langle \lambda[\Delta_{21}] + [\Delta_{12}] \rangle : \lambda \in \mathbf{k}\}$.

★ La única órbita de $T_2(E_4)$ es la del espacio $H^2(E_4, \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones por anulador no *split* de la álgebra E_4 usando su correspondencia con una órbita de $T_s(E_4)$.

Lema 2.22. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no *split* de la álgebra E_4 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned} (E_4)_{3,1} & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_2 & e_2e_1 = e_3 & e_2e_2 = e_2 \\ (E_4)_{3,2}(\lambda \in k) & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_2 + e_3 & e_2e_1 = \lambda e_3 & e_2e_2 = e_2 \\ (E_4)_{4,3} & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = e_1 + e_2 + e_3 & e_2e_1 = e_4 & e_2e_2 = e_2 \end{aligned}$$

2.4.16. Álgebras $E_5(\alpha)$, con $\alpha \in k$

1. En primer lugar, calculamos $H^2(E_5(\alpha), k)$ y $T_s(E_5(\alpha))$. Por el Lema 2.7, las aplicaciones:

$$\delta e_1^* = \Delta_{11} + (1 - \alpha)\Delta_{12} + \alpha\Delta_{21} \text{ y } \delta e_2^* = \alpha\Delta_{12} + (1 - \alpha)\Delta_{21} + \Delta_{22}$$

forman una base de $B^2(E_5(\alpha), k)$. Por tanto, $H^2(E_5(\alpha), k) = \langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$.

Además, como $\text{Ann}(E_5(\alpha)) = 0$, entonces $T_s(E_5(\alpha)) = \text{Grass}_s(H^2(E_5(\alpha), k))$.

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(E_5(\alpha))$ por la acción del grupo de automorfismos $\text{Aut}(E_5(\alpha))$ (véase Apéndice A). La acción de un automorfismo de $E_5(\alpha)$ envía un vector arbitrario $a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}]$ en $H^2(E_5(\alpha), k)$ a:

$$\begin{aligned} & (y - x)(b - ax - bx + (a + b)(x + y - 1)\alpha)[\Delta_{12}] + \\ & + (x - y)(b - ay - by + (a + b)(x + y - 1)\alpha)[\Delta_{21}]. \end{aligned}$$

A partir de aquí, tenemos que distinguir dos casos:

- Si $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces:
 - ★ Para $T_1(E_5(\frac{1}{2}))$, vamos a comprobar que todo espacio vectorial $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle$ pertenece a la órbita de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$, $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ o $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] \rangle$. Si $a = 0$, entonces este espacio está en la primera órbita, así que supongamos que $a \neq 0$ y denotaremos $\lambda = \frac{b}{a}$.

◇ La órbita de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ está formada por los espacios:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2}(x-y)(x-y-1)[\Delta_{12}] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(x-y)(x-y+1)[\Delta_{21}] \right\rangle \text{ con } x, y \in \mathbf{k} \text{ y } x \neq y. \end{aligned}$$

Esta órbita contiene todos los espacios $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$ tales que $\lambda \neq \pm 1$, para comprobarlo hay que tomar $x = \frac{1-y+\lambda+y\lambda}{\lambda-1}$. Adicionalmente, se observa que $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ no está en esta órbita ya que si $\lambda = -1$ entonces habría que tomar $x = y$. También se observa que no hay solución para $\lambda = 1$.

◇ La órbita de $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ está formada por los espacios de la forma $\langle (x-y)[\Delta_{12}] + (y-x)[\Delta_{21}] \rangle$ con $x, y \in \mathbf{k}$ y $x \neq y$. Como $x \neq y$, esta órbita es trivial.

◇ La órbita de $\langle [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] \rangle$ está formada por los espacios de la forma $\langle (x-y)^2[\Delta_{12}] + (x-y)^2[\Delta_{21}] \rangle$ con $x, y \in \mathbf{k}$ y $x \neq y$. Dado que $x \neq y$, esta órbita también es trivial.

Observamos que los representantes están en órbitas disjuntas.

★ La única órbita de $T_2(E_5(\frac{1}{2}))$ es la del espacio $H^2(E_5(\frac{1}{2}), \mathbf{k})$.

■ Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, entonces:

★ Para $T_1(E_5(\alpha))$, procedemos de la misma forma: vamos a comprobar que todo espacio arbitrario $\langle a[\Delta_{12}] + b[\Delta_{21}] \rangle$ pertenece a la órbita de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ o a la de $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$. Si $a = 0$, claramente está en la órbita del primero, así que supondremos que $a \neq 0$ y denotaremos $\lambda = \frac{b}{a}$.

◇ La órbita de $\langle [\Delta_{21}] \rangle$ está formada por los espacios:

$$\begin{aligned} & \langle (y-x)(1-x+(x+y-1)\alpha)[\Delta_{12}] + \\ & (x-y)(1-y+(x+y-1)\alpha)[\Delta_{21}] \rangle \text{ con } x, y \in \mathbf{k} \text{ y } x \neq y. \end{aligned}$$

Esta órbita contiene todos los espacios vectoriales $\langle [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$ tales que $\lambda \neq -1$, basta utilizar que $x \neq y$ y tomar $x = \frac{2-\alpha(2+\lambda)}{1-2\alpha}$ e $y = \frac{1-\lambda+\alpha\lambda}{1-2\alpha}$. Además, puesto que $x \neq y$, $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ no está en esta órbita.

- ◊ La órbita de $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ está formada por los espacios vectoriales $\langle (x - y)[\Delta_{12}] + (y - x)[\Delta_{21}] \rangle$ con $x, y \in \mathbf{k}$ y $x \neq y$. Utilizando que $x \neq y$ para simplificar, concluimos que esta órbita es trivial.

De nuevo, se observa claramente que los representantes están en órbitas disjuntas.

- ★ La única órbita de $T_2(E_5(\alpha))$ es la del espacio $H^2(E_5(\alpha), \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones que hemos encontrado.

Lema 2.23. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra $E_5(\alpha)$, entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned} (E_5(\alpha))_{3,1} & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2 & e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2 + e_3 & e_2e_2 = e_2 \\ (E_5(\alpha))_{3,2} & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2 + e_3 & e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2 - e_3 & e_2e_2 = e_2 \\ (E_5(\frac{1}{2}))_{3,3} & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 & e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3 & e_2e_2 = e_2 \\ (E_5(\alpha))_{4,4} & : e_1e_1 = e_1 & e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2 + e_3 & e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2 + e_4 & e_2e_2 = e_2 \end{aligned}$$

2.4.17. Álgebra N_2

1. En primer lugar, comenzamos calculando $H^2(N_2, \mathbf{k})$ y $T_s(N_2)$. Claramente, tenemos que:

$$H^2(N_2, \mathbf{k}) = \langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle.$$

Adicionalmente, como $Ann(N_2) = \{e_1, e_2\}$, entonces para cada espacio $\langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in Grass_s(H^2(N_2, \mathbf{k}))$, $(\cap_{i=1}^s Rad(\theta_i)) \cap Ann(N_2) = \cap_{i=1}^s Rad(\theta_i)$.

De modo que:

- Para $s = 1$, si suponemos que $[\theta_1] = a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}]$, obtenemos que tiene radical no nulo si $a = \frac{c^2}{d}$ y $b = c$ con $d \neq 0$ (entonces $Rad(\theta_1) = \langle e_1 - \frac{c}{d}e_2 \rangle$) o si $b = c = d = 0$ (entonces $Rad(\theta_1) = \langle e_2 \rangle$). Luego, tenemos que $T_1(N_2)$ es el conjunto:

$$\begin{aligned} & \{ \langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle \} \cup \{ \langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle : c \neq 1 \} \cup \\ & \cup \{ \langle [\Delta_{11}] + d[\Delta_{22}] \rangle : d \neq 0 \} \cup \{ \langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle : ad \neq 1 \}. \end{aligned}$$

- Para $s = 2, 3, 4$, basta observar que dos elementos de $H^2(N_2, \mathbf{k})$ tienen el mismo radical (no nulo) si y solo si son proporcionales, y por lo tanto $\bigcap_{i=1}^s \text{Rad}(\theta_i) = 0$. Con lo que concluimos que $T_s(N_2) = \text{Grass}_s(H^2(N_2, \mathbf{k}))$.

2. En segundo lugar, estudiamos las órbitas de $T_s(N_2)$ por la acción del grupo $\text{Aut}(N_2)$ (véase Apéndice A). La acción de un automorfismo $(x_{ij}) \in \text{Aut}(N_2)$ sobre un elemento genérico $a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}]$ de $H^2(N_2, \mathbf{k})$ lo envía a:

$$\begin{aligned} & (x_{11}(ax_{11} + cx_{21}) + x_{21}(bx_{11} + dx_{21}))[\Delta_{11}] + \\ & + (x_{12}(ax_{11} + cx_{21}) + x_{22}(bx_{11} + dx_{21}))[\Delta_{12}] + \\ & + (x_{11}(ax_{12} + cx_{22}) + x_{21}(bx_{12} + dx_{22}))[\Delta_{21}] + \\ & + (x_{12}(ax_{12} + cx_{22}) + x_{22}(bx_{12} + dx_{22}))[\Delta_{22}]. \end{aligned}$$

- ★ Para $T_1(N_2)$, comprobaremos que todo espacio vectorial de la forma $\langle a[\Delta_{11}] + b[\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle \in T_1(N_2)$ pertenece a la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$, a la de $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ o a la de $\langle \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ con $\lambda \in \mathbf{k}$.

◇ La órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$ está formada por los espacios:

$$\begin{aligned} & \langle (x_{11}^2 + x_{21}^2)[\Delta_{11}] + (x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22})[\Delta_{12}] + \\ & + (x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22})[\Delta_{21}] + (x_{12}^2 + x_{22}^2)[\Delta_{22}] \rangle. \end{aligned}$$

Esta órbita contiene los espacios de $T_1(N_2)$ generados por un elemento simétrico, es decir, los espacios $\langle [\Delta_{11}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ tales que $d \neq 0$ y $\langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ con $ad \neq 1$.

- Los espacios $\langle [\Delta_{11}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ con $d \neq 0$ se obtienen tomando el automorfismo tal que $x_{11} = -1, x_{12} = 0, x_{21} = 0$ y $x_{22} = -\sqrt{d}$.
- Los espacios $\langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ con $ad \neq 1$ se obtienen tomando $x_{11} = -\sqrt{a-1}, x_{12} = -\frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{ad-1}}{a}, x_{21} = 1$ y $x_{22} = \frac{1 - \sqrt{a-1}\sqrt{ad-1}}{a}$.

Como todos los espacios de esta órbita están generados por un elemento simétrico, entonces no contiene al resto de espacios de $T_1(N_2)$.

◇ La órbita de $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$ contiene los espacios de la forma:

$$\langle (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})[\Delta_{12}] - (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})[\Delta_{21}] \rangle = \langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle.$$

Por lo que se trata de una órbita trivial.

◇ La órbita de $\langle \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ con $\lambda \in \mathbf{k}$ contiene los espacios de la forma:

$$\begin{aligned} &\langle (x_{11}(\lambda x_{11} + x_{21}) + x_{21}^2)[\Delta_{11}] + (x_{12}(\lambda x_{11} + x_{21}) + x_{21}x_{22})[\Delta_{12}] + \\ &+ (x_{11}(\lambda x_{12} + x_{22}) + x_{21}x_{22})[\Delta_{21}] + (x_{12}(\lambda x_{12} + x_{22}) + x_{22}^2)[\Delta_{22}] \rangle. \end{aligned}$$

Esto incluye los espacios de la forma $\langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ y $\langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ con $c \neq 1$, salvo a $\langle [\Delta_{12}] - [\Delta_{21}] \rangle$, cuya órbita es trivial, como hemos visto. Esta órbita no contiene espacios generados por un elemento simétrico, luego es disjunta a la del primer caso.

- Los espacios de la forma $\langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ se obtienen tomando un automorfismo tal que $x_{11} = 0$, $x_{12} = -\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_{21} = \sqrt{a}$, $x_{22} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ y $\lambda = ad$ (para $a \neq 0$) o tomándolo con $x_{11} = 1$, $x_{12} = d - 1$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 1$ y $\lambda = 0$ (en otro caso).
- Los espacios de la forma $\langle a[\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + c[\Delta_{21}] + d[\Delta_{22}] \rangle$ con $c \neq 1$ se obtienen tomando un automorfismo tal que $x_{11} = 0$, $x_{12} = -\frac{\sqrt{a(c-1)^2}}{a}$, $x_{21} = \frac{a(c-1)}{\sqrt{a(c-1)^2}}$, $x_{22} = \frac{c(c-1)}{\sqrt{a(c-1)^2}}$ y $\lambda = \frac{ad-c}{(c-1)^2}$ (si $a \neq 0$) o tomando $x_{11} = 1$, $x_{12} = d - 1$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 1$ y $\lambda = 0$ (en otro caso)

Mediante cálculos algebraicos sencillos sobre el desarrollo de la órbita de $\langle \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$, se puede comprobar que esta órbita y la de $\langle \lambda'[\Delta_{11}] + [\Delta_{21}] + [\Delta_{22}] \rangle$ son disjuntas si y solo si $\lambda \neq \lambda'$.

- ★ Estudiamos las órbitas del conjunto $T_2(N_2) = Grass_2(H^2(N_2, \mathbf{k}))$ utilizando el Ejemplo 2.3. De este modo, para cada familia de espacios vectoriales tenemos las siguientes órbitas:

- ◇ $\langle [\Delta_{11}] + c_1[\Delta_{21}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + c_2[\Delta_{21}] + d_2[\Delta_{22}] \rangle$, donde $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbf{k}$.
- Si $c_2 = 1$, tenemos los siguientes casos:
 - Si $c_1 = 0$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$ con $\lambda = 1$, si $d_1 = -\frac{d_2^2}{4}$, o en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$, en caso contrario.
 - Si $c_1 \neq 0$, está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, con $\lambda = \pm \frac{i\sqrt{4d_1 + (c_1 - d_2)^2}}{c_1}$.
 - Si $c_2 \neq 1$, tenemos los siguientes casos:
 - Si $d_1 = \frac{c_1(c_1 + (c_2 - 1)d_2)}{(c_2 - 1)^2}$, entonces está en la órbita de los espacios $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$ con $\lambda = c_2$, si $d_2 = -\frac{c_1(1 + c_2)}{c_2 - 1}$, o en la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle$, en caso contrario.
 - Si $d_1 \neq \frac{c_1(c_1 + (c_2 - 1)d_2)}{(c_2 - 1)^2}$, entonces está en la órbita de los espacios $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, con $\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0}$, si $c_2 \neq -1$ ó $d_2 \neq 0$. Si $c_2 = -1$ y $d_2 = 0$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$.
- ◇ $\langle [\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + d_2[\Delta_{22}] \rangle$, donde $b_1, d_1, d_2 \in \mathbf{k}$.
- Si $d_1 = 0$ y $b_1 = d_2$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}] \rangle$.
 - Si $d_1 = b_1(b_1 - d_2)$ y $b_1 \neq d_2$, entonces está en la órbita del espacio $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle$.
 - Si $d_1 \neq b_1(b_1 - d_2)$, está en la órbita de los espacios de la forma $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, donde $\lambda = \pm \frac{b_1 - d_2}{\sqrt{d_1 + b_1(d_2 - b_1)}}$.
- ◇ $\langle [\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}] + c_1[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $b_1, c_1 \in \mathbf{k}$.
- Si $b_1 = c_1$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{22}] \rangle$.
 - Si $b_1 \neq c_1$, está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] \rangle$.
- ◇ $\langle [\Delta_{12}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + d_2[\Delta_{22}] \rangle$, donde $d_1, d_2 \in \mathbf{k}$.
- Si $d_1 = d_2$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}] \rangle$.
 - Si $d_1 \neq d_2$, está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + \lambda[\Delta_{22}] \rangle$, para $\lambda = \pm i$.
- ◇ $\langle [\Delta_{12}] + c_1[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $c_1 \in \mathbf{k}$.
- Si $c_1 = 0$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{21}] \rangle$.

- Si $c_1 \neq 0$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, para $\lambda = \frac{1}{c_1}$.

◊ $\langle [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$ está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + \lambda[\Delta_{21}] \rangle$, para $\lambda = 0$.

La comprobación de que estos representantes que hemos extraído se encuentran en órbitas disjuntas sigue del desarrollo algebraico de las correspondientes órbitas.

★ Una vez más, estudiamos las órbitas de $T_3(N_2) = \text{Grass}_3(H^2(N_2, k))$ utilizando el Ejemplo 2.3. Para cada familia de espacios vectoriales tenemos las siguientes órbitas:

◊ $\langle [\Delta_{11}] + d_1[\Delta_{22}], [\Delta_{12}] + d_2[\Delta_{22}], [\Delta_{21}] + d_3[\Delta_{22}] \rangle$, donde $d_1, d_2, d_3 \in k$.

- Si $d_2 = d_3$ y $d_1 = -d_3^2$, entonces está en la órbita del espacio $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

- Si $d_2 = d_3$ y $d_1 \neq -d_3^2$, entonces está en la órbita del espacio $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$.

- Si $d_2 \neq d_3$, entonces está en la órbita de los espacios vectoriales de la forma $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$ con $\lambda = \frac{d_1 + d_2 d_3}{(d_2 - d_3)^2}$.

◊ $\langle [\Delta_{11}] + c_1[\Delta_{21}], [\Delta_{12}] + c_2[\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $c_1, c_2 \in k$.

- Si $c_2 = -1$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$.

- Si $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, entonces está en la órbita del espacio $\langle [\Delta_{11}], [\Delta_{12}] + [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

- Si $(c_1 \neq 0 \text{ ó } c_2 \neq 1)$ y $c_2 \neq -1$, entonces está en la órbita de $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$ con $\lambda = -\frac{c_2}{(1+c_2)^2}$.

◊ $\langle [\Delta_{11}] + b_1[\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$, donde $b_1 \in k$, está en la órbita del espacio $\langle [\Delta_{11}] + [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], \lambda[\Delta_{11}] + [\Delta_{22}] \rangle$ para $\lambda = 0$.

◊ $\langle [\Delta_{12}], [\Delta_{21}], [\Delta_{22}] \rangle$.

Utilizando el desarrollo de las órbitas de los representantes escogidos, deducimos que se encuentran en órbitas disjuntas, mediante razonamientos análogos a los del caso $s = 1$.

★ La única órbita de $T_4(N_2)$ es la del espacio $H^2(N_2, k)$.

3. En tercer lugar, construimos cada una de las extensiones que buscábamos.

Lema 2.24. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador no split de la álgebra \mathbf{N}_2 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$(\mathbf{N}_2)_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{N}_2)_{3,2}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = -e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{N}_2)_{3,3}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = \lambda e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{N}_2)_{4,4}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{N}_2)_{4,5}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{N}_2)_{4,6}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_4$
$(\mathbf{N}_2)_{4,7}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$(\mathbf{N}_2)_{4,8}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3 + \lambda e_4$
$(\mathbf{N}_2)_{4,9}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = \lambda e_4$	$e_2e_2 = 0$
$(\mathbf{N}_2)_{5,10}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$(\mathbf{N}_2)_{5,11}$:	$e_1e_1 = e_5$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$(\mathbf{N}_2)_{5,12}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$(\mathbf{N}_2)_{5,13}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3 + \lambda e_5$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$(\mathbf{N}_2)_{6,14}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_5$	$e_2e_2 = e_6$

2.4.18. Álgebras *split*

Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión n con anulador de dimensión s y con al menos un componente anulador. Esto es, existe $x_1 \in \text{Ann}(\mathbb{A})$ y un ideal \mathbb{I}_1 de \mathbb{A} tal que $\mathbb{A} = \mathbb{I}_1 \oplus \mathbf{k}x_1$ y $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{I}_1$. De aquí, el ideal \mathbb{I}_1 es una subálgebra de \mathbb{A} de dimensión $n - 1$ con anulador de dimensión $s - 1$.

Si \mathbb{I}_1 tiene componente anulador entonces podemos repetir el paso anterior y concluir que existen elementos $x_1, \dots, x_r \in \text{Ann}(\mathbb{A})$ y un cierto ideal \mathbb{I} , que como álgebra es no *split*, tal que $\mathbb{A} = \mathbb{I} \oplus \mathbf{k}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{k}x_r$ y que $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{I}$. Por lo que \mathbb{I} es una álgebra no *split* de dimensión $n - r$ con anulador de dimensión $s - r$, que podemos obtener como una extensión por anulador de una álgebra de dimensión $n - s$ por un espacio vectorial de dimensión $s - r$, utilizando el Algoritmo Principal 2.4, o de la clasificación de las álgebras de dimensión $n - s$, en el caso en el que $s = r$.

Observación 2.9. *Las álgebras \mathbb{A} e \mathbb{I} cumplen las mismas identidades polinómicas. Esta observación será de gran utilidad en los próximos capítulos, puesto que si \mathbb{A} es una álgebra de la clase \mathcal{C} entonces \mathbb{I} será una extensión por anulador de la clase \mathcal{C} de una álgebra de*

dimensión $n - s$ por un espacio vectorial de dimensión $s - r$ o una álgebra de la clase \mathcal{C} de dimensión $n - s$.

Además, si \mathbb{I} y \mathbb{J} son dos álgebras isomorfas entonces la suma directa del mismo número de componentes anuladores en ambas álgebras conserva el isomorfismo. Recíprocamente, si $\mathbb{I} \oplus kx_1 \oplus \cdots \oplus kx_r$ y $\mathbb{J} \oplus ky_1 \oplus \cdots \oplus ky_r$ son álgebras isomorfas, entonces \mathbb{I} y \mathbb{J} también lo son.

De este modo, utilizando estos sencillos razonamientos, obtenemos la clasificación de las álgebras *split* de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$.

Reuniendo toda la información obtenida a partir del estudio que hemos realizado en esta sección, podemos dar por probado el Teorema 2.5, que enunciábamos previamente.

2.4.19. Clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión tres

Para concluir este capítulo, extraeremos la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión tres a partir de la clasificación de las álgebras de dimensión tres con anulador de dimensión uno y de la clasificación de las álgebras de dimensión tres con anulador de dimensión dos. Con este fin, comenzaremos recordando la noción de álgebra nilpotente.

Definición 2.10. Una álgebra \mathbb{A} es nilpotente si existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{A}^{[n]} = 0, \text{ donde } \mathbb{A}^{[1]} = \mathbb{A} \text{ y } \mathbb{A}^{[k]} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}^{[i]} \mathbb{A}^{[k-i]} \text{ para todo } k > 1.$$

El menor n satisfaciendo esta propiedad se denomina índice de nilpotencia.

Ejemplo 2.4. Un ejemplo de álgebra nilpotente es la álgebra \mathbb{A}_3 de dimensión dos, que viene dada por

$$\mathbb{A}_3 : e_1 e_1 = e_2 \quad e_1 e_2 = 0 \quad e_2 e_1 = 0 \quad e_2 e_2 = 0$$

Además, se puede comprobar que su índice de nilpotencia es tres.

Observación 2.10. Sean \mathbb{A} y \mathbb{A}' dos álgebras isomorfas. Si \mathbb{A} es nilpotente, entonces \mathbb{A}' también lo es.

Observación 2.11. Sea \mathbb{A} una álgebra nilpotente con índice de nilpotencia $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{A}^{[n-1]}\mathbb{A}^{[1]} = 0$, $\mathbb{A}^{[1]}\mathbb{A}^{[n-1]} = 0$ y $\mathbb{A}^{[n-1]} \neq 0$, entonces $\mathbb{A}^{[n-1]} \subseteq \text{Ann}(\mathbb{A}) \neq 0$. Por el Teorema 2.1, existe una única álgebra \mathbb{A}' , salvo isomorfismos, y una aplicación bilineal $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \text{Ann}(\mathbb{A}))$ con $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$ tal que \mathbb{A} es isomorfa a \mathbb{A}'_{θ} . Más aun, tenemos el siguiente lema.

Lema 2.25. Dada una aplicación bilineal $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ con $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$, la álgebra \mathbb{A}_{θ} es nilpotente si y solo si \mathbb{A} es nilpotente.

Por tanto, si \mathbb{A} es una álgebra nilpotente de dimensión n , entonces existe una única álgebra nilpotente \mathbb{A}' , salvo isomorfismos, y una aplicación bilineal $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \text{Ann}(\mathbb{A}))$ con $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$ tal que $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'_{\theta}$. Esto es, la álgebra \mathbb{A} es una extensión por anulador de una álgebra nilpotente de dimensión inferior. Por lo que para encontrar la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión n tendremos que encontrar la clasificación de las extensiones por anulador de las álgebras nilpotentes de dimensión $n - i$ para $i = 1, \dots, n - 1$. En el caso particular de las álgebras nilpotentes de dimensión tres, necesitaremos la clasificación de las extensiones por anulador de las álgebras nilpotentes de dimensión uno y de las álgebras nilpotentes de dimensión dos. Estas álgebras de partida son bien conocidas.

Lema 2.26. Sea \mathbb{A} una álgebra nilpotente.

- Si \mathbb{A} es de dimensión uno, entonces \mathbb{A} es isomorfa a la álgebra de producto nulo N_1 .
- Si \mathbb{A} es de dimensión dos, entonces \mathbb{A} es isomorfa a A_3 o a N_2 .

Atendiendo al Lema 2.26 y al argumento desarrollado previamente, tendremos que estudiar las extensiones por anulador de las álgebras N_1 , A_3 y N_2 . Por un lado, las extensiones de las álgebras A_3 y N_2 las conocemos gracias a la sección anterior (vease Teorema 2.5). Por otro lado, una extensión por anulador de N_1 de dimensión n es isomorfa a $A_3 \oplus \mathbf{k} \oplus \dots \oplus \mathbf{k}$ o $N_2 \oplus \mathbf{k} \oplus \dots \oplus \mathbf{k} = N_n$, donde el número de componentes anuladores es $n - 2$. De este modo, tenemos la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión tres, que enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 2.2. Sea \mathbb{A} una álgebra nilpotente de dimensión tres, entonces \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:

$(A_3)_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
$(A_3)_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$(A_3)_{3,3}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(A_3)_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(A_3 \oplus \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = 0$
$(N_2)_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
$(N_2)_{3,2}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = -e_3$	$e_2e_2 = 0$
$(N_2)_{3,3}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = \lambda e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
N_3	:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = 0$

La clasificación de las álgebras que hemos obtenido en este capítulo incluye álgebras de una gran variedad de clases diferentes. Algunos ejemplos son:

- Álgebras asociativas como $(D_2(0,0))_{3,1}$ ó $(N_2)_{3,1}$.
- Álgebras anticonmutativas como $(N_2)_{3,2}$ ó $B_3 \oplus \mathbf{k}$.
- Álgebras de Leibniz como $(A_3)_{3,4}(0)$ ó $(B_2(1))_{3,1}$.
- Álgebras de Lie como $(N_2)_{3,2}$ ó $B_3 \oplus \mathbf{k}$.
- Álgebras conmutativas como $(B_2(\frac{1}{2}))_{3,1}$ ó $(D_2(\alpha, \alpha))_{3,1}$.
- Álgebras alternativas como $(C_2(\frac{1}{2}, 0))_{3,1}$ ó $(D_2(0,0))_{3,4}(1)$.
- Álgebras de evolución como $(A_3)_{3,1}$, $(N_2)_{3,1}$ ó $(N_2)_{4,6}$.
- Álgebras conservativas como $A_1(1) \oplus \mathbf{k}$.

Ciertamente, podríamos obtener la clasificación de las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$ de una clase \mathcal{C} estudiando qué álgebras de la relación del Apéndice C satisfacen las respectivas condiciones que definen a esa clase. Por ejemplo, utilizando la función que desarrollamos en el Apéndice B, podemos clasificar todas aquellas que estén definidas por alguna identidad polinómica.

Sin embargo, si nuestro objetivo es clasificar solamente las álgebras de la clase \mathcal{C} , hacerlo de esta forma no resulta demasiado práctico. Por este motivo, en el próximo capítulo estudiaremos cómo adaptar el procedimiento para obtener únicamente las álgebras de una clase en particular, centrándonos en aquellas clases definidas por identidades polinómicas.

Capítulo 3

Clasificación de las álgebras, con anulador no nulo, pertenecientes a una clase fijada

Este capítulo comienza estudiando el interrogante que dejamos abierto al final del anterior, el de cómo adaptar el procedimiento de clasificación algebraica que hemos desarrollado, de tal forma que obtengamos únicamente las álgebras de una determinada clase definida por identidades polinómicas, que sea de nuestro interés.

Recordamos que en el procedimiento para clasificar álgebras con anulador no nulo, tenemos la clasificación de las extensiones por anulador no *split*, que obtenemos por medio del Algoritmo Principal 2.4, y la clasificación de las álgebras *split*, que obtenemos utilizando los razonamientos de la Subsección 2.4.18. En el caso *split*, bastará con recurrir a los mismos razonamientos y a la Observación 2.9. Mientras que para obtener la clasificación del resto de álgebras, tendremos que probar un resultado análogo al Algoritmo Principal 2.4, a partir del cual solo obtengamos las álgebras de una clase definida por identidades polinómicas en particular.

Como conclusión, presentamos un nuevo algoritmo que responde a esta cuestión y, a continuación, clasificamos las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$, apoyándonos en la clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres, utilizando este nuevo método.

Este capítulo es una versión extendida del artículo [38].

3.1. Algoritmo Principal para una clase fijada de álgebras

Consideremos \mathbb{A} una álgebra de dimensión n con anulador de dimensión $m \neq 0$ que satisface la identidad polinómica $P = 0$, donde $P \in k(X)$ para cierto conjunto X de s variables. Por el Teorema 2.1, existe una única álgebra \mathbb{A}' , salvo isomorfismos, de dimensión $n - m$ y una aplicación bilineal, que depende de \mathbb{A}' , $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}', \text{Ann}(\mathbb{A}))$ con $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}') = 0$, tal que $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'_{\theta}$. Además, como \mathbb{A}'_{θ} satisface la identidad $P = 0$, para todo $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{A}'$ y $v_1, \dots, v_s \in \text{Ann}(\mathbb{A})$ tenemos que:

$$\begin{aligned} P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s) &= \\ &= \pi_{\mathbb{A}'}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) + \pi_{\text{Ann}(\mathbb{A})}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) = 0. \end{aligned}$$

Por un lado, $\pi_{\mathbb{A}'}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) = 0$ implica que la álgebra \mathbb{A}' satisface la identidad $P = 0$, basta tomar $v_1 = \dots = v_s = 0$. Recíprocamente, si $P(x_1, \dots, x_s) = 0$, entonces $\pi_{\mathbb{A}'}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) = 0$, para cualesquiera $v_1, \dots, v_s \in \text{Ann}(\mathbb{A})$. De aquí, deducimos que las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión m que satisfacen $P = 0$ son extensiones por anulador de álgebras de dimensión $n - m$ que también cumplen $P = 0$, cuya clasificación algebraica podemos encontrar utilizando el Algoritmo Principal 2.4.

Por otro lado, por la definición de la multiplicación de la álgebra \mathbb{A}'_{θ} , para todo $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{A}'$ y $v_1, \dots, v_s \in \text{Ann}(\mathbb{A})$ tenemos que:

$$\pi_{\text{Ann}(\mathbb{A})}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) = \pi_{\text{Ann}(\mathbb{A})}(P(x_1, \dots, x_s)) = 0.$$

Esto es equivalente a una cierta condición, que depende de la álgebra \mathbb{A}' , sobre la aplicación bilineal θ . De aquí, surge la siguiente definición.

Definición 3.1. Dada una álgebra \mathbb{A} que satisface la identidad polinómica $P = 0$ y un espacio vectorial \mathbb{V} , definimos el conjunto:

$$\mathcal{Z}_{P=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \{\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \pi_{\mathbb{V}}(P(x_1, \dots, x_s)) = 0 \text{ para todo } x_1, \dots, x_s \in \mathbb{A}_{\theta}\}.$$

A este conjunto lo denominaremos el conjunto de cociclos de la álgebra \mathbb{A} con respecto a \mathbb{V} relativo a la identidad polinómica $P = 0$.

Con esta definición, si \mathbb{A} satisface la identidad $P = 0$ y $\theta \in Z_{P=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, entonces la álgebra \mathbb{A}_θ también satisface $P = 0$. Recíprocamente, si \mathbb{A}_θ satisface $P = 0$ para cierta aplicación bilineal $\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, entonces \mathbb{A} satisface $P = 0$ y $\theta \in Z_{P=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

Claramente, podemos generalizar este razonamiento para un conjunto de identidades polinómicas. De modo que, si denotamos por \mathcal{C} a la clase de álgebras que satisfacen $P_1 = 0, \dots, P_r = 0$, entonces podemos definir el conjunto de cociclos de la álgebra \mathbb{A} con respecto a \mathbb{V} relativo a la clase \mathcal{C} como:

$$Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \{ \theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \pi_{\mathbb{V}}(P_1(x_1, \dots, x_{s_1})) = 0, \dots, \pi_{\mathbb{V}}(P_r(x_1, \dots, x_{s_r})) = 0 \\ \text{para todo } x_1, \dots, x_{s_i} \in \mathbb{A}_\theta \}.$$

En los próximos resultados, llamaremos \mathcal{C} a la clase formada por las álgebras que satisfacen las identidades polinómicas $P_1 = 0, \dots, P_r = 0$.

Observación 3.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Entonces*

$$Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = Z_{P_1=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \cap \dots \cap Z_{P_r=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}).$$

Además, como consecuencia del Teorema 2.1, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} de dimensión n con anulador de dimensión $m \neq 0$. Entonces existe una única álgebra \mathbb{A}' de la clase \mathcal{C} , salvo isomorfismos, de dimensión $n - m$ y una única aplicación $\theta \in Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}', \text{Ann}(\mathbb{A}))$ con $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}') = 0$ (que depende de \mathbb{A}'), de forma que $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}'_\theta$ y $\mathbb{A}/\text{Ann}(\mathbb{A}) \cong \mathbb{A}'$.*

Además, si \mathbb{A}'' es una álgebra isomorfa a \mathbb{A}' , entonces existe otra aplicación bilineal $\nu \in Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}'', \text{Ann}(\mathbb{A}))$ con $\text{Rad}(\nu) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}'') = 0$ tal que $\mathbb{A}''_\nu \cong \mathbb{A}$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Para fijar conceptos, veamos en qué consiste el conjunto $Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ en algunas de las clases más conocidas.*

- Si \mathcal{C} es la clase de las álgebras conmutativas, entonces $P(x, y) = xy - yx = 0$. Para $\theta \in Z_{\text{commu}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, para $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{V}}(P(x_1 + v_1, x_2 + v_2)) &= \\ &= \pi_{\mathbb{V}}((x_1 + v_1) \bullet_{\mathbb{A}_\theta} (x_2 + v_2) - (x_2 + v_2) \bullet_{\mathbb{A}_\theta} (x_1 + v_1)) = \\ &= \pi_{\mathbb{V}}((x_1 \bullet_{\mathbb{A}} x_2 + \theta(x_1, x_2)) - (x_2 \bullet_{\mathbb{A}} x_1 + \theta(x_2, x_1))) = \\ &= \theta(x_1, x_2) - \theta(x_2, x_1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto $Z_{\text{commu}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es:

$$\{\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \theta(x, y) - \theta(y, x) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{A}\}.$$

- Si \mathcal{C} es la clase de las álgebras anticonmutativas, entonces $P = 0$ es la identidad anticonmutativa, esto es, $P(x, y) = xy + yx = 0$. Argumentando de la misma forma, tenemos que:

$$Z_{\text{anti}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \{\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \theta(x, y) + \theta(y, x) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{A}\}.$$

- Si $P = 0$ es la identidad de Jacobi, esto es, $P(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} Z_{\text{jacobi}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) &= \{\theta \in \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \theta((xy), z) + \theta((yz), x) + \theta((zx), y) = 0 \\ &\text{para todo } x, y, z \in \mathbb{A}\}. \end{aligned}$$

- Si \mathcal{C} es la clase de las álgebras de Lie, entonces $P_1 = 0$ es la identidad anticonmutativa y $P_2 = 0$ es la identidad de Jacobi. En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Lie}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) &= Z_{\text{anti}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \cap Z_{\text{jacobi}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \\ &= \{\theta \in Z_{\text{anti}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \theta((xy), z) + \theta((yz), x) + \theta((zx), y) = 0 \\ &\text{para todo } x, y, z \in \mathbb{A}\}. \end{aligned}$$

- Si \mathcal{C} es la clase de las álgebras de Malcev, entonces $P_1 = 0$ es la identidad anticonmutativa y $P_2 = 0$ es la identidad $\mathcal{J}(x, y, xz) - \mathcal{J}(x, y, z)x = 0$. Por tanto, tenemos:

$$Z_{\mathcal{M}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \{\theta \in Z_{\text{anti}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \theta((xy), (xz)) + \theta((y(xz)), x) + \theta(((xz)x), y) - \theta(\mathcal{J}(x, y, z), x) = 0 \text{ para todo } x, y, z \in \mathbb{A}\}.$$

- Si \mathcal{C} es la clase de las álgebras de Lie-binarias, entonces $P_1 = 0$ es la identidad anticonmutativa y $P_2 = 0$ es la identidad $\mathcal{J}(xy, x, y) = 0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$Z_{\text{BL}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \{\theta \in Z_{\text{anti}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) : \theta((xy)x, y) + \theta((xy), (xy)) + \theta((y(xy)), x) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathbb{A}\},$$

donde el sumando $\theta((xy), (xy)) = 0$, por la anticonmutatividad de θ .

Observación 3.2. Observamos que $Z_{\text{commu}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ y $Z_{\text{anti}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ no dependen de la multiplicación de la álgebra \mathbb{A} y son el espacio de las aplicaciones bilineales simétricas y antisimétricas, respectivamente.

Ahora que hemos visto algunos ejemplos de conjunto de cociclos relativo a una identidad polinómica (o a una clase), veamos algunas de sus propiedades.

Lema 3.1. Sea \mathbb{A} una álgebra que satisface la identidad polinómica $P = 0$ y sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Entonces $Z_{P=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subespacio vectorial de $Z^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) := \text{Bil}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

Demostración. Claramente, $Z_{P=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subconjunto de $Z^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, veamos que es espacio vectorial.

Dados $x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s \in \mathbb{A} \oplus \mathbb{V}$, tenemos que $\pi_{\mathbb{V}}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) = 0$ en \mathbb{A}_{θ} y en \mathbb{A}_{μ} . Como

$$P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s) = \sum_{i=1}^n P^i(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s) Q^i(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s), \quad (3.1)$$

donde cada P^i, Q^i son polinomios de grado mayor o igual que uno, entonces tenemos:

$$\sum_{i=1}^n \theta(P^i(x_1, \dots, x_s), Q^i(x_1, \dots, x_s)) = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \theta(P^i(x_1, \dots, x_s), Q^i(x_1, \dots, x_s)) = 0.$$

De aquí, si calculamos $\pi_{\mathbb{V}}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s))$ en $\mathbb{A}_{\alpha\theta + \beta\mu}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{V}}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) &= \sum_{i=1}^n (\alpha\theta + \beta\mu)(P^i(x_1, \dots, x_s), Q^i(x_1, \dots, x_s)) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \theta(P^i(x_1, \dots, x_s), Q^i(x_1, \dots, x_s)) + \theta \sum_{i=1}^n \mu(P^i(x_1, \dots, x_s), Q^i(x_1, \dots, x_s)) = 0 \end{aligned}$$

□

Por la Observación 3.1, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} . Entonces $Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subespacio vectorial de $Z^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.*

Lema 3.2. *Sea \mathbb{A} una álgebra que satisface la identidad polinómica $P = 0$ y sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Entonces $B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subespacio de $Z_{P=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.*

Demostración. Por la Observación 2.2, es suficiente con probar que $B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subconjunto de $Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Sea $\delta h \in B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ donde $h \in \text{Hom}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Utilizando la expresión (3.1) de P , tenemos en $\mathbb{A}_{\delta h}$ que:

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{V}}(P(x_1 + v_1, \dots, x_s + v_s)) &= \sum_{i=1}^n \delta h(P_i(x_1, \dots, x_s), Q_i(x_1, \dots, x_s)) = \\ &= h\left(\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_s) \bullet Q_i(x_1, \dots, x_s)\right) = h(P(x_1, \dots, x_s)) = h(0) = 0. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.3. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} . Entonces $B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \subset Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.*

El Lema 2.2, junto al resultado anterior, nos lleva a introducir el siguiente espacio cociente:

Definición 3.2. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Definimos el segundo espacio de cohomología de \mathbb{A} con respecto a \mathbb{V} relativo a la clase \mathcal{C} como el cociente:*

$$H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) / B^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}).$$

Observación 3.3. *Sean \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y \mathbb{V} un espacio vectorial. Entonces:*

- $H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subespacio de $H^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

- $H_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = H_{P_1=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \cap \cdots \cap H_{P_r=0}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.
- Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es una base de \mathbb{V} , entonces

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2) e_i \in Z_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{V}) \text{ si y solo si } \theta_i \in Z_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{k}).$$

- Si $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ es un automorfismo de \mathbb{A} , entonces para todo $\theta \in Z_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, tenemos que $\phi\theta \in Z_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

A partir de este punto, podemos deducir resultados análogos a los del capítulo anterior. Así, del Lema 2.4, colemos el siguiente corolario.

Corolario 3.4. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Sea $\theta \in Z_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ tal que $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$. Supongamos que $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2) e_i$, entonces \mathbb{A}_θ tiene un componente anulador si y solo si el conjunto $\{[\theta_1], \dots, [\theta_m]\}$ es linealmente dependiente en $H_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{k})$.*

Como consecuencia del Lema 2.5, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.5. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Sean $\theta, \nu \in Z_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ dos aplicaciones tal que $\text{Rad}(\theta) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$ y $\text{Rad}(\nu) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0$. Supongamos que \mathbb{A}_θ no tiene componentes anuladores. Si $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2) e_i$ y $\nu(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \nu_i(x_1, x_2) e_i$, entonces las álgebras \mathbb{A}_θ y \mathbb{A}_ν son isomorfas si y solo si existe un automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ tal que el conjunto $\{[\phi\theta_1], \dots, [\phi\theta_m]\}$ genera el mismo subespacio de $H_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{k})$ que el conjunto $\{[\nu_1], \dots, [\nu_m]\}$.*

A continuación, introduciremos algunas definiciones con el fin de enunciar el nuevo algoritmo. De forma análoga a la Definición 2.6, tenemos:

Definición 3.3. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} . Para cada $1 \leq s \leq \dim(H_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{k}))$ definimos el conjunto:*

$$(T_C)_s(\mathbb{A}) = \{ \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in \text{Grass}_s(H_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{k})) : (\cap_{i=1}^s \text{Rad}(\theta_i)) \cap \text{Ann}(\mathbb{A}) = 0 \}.$$

Observación 3.4. *Como $\text{Grass}_s(H_C^2(\mathbb{A}, \mathbb{k}))$ es un subconjunto de $\text{Grass}_s(H^2(\mathbb{A}, \mathbb{k}))$, entonces $(T_C)_s(\mathbb{A})$ es un subconjunto de $T_s(\mathbb{A})$.*

En el siguiente resultado, comprobamos que la acción de $Aut(\mathbb{A})$, definida en la Observación 2.6, es estable en $(T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A})$.

Lema 3.3. *Dada una álgebra \mathbb{A} , el conjunto $(T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A})$ es estable bajo la acción de $Aut(\mathbb{A})$.*

Demostración. Sean $\phi \in Aut(\mathbb{A})$ y $W = \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in Grass_s(H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, k))$. Por la Observación 3.3, tenemos que $\phi W \in Grass_s(H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, k))$. Adicionalmente, como $x \in Rad(\phi\theta_i) \cap Ann(\mathbb{A})$ si y solo si $\phi(x) \in Rad(\theta_i) \cap Ann(\mathbb{A})$, para $i = 1, \dots, s$, concluimos que

$$(\cap_{i=1}^s Rad(\phi\theta_i)) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0 \text{ si y solo si } (\cap_{i=1}^s Rad(\theta_i)) \cap Ann(\mathbb{A}) = 0.$$

Luego, $W \in T_s(\mathbb{A})$ si y solo si $\phi W \in T_s(\mathbb{A})$. □

Finalmente, definimos el conjunto de álgebras no *split* de la clase \mathcal{C} que son extensiones por anulador de una álgebra \mathbb{A} de la clase \mathcal{C} por un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión s , en virtud del Lema 2.2 y del Lema 2.4, de la siguiente forma:

Definición 3.4. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. El conjunto de extensiones por anulador no *split* de la clase \mathcal{C} de \mathbb{A} por \mathbb{V} es:*

$$E_{\mathcal{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{V}) = \left\{ \mathbb{A}_{\theta} : \text{si } \theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^s \theta_i(x_1, x_2)e_i \text{ entonces } \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in (T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A}) \right\}.$$

Como hicimos en el Teorema 2.3, podemos reescribir el Corolario 3.5 de la siguiente forma:

Teorema 3.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial con una base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Consideramos dos extensiones por anulador $\mathbb{A}_{\theta}, \mathbb{A}_{\nu} \in E_{\mathcal{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$. Si $\theta(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x_1, x_2)e_i$ y $\nu(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \nu_i(x_1, x_2)e_i$, entonces*

$$\mathbb{A}_{\theta} \cong \mathbb{A}_{\nu} \text{ si y solo si } Aut(\mathbb{A})\langle [\theta_1], \dots, [\theta_m] \rangle = Aut(\mathbb{A})\langle [\nu_1], \dots, [\nu_m] \rangle.$$

Este resultado establece una correspondencia biyectiva entre las órbitas de $(T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A})$ por la acción de $Aut(\mathbb{A})$ y las clases de isomorfismos de $E_{\mathcal{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, donde \mathbb{V} es un espacio vectorial de dimensión s .

Dada una álgebra \mathbb{A} de la clase \mathcal{C} de dimensión $n - m$, esta correspondencia nos permite enunciar un procedimiento para clasificar algebraicamente las extensiones por anulador no *split* de la clase \mathcal{C} de \mathbb{A} por un espacio vectorial de dimensión m .

Teorema 3.2 (Algoritmo Principal). *Consideramos \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{C} de dimensión $n - m$, en donde $1 \leq m \leq \dim(H_C^2(\mathbb{A}, \mathbf{k}))$.*

- (I) *Calculamos $\text{Aut}(\mathbb{A})$, $H_C^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$ y $\text{Ann}(\mathbb{A})$.*
- (II) *Determinamos el conjunto de $\text{Aut}(\mathbb{A})$ -órbitas en $(T_C)_m(\mathbb{A})$.*
- (III) *Para cada órbita, construimos la álgebra correspondiente a un representante de ella.*

La clasificación algebraica de las extensiones por anulador no *split* de la clase \mathcal{C} de la álgebra \mathbb{A} por un espacio vectorial de dimensión m consiste en las álgebras obtenidas en el paso (III).

Como ocurría en el capítulo anterior, el Corolario 3.1 garantiza que las álgebras de la clase \mathcal{C} de dimensión n con anulador de dimensión m pueden obtenerse como extensiones por anulador de las álgebras de la clase \mathcal{C} de dimensión $n - m$. A su vez, la clasificación algebraica de las extensiones por anulador no *split* de la clase \mathcal{C} de una álgebra de dimensión $n - m$ la podemos obtener utilizando el Algoritmo Principal 3.2.

En la próxima sección aplicaremos este procedimiento al problema de clasificar las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$. En este caso, la identidad polinómica que define la clase es $P(x, y) = xy + yx = 0$.

3.2. Aplicación: clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$

El objetivo de esta sección será probar el Teorema 3.3, que clasifica las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$. En él, hemos omitido las álgebras *split* por razones de claridad y simplemente remitimos a la Subsección 2.4.18, a través de la cual se puede complementar este enunciado de manera sencilla con la clasificación de las álgebras anticonmutativas *split* correspondiente.

Teorema 3.3 (Teorema Principal). *Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_6\}$ una base y sea \mathbb{A} una álgebra anticonmutativa de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$.*

- Si $n = 4$ y \mathbb{A} no es split entonces $\mathbb{A} \cong \mathfrak{A}_i$ para algún $i = 1, \dots, 6$, donde \mathfrak{A}_i es una de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 & : (\mathfrak{g}_1)_{4,1} & : e_1e_2 = e_4 & e_1e_3 = 0 & e_2e_3 = e_1 \\
\mathfrak{A}_2 & : (\mathfrak{g}_2)_{4,1} & : e_1e_2 = e_4 & e_1e_3 = e_1 & e_2e_3 = e_2 \\
\mathfrak{A}_3(\alpha \in \mathbf{k}_{\geq 1}) & : (\mathfrak{g}_3^\alpha)_{4,1} & : e_1e_2 = e_4 & e_1e_3 = e_1 + e_2 & e_2e_3 = \alpha e_2 \\
\mathfrak{A}_4 & : (\mathfrak{g}_3^0)_{4,2} & : e_1e_2 = 0 & e_1e_3 = e_1 + e_2 & e_2e_3 = e_4 \\
\mathfrak{A}_5 & : (\mathscr{A}_1^0)_{4,1} & : e_1e_2 = e_3 & e_1e_3 = e_1 + e_3 & e_2e_3 = e_4 \\
\mathfrak{A}_6 & : (\mathscr{A}_2)_{4,1} & : e_1e_2 = e_1 & e_1e_3 = e_4 & e_2e_3 = e_2
\end{aligned}$$

- Si $n = 5$ y \mathbb{A} no es split entonces $\mathbb{A} \cong \mathfrak{A}_i$ para algún $i = 7, \dots, 9$, donde \mathfrak{A}_i es una de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_7 & : (N_3)_{5,1} & : e_1e_2 = 0 & e_1e_3 = e_4 & e_2e_3 = e_5 \\
\mathfrak{A}_8 & : (\mathfrak{g}_1)_{5,2} & : e_1e_2 = e_4 & e_1e_3 = e_5 & e_2e_3 = e_1 \\
\mathfrak{A}_9 & : (\mathfrak{g}_3^0)_{5,3} & : e_1e_2 = e_4 & e_1e_3 = e_1 + e_2 & e_2e_3 = e_5
\end{aligned}$$

- Si $n = 6$ y \mathbb{A} no es split entonces $\mathbb{A} \cong \mathfrak{A}_{10}$:

$$\mathfrak{A}_{10} : (N_3)_{6,2} : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_5 \quad e_2e_3 = e_6$$

- Si $n \geq 7$, entonces \mathbb{A} es split.

Para clasificar las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$, necesitaremos la clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres. El primer intento de clasificar las álgebras anticonmutativas de dimensión tres vino dado por [45]. Posteriormente, una descripción más simple de esta clasificación vino dada por Ismailov, Kaygorodov y Volkov en el artículo [11]. En el Apéndice A, hemos incluido una recapitulación de dicha clasificación. En este caso, los autores no incluyen los grupos de automorfismos de cada una de las álgebras de la clasificación, por lo que los hemos calculado utilizando la función del Apéndice B, cuando han sido necesarios.

Como hicimos en el capítulo anterior, para probar este resultado distinguiremos un caso para cada familia de álgebras anticonmutativas de dimensión tres y

aplicaremos el Algoritmo Principal 3.2 para clasificar sus extensiones por anulador anticonmutativas no *split*. Sin embargo, las extensiones de algunas de estas álgebras de dimensión tres se pueden clasificar fácilmente. Es el caso de las siguientes, que solo admiten extensiones por anulador de tipo *split*, como afirma el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Toda extensión por anulador de las álgebras $\mathfrak{g}_4, \mathcal{A}_1^\alpha$ para $\alpha \in \mathbf{k}^*$ y \mathcal{A}_3 es *split*.*

Demostración. Por el Lema 2.7, tenemos que:

- $\dim(Z_{anti}^2(\mathfrak{g}_4, \mathbf{k})) = \dim(B^2(\mathfrak{g}_4, \mathbf{k})) = 3,$
- $\dim(Z_{anti}^2(\mathcal{A}_1^\alpha, \mathbf{k})) = \dim(B^2(\mathcal{A}_1^\alpha, \mathbf{k})) = 3$ para $\alpha \neq 0,$
- $\dim(Z_{anti}^2(\mathcal{A}_3, \mathbf{k})) = \dim(B^2(\mathcal{A}_3, \mathbf{k})) = 3.$

Luego todas las extensiones por anulador de estas álgebras son *split*. □

Además, existen otras álgebras anticonmutativas de dimensión tres cuyo segundo espacio de cohomología anticonmutativo es de dimensión uno y, por lo tanto, solo admiten una extensión no *split*. Para verlo, necesitamos introducir una nueva notación.

Notación 3.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión n con una base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Denotaremos por $\Lambda_{ij} : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{k}$ a la aplicación bilineal tal que $\Lambda_{ij}(e_i, e_j) = 1, \Lambda_{ij}(e_j, e_i) = -1$ y $\Lambda_{ij} = 0$ en otro caso. De este modo, el conjunto $\{\Lambda_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ es una base del espacio de aplicaciones bilineales antisimétricas.*

Lema 3.5. *Las álgebras $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3^\alpha$ para $\alpha \in \mathbf{k}^*, \mathcal{A}_1^0$ y \mathcal{A}_2 tienen una única extensión por anulador anticonmutativa no *split*. Respectivamente, estas extensiones, salvo isomorfismos, son:*

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{g}_2)_{4,1} & : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_1 \quad e_2e_3 = e_2 \\
 (\mathfrak{g}_3^{\alpha \neq 0})_{4,1} & : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_1 + e_2 \quad e_2e_3 = \alpha e_2 \\
 (\mathcal{A}_1^0)_{4,1} & : e_1e_2 = e_3 \quad e_1e_3 = e_1 + e_3 \quad e_2e_3 = e_4 \\
 (\mathcal{A}_2)_{4,1} & : e_1e_2 = e_1 \quad e_1e_3 = e_4 \quad e_2e_3 = e_2
 \end{aligned}$$

Demostración. Vamos a probar cada uno de los casos de forma independiente. Para ello comprobaremos que el segundo espacio de cohomología de cada una de estas álgebras es de dimensión uno.

- **Extensión por anulador de la álgebra \mathfrak{g}_2 .** Por el Lema 2.7, las aplicaciones $\delta e_1^* = \Lambda_{13}$ y $\delta e_2^* = \Lambda_{23}$ forman una base de $B^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{k})$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\text{Base}(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{12}]\}.$$

Además, como $\text{Ann}(\mathfrak{g}_2) = 0$, entonces

$$(T_{anti})_1(\mathfrak{g}_2) = \text{Grass}_1(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{k})) = H_{anti}^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{k}).$$

- **Extensión por anulador de la álgebra \mathfrak{g}_3^α para $\alpha \in \mathbf{k}^*$.** Dado que las aplicaciones $\delta e_1^* = \Lambda_{13}$ y $\delta e_2^* = \Lambda_{13} + \alpha\Lambda_{23}$ forman una base de $B^2(\mathfrak{g}_3^\alpha, \mathbf{k})$ para $\alpha \neq 0$, tenemos que:

$$\text{Base}(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^\alpha, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{12}]\}.$$

También, puesto que $\text{Ann}(\mathfrak{g}_3^\alpha) = 0$, entonces

$$(T_{anti})_1(\mathfrak{g}_3^\alpha) = \text{Grass}_1(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^\alpha, \mathbf{k})) = H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^\alpha, \mathbf{k}).$$

- **Extensión por anulador de la álgebra \mathcal{A}_1^0 .** Por el Lema 2.7, las aplicaciones $\delta e_1^* = \Lambda_{13}$ y $\delta e_3^* = \Lambda_{12} + \Lambda_{13}$ forman una base de $B^2(\mathcal{A}_1^0, \mathbf{k})$. Luego, tenemos:

$$\text{Base}(H_{anti}^2(\mathcal{A}_1^0, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{23}]\}.$$

Adicionalmente, puesto que $\text{Ann}(\mathcal{A}_1^0) = 0$, entonces

$$(T_{anti})_1(\mathcal{A}_1^0) = \text{Grass}_1(H_{anti}^2(\mathcal{A}_1^0, \mathbf{k})) = H_{anti}^2(\mathcal{A}_1^0, \mathbf{k}).$$

- **Extensión por anulador de la álgebra \mathcal{A}_2 .** Como $\delta e_1^* = \Lambda_{12}$ y $\delta e_2^* = \Lambda_{23}$ forman una base de $B^2(\mathcal{A}_2, \mathbf{k})$, entonces tenemos que:

$$\text{Base}(H_{anti}^2(\mathcal{A}_2, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{13}]\}.$$

Asimismo, puesto que $Ann(\mathcal{A}_2^0) = 0$, entonces

$$(T_{anti})_1(\mathcal{A}_2^0) = Grass_1(H_{anti}^2(\mathcal{A}_2^0, \mathbf{k})) = H_{anti}^2(\mathcal{A}_2^0, \mathbf{k}).$$

Finalmente construimos las correspondientes extensiones por anulador. \square

Las álgebras restantes de la clasificación de álgebras anticonmutativas de dimensión tres, N_3 , \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_3^0 , hay que estudiarlos detenidamente, por ello dedicaremos una subsección de este capítulo a cada una de ellas.

3.2.1. Álgebra N_3

1. En primer lugar, calculamos $H_{anti}^2(N_3, \mathbf{k})$ y $(T_{anti})_s(N_3)$. Puesto que N_3 es la álgebra con todos sus productos nulos, tenemos que:

$$Base(H_{anti}^2(N_3, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{12}], [\Lambda_{13}], [\Lambda_{23}]\}.$$

Como $Ann(N_3) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ y $Rad(\Lambda_{12}) = e_3$, $Rad(\Lambda_{13}) = e_2$ y $Rad(\Lambda_{23}) = e_1$, entonces:

- El conjunto

$$(T_{anti})_1(N_3) = \{ \langle [\theta] \rangle \in Grass_1(H_{anti}^2(N_3, \mathbf{k})) : Rad(\theta) \cap Ann(N_3) = 0 \}$$

es vacío. Basta observar que para $a[\Lambda_{12}] + b[\Lambda_{13}] + c[\Lambda_{23}] \in H_{anti}^2(N_3, \mathbf{k})$, tenemos que:

- Si $c \neq 0$, entonces $Rad(a\Lambda_{12} + b\Lambda_{13} + c\Lambda_{23}) = \langle e_1 - \frac{b}{c}e_2 + \frac{a}{c}e_3 \rangle$.
- Si $b \neq 0$ y $c = 0$, entonces $Rad(a\Lambda_{12} + b\Lambda_{13}) = \langle e_2 - \frac{a}{b}e_3 \rangle$.
- Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces $Rad(a\Lambda_{12}) = \langle e_3 \rangle$.

Luego, $Rad(a[\Lambda_{12}] + b[\Lambda_{13}] + c[\Lambda_{23}]) \cap Ann(N_3) \neq 0$ para todo $a, b, c \in \mathbf{k}$ y concluimos que $(T_{anti})_1(N_3) = \emptyset$.

- Observando el caso anterior, se deduce que si tomamos dos vectores linealmente independientes del espacio $H_{anti}^2(N_3, \mathbf{k})$, $a_1[\Lambda_{12}] + b_1[\Lambda_{13}] + c_1[\Lambda_{23}]$

y $a_2[\Lambda_{12}] + b_2[\Lambda_{13}] + c_2[\Lambda_{23}]$, entonces sus correspondientes radicales no coinciden. Por lo que $(T_{anti})_s(\mathbf{N}_3) = Grass_s(H_{anti}^2(\mathbf{N}_3, \mathbf{k}))$ para $s = 2, 3$.

2. En segundo lugar, la acción de un automorfismo $(x_{ij}) \in Aut(\mathbf{N}_3) = GL(3, \mathbf{k})$ en un subespacio $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_s \rangle$ de $(T_{anti})_s(\mathbf{N}_3)$ es $\langle (x_{ij})^t \gamma_1(x_{ij}), \dots, (x_{ij})^t \gamma_s(x_{ij}) \rangle$. A su vez, la acción de un automorfismo sobre $a[\Lambda_{12}] + b[\Lambda_{13}] + c[\Lambda_{23}]$ en $H_{anti}^2(\mathbf{N}_3, \mathbf{k})$ lo envía a:

$$\begin{aligned} & (x_{11}(ax_{22} + x_{32}b) + x_{31}(-x_{12}b - x_{22}c) + x_{21}(-ax_{12} + x_{32}c)) [\Lambda_{12}] \\ & + (x_{11}(ax_{23} + x_{33}b) + x_{31}(-x_{13}b - x_{23}c) + x_{21}(-ax_{13} + x_{33}c)) [\Lambda_{13}] \\ & + (x_{12}(ax_{23} + x_{33}b) + x_{32}(-x_{13}b - x_{23}c) + x_{22}(-ax_{13} + x_{33}c)) [\Lambda_{23}]. \end{aligned}$$

- ★ El conjunto $(T_{anti})_2(\mathbf{N}_3)$ tiene una única órbita por la acción de $Aut(\mathbf{N}_3)$. Para comprobarlo veremos que la órbita de $\langle [\Lambda_{13}], [\Lambda_{23}] \rangle$ es $Grass_2(H_{anti}^2(\mathbf{N}_3, \mathbf{k}))$, esto es, veremos que dado un espacio arbitrario $\langle a_1[\Lambda_{12}] + b_1[\Lambda_{13}] + c_1[\Lambda_{23}], a_2[\Lambda_{12}] + b_2[\Lambda_{13}] + c_2[\Lambda_{23}] \rangle$ podemos encontrar un automorfismo cuya acción sobre $\langle [\Lambda_{13}], [\Lambda_{23}] \rangle$ lo envíe a dicho espacio. De este modo, tenemos los siguientes casos:

- Si $\kappa_1 = a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0$ y $\kappa_2 = a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$, entonces basta con tomar un automorfismo tal que $x_{11} = 0, x_{12} = \frac{a_1\kappa_1}{-\kappa_2}, x_{13} = \frac{b_1\kappa_1}{-\kappa_2}, x_{21} = a_2, x_{22} = 0, x_{23} = -c_2, x_{31} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, x_{32} = 1$ y $x_{33} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{\kappa_1}$.
- Si $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 \neq 0$, entonces:
 - Si $c_2 = \frac{a_2c_1}{a_1}$, tenemos dos casos.

- Si $c_1 \neq 0$, entonces tomamos un automorfismo tal que

$$\begin{aligned} x_{11} = 0, x_{12} = c_1, x_{13} = \frac{b_1c_1}{a_1}, x_{21} = b_2, x_{22} = \frac{a_2c_1}{a_1}, \\ x_{23} = 0, x_{31} = -\frac{a_1}{c_1}, x_{32} = 0 \text{ y } x_{33} = 1. \end{aligned}$$

- Si $c_1 = 0$, entonces tomamos el automorfismo con

$$\begin{aligned} x_{12} = -a_1, x_{13} = -b_1, x_{22} = -a_2, x_{23} = -b_2, \\ x_{31} = 1, x_{32} = 0 \text{ y } x_{33} = 0. \end{aligned}$$

- Si $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$, basta escoger $x_{11} = b_1, x_{12} = c_1, x_{21} = b_2, x_{22} = c_2, x_{31} = 0, x_{32} = 0$ y $x_{33} = 1$. Para probar que se trata de un automorfismo es necesario observar que $\kappa_3 = b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$, puesto que en caso contrario el espacio no sería de dimensión dos.
- Si $a_1 = 0$ y $c_1 = 0$, tenemos dos casos.
 - Si $a_2 \neq 0$, entonces tomamos

$$x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = -b_1, x_{21} = 0, x_{22} = -a_2, \\ x_{23} = -b_2, x_{31} = 1, x_{32} = 0 \text{ y } x_{33} = -\frac{c_2}{a_2}.$$

- Si $a_2 = 0$, tomamos

$$x_{11} = b_1, x_{12} = 0, x_{21} = b_2, x_{22} = c_2, x_{31} = 0, x_{32} = 0 \text{ y } x_{33} = 1.$$

- Si $\kappa_1 \neq 0$ y $\kappa_2 = 0$, es un caso análogo al anterior. Tenemos los casos:

- Si $b_2 = \frac{a_2b_1}{a_1}$, tenemos dos casos.
 - Si $b_1 \neq 0$, entonces tomamos el automorfismo tal que

$$x_{11} = b_1, x_{12} = 0, x_{13} = -\frac{b_1c_1}{a_1}, x_{21} = \frac{a_2b_1}{a_1}, \\ x_{22} = c_2, x_{23} = 0, x_{31} = 0, x_{32} = \frac{a_1}{b_1} \text{ y } x_{33} = 1.$$

- Si $b_1 = 0$, entonces tomamos el automorfismo con

$$x_{11} = a_1, x_{13} = -c_1, x_{21} = a_2, x_{23} = -c_2, \\ x_{31} = 0, x_{32} = 1 \text{ y } x_{33} = 0.$$

- Si $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$, entonces elegimos $x_{11} = b_1, x_{12} = c_1, x_{21} = b_2, x_{22} = c_2, x_{31} = 0, x_{32} = 0$ y $x_{33} = 1$. Para probar que se trata de un automorfismo es necesario observar que $\kappa_3 \neq 0$, puesto que en caso contrario el espacio no sería de dimensión dos.
- Si $a_1 = 0$ y $b_1 = 0$, tenemos dos casos.

- Si $a_2 \neq 0$, entonces tomamos

$$\begin{aligned} x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = -c_1, x_{21} = a_2, x_{22} = 0, \\ x_{23} = -c_2, x_{31} = 0, x_{32} = 1 \text{ y } x_{33} = \frac{b_2}{a_2}. \end{aligned}$$

- Si $a_2 = 0$, tomamos

$$x_{11} = 0, x_{12} = c_1, x_{21} = b_2, x_{22} = c_2, x_{31} = 0, x_{32} = 0 \text{ y } x_{33} = 1.$$

- Si $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 0$, entonces el espacio no es de dimensión dos.

Por lo que concluimos que existe una única órbita en $(T_{anti})_2(\mathbf{N}_3)$.

- ★ La única órbita de $(T_{anti})_3(\mathbf{N}_3)$ es la del espacio $H_{anti}^2(\mathbf{N}_3, \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos las correspondiente extensiones por anulador no *split* de \mathbf{N}_3 utilizando su correspondencia con las órbitas de $(T_{anti})_s(\mathbf{N}_3)$ por la acción de $Aut(\mathbf{N}_3)$.

Lema 3.6. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador anticonmutativa no split de la álgebra \mathbf{N}_3 entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$(\mathbf{N}_3)_{5,1} : e_1e_2 = 0 \quad e_1e_3 = e_4 \quad e_2e_3 = e_5$$

$$(\mathbf{N}_3)_{6,2} : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_5 \quad e_2e_3 = e_6$$

3.2.2. Álgebra \mathfrak{g}_1

1. En primer lugar, comenzamos calculando $H_{anti}^2(\mathfrak{g}_1, \mathbf{k})$ y $(T_{anti})_s(\mathfrak{g}_1)$. Como, por el Lema 2.7, tenemos que la aplicación $\delta e_1^* = \Lambda_{23}$ forma una base de $B^2(\mathfrak{g}_1, \mathbf{k})$, entonces:

$$Base(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_1, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{12}], [\Lambda_{13}]\}.$$

Además, tenemos que $e_1 \notin Rad(\theta)$ para $[\theta] \in H_{anti}^2(\mathfrak{g}_1, \mathbf{k})$ y $[\theta] \neq 0$ aunque $Ann(\mathfrak{g}_1) = \langle e_1 \rangle$, y por tanto:

$$(T_{anti})_s(\mathfrak{g}_1) = Grass_s(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_1, \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $(T_{anti})_s(\mathfrak{g}_1)$ por la acción de $Aut(\mathfrak{g}_1)$.

La acción de $Aut(\mathfrak{g}_1)$ envía los vectores e_1, e_2 y e_3 a $\kappa e_1, x_{12}e_1 + x_{22}e_2 + x_{32}e_3$ y $x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + x_{33}e_3$ respectivamente, donde $\kappa = x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} \neq 0$.

★ Dado que la acción de $Aut(\mathfrak{g}_1)$ sobre $\langle a[\Lambda_{12}] + b[\Lambda_{13}] \rangle \in (T_{anti})_1(\mathfrak{g}_1)$ lo envía a:

$$\langle (\kappa ax_{22} + \kappa bx_{32})[\Lambda_{12}] + (\kappa ax_{23} + \kappa bx_{33})[\Lambda_{13}] \rangle,$$

vamos a diferenciar dos casos.

■ Si $b = 0$, tenemos que la órbita de $\langle a[\Lambda_{12}] \rangle \in (T_{anti})_1(\mathfrak{g}_1)$ es:

$$\begin{aligned} \{ \langle \kappa ax_{22}[\Lambda_{12}] + \kappa ax_{23}[\Lambda_{13}] \rangle : x_{22}, x_{23} \in \mathbf{k}, \kappa \neq 0 \} = \\ \{ \langle x_{22}[\Lambda_{12}] + x_{23}[\Lambda_{13}] \rangle : x_{22}, x_{23} \in \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

■ Si $b \neq 0$, denotamos $\lambda = \frac{a}{b}$ y podemos elegir $x_{22} = \lambda$ y $x_{23} = 1$ en la órbita anterior.

Por lo tanto, existe una única órbita y escogemos el representante $\langle [\Lambda_{12}] \rangle$.

★ La única órbita de $(T_{anti})_2(\mathfrak{g}_1)$ es la del espacio $H_{anti}^2(\mathfrak{g}_1, \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos las extensiones por anulador no *split* de \mathfrak{g}_1 .

Lema 3.7. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador anticonmutativa no split de la álgebra \mathfrak{g}_1 entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$(\mathfrak{g}_1)_{4,1} : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = 0 \quad e_2e_3 = e_1$$

$$(\mathfrak{g}_1)_{5,2} : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_5 \quad e_2e_3 = e_1$$

3.2.3. Álgebra \mathfrak{g}_3^0

1. En primer lugar, calculamos $H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^0, \mathbf{k})$ y $(T_{anti})_s(\mathfrak{g}_3^0)$. Por el Lema 2.7, las aplicaciones $\delta e_1^* = \Lambda_{13}$ y $\delta e_2^* = \Lambda_{13}$ forman una base de $B^2(\mathfrak{g}_3^0, \mathbf{k})$. Luego, tenemos que:

$$Base(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^0, \mathbf{k})) = \{[\Lambda_{12}], [\Lambda_{23}]\}.$$

Adicionalmente, pese a que $\text{Ann}(\mathfrak{g}_3^0) = \langle e_2 \rangle$, tenemos que $e_2 \notin \text{Rad}(\theta)$ para $[\theta] \in H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^0, \mathbf{k})$ y $[\theta] \neq 0$. Por lo que:

$$(T_{anti})_s(\mathfrak{g}_3^0) = \text{Grass}_s(H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^0, \mathbf{k})).$$

2. En segundo lugar, calculamos las órbitas de $(T_{anti})_s(\mathfrak{g}_3^0)$ por la acción de $\text{Aut}(\mathfrak{g}_3^0)$. La acción de $\text{Aut}(\mathfrak{g}_3^0)$ envía los vectores e_1, e_2 y e_3 a $(x_{21} + x_{22})e_1 + x_{21}e_2, x_{22}e_2$ y a $x_{13}e_1 + x_{23}e_2 + e_3$ respectivamente, donde $(x_{21} + x_{22})x_{22} \neq 0$.

★ Puesto que la acción de $\text{Aut}(\mathfrak{g}_3^0)$ sobre $\langle a[\Lambda_{12}] + b[\Lambda_{23}] \rangle \in (T_{anti})_1(\mathfrak{g}_3^0)$ lo envía a:

$$\langle (ax_{22}(x_{21} + x_{22}))[\Lambda_{12}] + (x_{22}(b - ax_{13}))[\Lambda_{23}] \rangle,$$

tenemos que estudiar dos casos.

- Si $a = 0$, la órbita del espacio resultante es trivial.
- Si $a \neq 0$, denotando $\lambda = \frac{b}{a}$, la órbita del espacio $\langle [\Lambda_{12}] + \lambda[\Lambda_{23}] \rangle$ es:

$$\{ \langle (x_{22}(x_{21} + x_{22}))[\Lambda_{12}] + (x_{22}(\lambda - x_{13}))[\Lambda_{23}] \rangle :$$

$$x_{13}, x_{21}, x_{22} \in \mathbf{k}, x_{22}(x_{21} + x_{22}) \neq 0 \}.$$

Basta tomar $x_{22} = (x_{21} + x_{22})^{-1}$ y $x_{13} = \lambda$ para obtener el representante $\langle [\Lambda_{12}] \rangle$.

★ La única órbita de $(T_{anti})_2(\mathfrak{g}_3^0)$ es la del espacio $H_{anti}^2(\mathfrak{g}_3^0, \mathbf{k})$.

3. En tercer lugar, construimos las extensiones por anulador no *split* de \mathfrak{g}_3^0 utilizando su correspondencia con las órbitas que hemos calculado.

Lema 3.8. *Sea \mathbb{A} una extensión por anulador anticonmutativa no split de la álgebra \mathfrak{g}_3^0 entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$(\mathfrak{g}_3^0)_{4,1} : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_1 + e_2 \quad e_2e_3 = 0$$

$$(\mathfrak{g}_3^0)_{4,2} : e_1e_2 = 0 \quad e_1e_3 = e_1 + e_2 \quad e_2e_3 = e_4$$

$$(\mathfrak{g}_3^0)_{5,3} : e_1e_2 = e_4 \quad e_1e_3 = e_1 + e_2 \quad e_2e_3 = e_5$$

Recopilando todos los resultados obtenidos en esta sección, podemos dar por probado el Teorema 3.3 de clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$, que enunciábamos previamente.

En este capítulo, hemos construido un procedimiento para clasificar las álgebras de una clase \mathcal{C} , definida por identidades polinómicas, de dimensión n con anulador de dimensión m , utilizando la clasificación de las álgebras de la clase \mathcal{C} de dimensión $n - m$. Sin embargo, en algunas ocasiones nos interesa obtener únicamente aquellas álgebras que no pertenecen a una cierta subclase \mathcal{S} de \mathcal{C} , también definida por identidades polinómicas. Esto ocurre, por ejemplo, cuando ya conocemos la clasificación de las álgebras de la clase \mathcal{S} . Esta cuestión la abordaremos en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Clasificación de las álgebras, con anulador no nulo, de una clase fijada que no pertenecen a una subclase dada

En el capítulo anterior, desarrollamos un procedimiento para obtener la clasificación de las álgebras de una determinada clase \mathcal{C} de dimensión n con anulador de dimensión m , utilizando la clasificación de las álgebras de esa misma clase de dimensión $n - m$. En este capítulo, queremos modificar este procedimiento de tal forma que obtengamos únicamente aquellas álgebras de la clase \mathcal{C} que no pertenezcan a una subclase \mathcal{S} de \mathcal{C} . Posteriormente, aplicaremos este nuevo método al problema de clasificar las álgebras de Lie-binarias que no son de Malcev de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$, utilizando la clasificación de las álgebras de Lie-binarias de dimensión cuatro.

Este capítulo es una versión extendida del artículo [46].

4.1. Algoritmo Principal para clases de álgebras no pertenecientes a otra subclase de álgebras

Claramente, toda extensión por anulador de una álgebra de la clase \mathcal{C} que no pertenezca a la subclase \mathcal{S} , tampoco pertenece a \mathcal{S} . Por lo que para las álgebras en

estas condiciones, bastará con el procedimiento seguido en el capítulo anterior (véase Algoritmo Principal 3.2). De modo que solo tenemos que averiguar cómo obtener la clasificación de las extensiones por anulador de la clase \mathcal{C} que no pertenezcan a la clase \mathcal{S} de las álgebras de la clase \mathcal{S} .

A lo largo de esta sección, denotaremos por \mathcal{C} a la clase formada por las álgebras que satisfacen las identidades polinómicas $P_1 = 0, \dots, P_{r_1} = 0$ y por \mathcal{S} a la subclase de \mathcal{C} formada por las álgebras que satisfacen las identidades polinómicas $Q_1 = 0, \dots, \dots, Q_{r_2} = 0$. De este modo, podemos observar lo siguiente.

Observación 4.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{S} y sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Entonces $Z_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subespacio de $Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$, puesto que para todo $\theta \in Z_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ tenemos que \mathbb{A}_{θ} es de la clase \mathcal{S} y, por tanto, de la clase \mathcal{C} , lo que implica que $\theta \in Z_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.*

Además, $H_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$ es un subespacio de $H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, \mathbb{V})$.

Esto nos permite definir los siguientes subconjuntos, complementarios entre sí, de $(T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A})$.

Definición 4.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de la clase \mathcal{S} . Para cada $1 \leq s \leq \dim(H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, k))$ definimos los conjuntos:*

$$(R_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}})_s(\mathbb{A}) = \{ \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in (T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A}) : \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in \text{Grass}_s(H_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{A}, k)) \}.$$

$$(U_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}})_s(\mathbb{A}) = \{ \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \in (T_{\mathcal{C}})_s(\mathbb{A}) : \langle [\theta_1], \dots, [\theta_s] \rangle \notin \text{Grass}_s(H_{\mathcal{S}}^2(\mathbb{A}, k)) \}.$$

Observación 4.2. *Estos conjuntos son estables por la acción de $\text{Aut}(\mathbb{A})$, basta observar que $(R_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}})_s(\mathbb{A}) = (T_{\mathcal{S}})_s(\mathbb{A})$.*

Por tanto, las extensiones por anulador correspondientes a los representantes de las $\text{Aut}(\mathbb{A})$ -órbitas de $(R_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}})_s(\mathbb{A})$ son álgebras de la clase \mathcal{S} , mientras que las extensiones por anulador correspondientes a los representantes de las $\text{Aut}(\mathbb{A})$ -órbitas de $(U_{\mathcal{C}}^{\mathcal{S}})_s(\mathbb{A})$ no son de la clase \mathcal{S} . Finalmente, podemos enunciar el siguiente procedimiento.

Teorema 4.1 (Algoritmo Principal). *Supongamos que \mathbb{A} es una álgebra de la clase \mathcal{C} de dimensión $n - m$, en donde $1 \leq m \leq \dim(H_{\mathcal{C}}^2(\mathbb{A}, k))$.*

(1) *Si \mathbb{A} no es de la clase \mathcal{S} , entonces aplicamos el Algoritmo Principal 3.2.*

(2) En caso contrario, hacemos lo siguiente:

- (I) Calculamos $\text{Aut}(\mathbb{A})$, $H_C^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$, $H_S^2(\mathbb{A}, \mathbf{k})$ y $\text{Ann}(\mathbb{A})$.
- (II) Determinamos el conjunto de $\text{Aut}(\mathbb{A})$ -órbitas en $(U_C^S)_m(\mathbb{A})$.
- (III) Para cada órbita, construimos la álgebra correspondiente a un representante de ella.

La clasificación algebraica de las extensiones por anulador no split de la clase \mathcal{C} y no de la clase \mathcal{S} de la álgebra \mathbb{A} por un espacio vectorial de dimensión m consiste en las álgebras obtenidas en (I) y (III).

4.2. Aplicación: clasificación de las álgebras de Lie-binarias complejas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$ que no son de Malcev

El objetivo de esta sección es clasificar las álgebras de Lie-binarias complejas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$. En esta línea, Hegazi, Abdelwahab y Calderón clasificaron en 2016 las álgebras de Malcev que no son de Lie de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$ en [35], y obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema 4.2. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ una base. Sea \mathbb{A} una álgebra compleja de Malcev que no es de Lie de dimensión n , entonces $\dim(\text{Ann}(\mathbb{A})) \leq n - 4$. Además, si $\dim(\text{Ann}(\mathbb{A})) = n - 4$, entonces:

- Si $n = 4$ y \mathbb{A} no es split, \mathbb{A} es isomorfa a la álgebra:

$$\mathcal{M}_{4,1} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_1 \quad [e_2, e_4] = e_2 \quad [e_3, e_4] = -e_3$$

- Si $n = 5$ y \mathbb{A} no es split, \mathbb{A} es isomorfa a la álgebra:

$$\mathcal{M}_{5,2} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5$$

- Si $n = 6$ y \mathbb{A} no es split, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\mathcal{M}_{6,3} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6$$

$$\mathcal{M}_{6,4} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_6$$

$$\mathcal{M}_{6,5} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6$$

- Si $n = 7$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\mathcal{M}_{7,6} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_7$$

$$\mathcal{M}_{7,7} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_3] = e_7$$

$$\mathcal{M}_{7,8} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_1, e_4] = e_7 \quad [e_2, e_3] = e_7$$

$$\mathcal{M}_{7,9} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_3] = e_7 \quad [e_2, e_4] = e_7$$

$$\mathcal{M}_{7,10} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_1, e_4] = e_7$$

$$\mathcal{M}_{7,11} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_1, e_4] = e_7$$

$$\mathcal{M}_{7,12} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_1, e_4] = e_7$$

- Si $n = 8$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\mathcal{M}_{8,13} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_7 \quad [e_1, e_4] = e_8$$

$$\mathcal{M}_{8,14} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_7 \quad [e_2, e_3] = e_8$$

$$\mathcal{M}_{8,15} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_5 \quad [e_1, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_7 \quad [e_1, e_4] = e_8 \quad [e_2, e_3] = e_8$$

- Si $n = 9$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a la álgebra:

$$\mathcal{M}_{9,16} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_3] = e_6 \quad [e_1, e_4] = e_7 \quad [e_2, e_4] = e_8 \quad [e_3, e_4] = e_9$$

Recordamos que la clase de las álgebras de Malcev es una subclase de la clase de las álgebras de Lie-binarias. Por lo tanto, para resolver el problema que nos hemos planteado, solo tendremos que clasificar aquellas álgebras de Lie-binarias de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$ que no sean de Malcev. Para ello, usaremos la clasificación de las álgebras de Lie-binarias de dimensión cuatro.

La clasificación de las álgebras de Lie-binarias complejas de dimensión cuatro viene dada en por un trabajo de Kaygorodov, Popov y Volkov [47]. En el Apéndice A, hemos adjuntado un resumen de esta clasificación. Puesto que necesitaremos los grupos de automorfismos de algunas de estas álgebras, los hemos calculado utilizando la función desarrollada en el Apéndice B, ya que no estaban incluidos en el artículo que hemos citado.

Como resultado, obtendremos el Teorema 4.3, que clasifica las álgebras de Lie-binarias de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$ que no son de Malcev. En

él, hemos omitido las álgebras *split* por razones de claridad y simplemente remitimos a la Subsección 2.4.18, a través de la cual se puede complementar este enunciado de manera sencilla con la clasificación de las álgebras de Lie-binarias que no son de Malcev y son *split* correspondiente.

Teorema 4.3 (Teorema Principal). *Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_7\}$ una base. Sea \mathbb{A} una álgebra compleja de Lie-binaria que no es de Malcev de dimensión n , entonces tenemos que $\dim(\text{Ann}(\mathbb{A})) \leq n - 4$. Además, si $\dim(\text{Ann}(\mathbb{A})) = n - 4$, entonces:*

- Si $n = 4$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^{\alpha \neq 0, -1, 2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = \alpha e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \\ \mathcal{B}_2 & : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 \end{aligned}$$

- Si $n = 5$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1)_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \\ (\mathcal{L}_2^{\alpha \neq 0})_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + \alpha e_4 \quad [e_2, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_3] = (1 - \alpha) e_5 \\ (\mathcal{L}_2^0)_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + e_5 \quad [e_2, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_3] = e_5 \\ (\mathcal{L}_2^{-1})_{5,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \\ (\mathcal{B}_1^\alpha)_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = \alpha e_4 + e_5 \quad [e_2, e_3] = e_4 \\ (\mathcal{M}_1)_{5,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = -e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_5 \\ (\mathcal{B}_2)_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 + e_5 \\ (\mathcal{B}_2)_{5,2} & : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 \end{aligned}$$

- Si $n = 6$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1)_{6,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_3, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{L}_2^0)_{6,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + e_5 \quad [e_2, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{L}_2^{-1})_{6,3} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{L}_2^{-1})_{6,4} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_3, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{M}_1)_{6,3} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{M}_1)_{6,4} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = -e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_5 \quad [e_3, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{B}_2)_{6,3} & : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 + e_5 \quad [e_1, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{B}_2)_{6,4} & : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \end{aligned}$$

- Si $n = 7$ y \mathbb{A} no es *split*, \mathbb{A} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas dos a dos:

$$\begin{array}{ll}
(\mathcal{L}_1)_{7,3} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_3, e_4] = e_7 \\
(\mathcal{L}_2^{-1})_{7,5} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_3, e_4] = e_7 \\
(\mathcal{M}_1)_{7,5} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_3, e_4] = e_7 \\
(\mathcal{B}_2)_{7,5} & : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 + e_7 \quad [e_1, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6
\end{array}$$

De este modo, el Teorema 4.2 junto al Teorema 4.3 integran la clasificación de las álgebras de Lie-binarias no *split* de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$.

Como hicimos en el capítulo anterior, para probar el Teorema 4.3, distinguiremos un caso para cada álgebra de Lie-binaria de dimensión cuatro y aplicaremos el Algoritmo Principal 4.1 con el fin de clasificar sus extensiones por anulador de Lie-binarias y no *split* que no son de Malcev.

Con el propósito de facilitar la lectura, a lo largo de este estudio denotaremos por \mathcal{L} a las álgebras de Lie, por \mathcal{M} a las álgebras de Malcev que no son de Lie y por \mathcal{B} a las álgebras de Lie-binarias que no son de Malcev.

Comenzamos presentando la Tabla 4.1, en donde hemos rebautizado las álgebras de la clasificación de [47], separando algunas familias para que resulte más fácil el posterior estudio. Hemos calculado los correspondientes H_M^2 , H_{BL}^2 y Ann , y hemos omitido todas aquellas álgebras de Malcev tales que $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{C}) = H_{BL}^2(\mathbb{A}, \mathbb{C})$, puesto que estas no tendrán extensiones centrales de Lie-binarias que no sean de Malcev. Para realizar estos cálculos, nos hemos apoyado en las funciones del Apéndice B.

Por otra parte, puesto que en el resto de álgebras $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^{\mathbb{C}}(\mathbb{A}, \mathbb{C}) = H_{BL}^2(\mathbb{A}, \mathbb{C})$, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1. *Toda extensión por anulador de las álgebras $n_3 \oplus \mathbb{C}$, n_4 , $r_2 \oplus \mathbb{C}^2$, $r_2 \oplus r_2$, $sl_2 \oplus \mathbb{C}$, $g_4(\alpha, \beta)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $g_5(\alpha)$ para $\alpha \in \mathbb{C}_{\geq 1}$, es álgebra de Malcev.*

Además, en la Tabla 4.1, observamos que algunas álgebras solo admiten una extensión por anulador de Lie-binaria no *split* que no es de Malcev. El siguiente resultado refleja este hecho.

Álgebra (\mathbb{A})	Multiplicación	$H_M^2(\mathbb{A}, \mathbb{C})$	$H_{BL}^2(\mathbb{A}, \mathbb{C})$	$Ann(\mathbb{A})$	Observaciones
$\mathcal{L}_1 = g_1$	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = e_4$	0	$\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle$	0	$(U_{BL}^M)_{s \leq 3}(\mathcal{L}_1) \neq \emptyset$
$\mathcal{L}_2^\alpha = g_2(\alpha)$ ($\alpha \neq 0, -1$)	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = e_3 + \alpha e_4$	0	$\langle [\Lambda_{24}] + (1 - \alpha)[\Lambda_{23}] \rangle$	0	$(U_{BL}^M)_1(\mathcal{L}_2^\alpha) \neq \emptyset$
$\mathcal{L}_2^0 = g_2(0)$	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = e_3$	$\langle [\Lambda_{14}] \rangle$	$\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}] \rangle$	$\langle e_3 - e_4 \rangle$	$(U_{BL}^M)_{s \leq 2}(\mathcal{L}_2^0) \neq \emptyset$
$\mathcal{L}_2^{-1} = g_2(-1)$	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = e_3 - e_4$	$\langle [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle$	$\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle$	0	$(U_{BL}^M)_{s \leq 3}(\mathcal{L}_2^{-1}) \neq \emptyset$
$\mathcal{B}_1^\alpha = g_3(\alpha)$ ($\alpha \neq -1, 2, 0$)	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = \alpha e_4$ $[e_2, e_3] = e_4$	No es Malcev	$\langle [\Lambda_{14}] \rangle$	0	$(T_{BL})_1(\mathcal{B}_1^\alpha) \neq \emptyset$
$\mathcal{B}_1^0 = g_3(0)$	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_2, e_3] = e_4$	No es Malcev	$\langle [\Lambda_{14}] \rangle$	$\langle e_4 \rangle$	$(T_{BL})_1(\mathcal{B}_1^0) \neq \emptyset$
$\mathcal{L}_3 = g_3(2)$	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = 2e_4$ $[e_2, e_3] = e_4$	0	$\langle [\Lambda_{14}] \rangle$	0	$(U_{BL}^M)_1(\mathcal{L}_3) \neq \emptyset$
$\mathcal{M}_1 = g_3(-1)$	$[e_1, e_2] = e_2$ $[e_1, e_3] = e_3$ $[e_1, e_4] = -e_4$ $[e_2, e_3] = e_4$	0	$\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle$	0	$(U_{BL}^M)_{s \geq 3}(\mathcal{M}_1) \neq \emptyset$
$\mathcal{B}_2 = g_6$	$[e_1, e_2] = e_3$ $[e_3, e_4] = e_3$	No es Malcev	$\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle$	0	$(T_{BL})_{s \geq 3}(\mathcal{B}_2) \neq \emptyset$

TABLA 4.1: Álgebras de Lie-binarias con $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}^\infty(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \neq H_{BL}^2(\mathbb{A}, \mathbb{C})$.

Corolario 4.2. Las álgebras \mathcal{L}_2^α (para $\alpha \neq 0, -1$), \mathcal{B}_1^α (para $\alpha \neq -1, 2$) y \mathcal{L}_3 tienen una única extensión central de Lie-binaria no split que no es Malcev. Respectivamente, estas extensiones, salvo isomorfismos, son:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_2^{\alpha \neq 0, -1})_{5,1} &: [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + \alpha e_4 \quad [e_2, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_3] = (1 - \alpha)e_5 \\
(\mathcal{B}_1^{\alpha \neq -1, 2})_{5,1} &: [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = \alpha e_4 + e_5 \quad [e_2, e_3] = e_4 \\
(\mathcal{L}_3)_{5,1} &: [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = 2e_4 + e_5 \quad [e_2, e_3] = e_4
\end{aligned}$$

Demostración. Solo es necesario precisar que aunque $Ann(\mathcal{B}_1^0) = \langle e_4 \rangle$, tenemos que $Ann(\mathcal{B}_1^0) \cap Rad(\Lambda_{14}) = 0$. □

El resto de álgebras hay que estudiarlas detenidamente, dedicaremos una sección a cada una de ellas.

4.2.1. Álgebra \mathcal{L}_1

1. Por la Tabla 4.1, conocemos $H_{BL}^2(\mathcal{L}_1, \mathbf{k})$, $H_M^2(\mathcal{L}_1, \mathbf{k})$ y $Ann(\mathcal{L}_1)$. Además, utilizando la función del Apéndice B, el grupo de automorfismos de \mathcal{L}_1 está formado por las matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

2. Estudiamos las órbitas de $(U_{BL}^M)_s(\mathcal{L}_1)$ por la acción del grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{L}_1)$.

- ★ Si $s = 1$. Utilizando los resultados de la Tabla 4.1, tenemos que un subespacio vectorial arbitrario del conjunto $(U_{BL}^M)_1(\mathcal{L}_1)$ es de la forma $\langle a_{23} [\Lambda_{23}] + a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$. La acción de un automorfismo sobre este espacio lo envía a

$$\begin{aligned} & \langle (a_{23} (x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}) + a_{24} (x_{22}x_{43} - x_{23}x_{42}) + a_{34} (x_{32}x_{43} - x_{33}x_{42})) [\Lambda_{23}] \\ & + (a_{23} (x_{22}x_{34} - x_{32}x_{24}) + a_{24} (x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42}) + a_{34} (x_{32}x_{44} - x_{42}x_{34})) [\Lambda_{24}] \\ & + (a_{23} (x_{23}x_{34} - x_{24}x_{33}) + a_{24} (x_{23}x_{44} - x_{24}x_{43}) + a_{34} (x_{33}x_{44} - x_{34}x_{43})) [\Lambda_{34}] \rangle. \end{aligned}$$

Vamos a probar que existe una única órbita, con representante $\langle [\Lambda_{23}] \rangle$. Observamos que si $a_{24} = 0$ y $a_{34} = 0$, entonces claramente el espacio se encuentra en la órbita de $\langle [\Lambda_{23}] \rangle$. En otro caso, basta tomar el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_{34}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{34}} \end{pmatrix} \quad \text{si } a_{24} = 0 \text{ y } a_{34} \neq 0,$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a_{34}}{a_{24}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a_{24}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{24}} \end{pmatrix} \quad \text{si } a_{24} \neq 0.$$

★ Si $s = 2$. Utilizando el caso anterior, podemos suponer que un subespacio arbitrario de $(U_{BL}^M)_2(\mathcal{L}_1)$ es de la forma $\langle [\Lambda_{23}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$.

◇ Si $a_{24} = 0$, obtenemos el representante de órbita $\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{34}] \rangle$.

◇ Si $a_{24} \neq 0$, tomamos el automorfismo

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{24}^{-1}a_{34} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La acción de ϕ sobre el espacio $\langle [\Lambda_{23}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ lo envía a $\langle -[\Lambda_{23}], a_{24} [\Lambda_{34}] \rangle = \langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{34}] \rangle$, que es el representante del caso anterior.

★ Si $s = 3$. Tenemos que $(U_{BL}^M)_3(\mathcal{L}_1) = \{ \langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle \}$ y por tanto, hay una única órbita.

3. Construimos cada una de las álgebras correspondientes a los representantes de órbitas que hemos calculado.

Lema 4.1. *Sea \mathbb{A} una extensión central de Lie-binaria que no es Malcev ni split de la álgebra \mathcal{L}_1 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$(\mathcal{L}_1)_{5,1} : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5$$

$$(\mathcal{L}_1)_{6,2} : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_3, e_4] = e_6$$

$$(\mathcal{L}_1)_{7,3} : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_3, e_4] = e_7$$

4.2.2. Álgebra \mathcal{L}_2^0

1. Por la Tabla 4.1, tenemos $H_{BL}^2(\mathcal{L}_2^0, \mathbf{k})$, $H_M^2(\mathcal{L}_2^0, \mathbf{k})$ y $Ann(\mathcal{L}_2^0)$. Además, el grupo de automorfismos de \mathcal{L}_2^0 está formado por matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{34} + x_{44} & x_{34} \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}.$$

2. Estudiamos las órbitas de $(U_{BL}^M)_s(\mathcal{L}_2^0)$ por la acción del grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{L}_2^0)$.

- ★ Si $s = 1$. Utilizando la Tabla 4.1, tenemos que un subespacio arbitrario del conjunto $(U_{BL}^M)_1(\mathcal{L}_2^0)$ es de la forma $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{23} ([\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}]) \rangle$ con $a_{23} \neq 0$, y puesto que $Ann(\mathcal{L}_2) = \langle e_3 - e_4 \rangle$, entonces debe ser $a_{14} \neq 0$, ya que de no ser así, el radical del único generador del espacio coincidiría con $Ann(\mathcal{L}_2^0)$, incumpliendo la condición de intersección vacía.

La acción de un automorfismo sobre $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{23} ([\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}]) \rangle$ lo envía al espacio

$$\langle a_{14}x_{44} [\Lambda_{14}] + a_{23} (x_{22}x_{34} - x_{23}x_{32} + x_{22}x_{44}) ([\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}]) \rangle.$$

Como $a_{14} \neq 0$ y $a_{23} \neq 0$, basta tomar el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a_{23}^{-1} & a_{14}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{14}^{-1} \end{pmatrix},$$

que envía cualquier espacio genérico $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{23} ([\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}]) \rangle$, en las condiciones citadas, al espacio $\langle [\Lambda_{14}] + [\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}] \rangle$.

- ★ Si $s = 2$. Puesto que $Ann(\mathcal{L}_2^0) \cap Rad(\Lambda_{14}) \cap Rad(\Lambda_{23} + \Lambda_{24}) = 0$, entonces tenemos que el conjunto $(U_{BL}^M)_2(\mathcal{L}_2^0) = \{ \langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}] \rangle \}$, resultando en una única órbita.

3. Construimos cada una de las álgebras correspondientes a los representantes de órbitas que hemos calculado.

Lema 4.2. *Sea \mathbb{A} una extensión central de Lie-binaria que no es Malcev ni split de la álgebra \mathcal{L}_2^0 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_2^0)_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + e_5 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_5 \\ (\mathcal{L}_2^0)_{6,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + e_5 \quad [e_2, e_3] = e_6 \quad [e_2, e_4] = e_6 \end{aligned}$$

4.2.3. Álgebra \mathcal{L}_2^{-1}

1. Ya conocemos $H_{BL}^2(\mathcal{L}_2^{-1}, \mathbf{k})$, $H_M^2(\mathcal{L}_2^{-1}, \mathbf{k})$ y $Ann(\mathcal{L}_2^{-1})$. Asimismo, el grupo de automorfismos de \mathcal{L}_2^{-1} está formado por matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 2x_{24} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & 2x_{34} + x_{44} & x_{34} \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}.$$

2. Estudiamos las órbitas de $(U_{BL}^M)_s(\mathcal{L}_2^{-1})$ por la acción del grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{L}_2^{-1})$.

★ Si $s = 1$. Tomamos un espacio $\langle a_{23} [\Lambda_{23}] + a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ del conjunto $(U_{BL}^M)_1(\mathcal{L}_2^{-1})$. Puesto que este espacio no está en el conjunto $(T_{BL})_1(\mathcal{L}_2^{-1})$, entonces deberá ser $a_{23} \neq 0$. También, observamos que la acción de un automorfismo sobre este espacio lo envía a:

$$\begin{aligned} & \langle a_{23} (2x_{22}x_{34} - 2x_{32}x_{24} + x_{22}x_{44}) [\Lambda_{23}] \\ & + (a_{23} (x_{22}x_{34} - x_{32}x_{24}) + a_{24}x_{22}x_{44} + a_{34}x_{32}x_{44}) [\Lambda_{24}] \\ & + (x_{44} (x_{24} (2a_{24} - a_{23}) + a_{34} (2x_{34} + x_{44}))) [\Lambda_{34}] \rangle. \end{aligned}$$

Por ello, distinguiremos dos casos:

- ◇ Si $a_{34} = 0$. Nos encontramos con dos nuevos casos.
 - Si $2a_{24} - a_{23} = 0$, tenemos el espacio $\langle 2 [\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}] \rangle$.

- Si $2a_{24} - a_{23} \neq 0$, entonces el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a_{23} - 2a_{24})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2a_{23}^{-1}a_{24} & -a_{23}^{-1}a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envía el espacio $\langle a_{23} [\Lambda_{23}] + a_{24} [\Lambda_{24}] \rangle$ a $\langle [\Lambda_{23}] \rangle$, que no está en la órbita del caso anterior.

- ◊ Si $a_{34} \neq 0$, tomando el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{23}^{-1}a_{34} & a_{23}^{-1}a_{34} \\ 0 & -\frac{1}{2}a_{34}^{-1} & 1 - 2a_{23}^{-1}a_{24} & -a_{23}^{-1}a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

comprobamos que envía $\langle a_{23} [\Lambda_{23}] + a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ al espacio $\langle [\Lambda_{23}] \rangle$, del caso anterior.

- ★ Si $s = 2$. Utilizando el caso anterior, podemos suponer que un subespacio arbitrario de $(U_{BL}^M)_2(\mathcal{L}_2^{-1})$, es de la forma $\langle [\Lambda_{23}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ o de la forma $\langle 2[\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$.

- ◊ Si tomamos $\langle [\Lambda_{23}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$, tenemos que distinguir dos casos:

- Si $a_{34} = 0$, tenemos el espacio $\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}] \rangle$.
- Si $a_{34} \neq 0$, tomamos el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a_{34}} & 0 & 0 \\ 0 & a_{24}\sqrt{a_{34}^{-1}} & -\sqrt{a_{34}^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{a_{34}^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Entonces la acción de ϕ sobre $\langle [\Lambda_{23}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ lo envía a $\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{34}] \rangle$.

Para ver que estos espacios se encuentran en órbitas disjuntas, supongamos por el contrario que existe $\phi = (x_{ij}) \in \text{Aut}(\mathcal{L}_3)$ tal que $\langle \phi[\Lambda_{23}], \phi[\Lambda_{24}] \rangle = \langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{34}] \rangle$. Por tanto, existe una matriz invertible (b_{ij}) tal que

$$\begin{aligned} \phi[\Lambda_{23}] &= (2x_{22}x_{34} - 2x_{32}x_{24} + x_{22}x_{44})[\Lambda_{23}] + \\ &\quad + (x_{22}x_{34} - x_{32}x_{24})[\Lambda_{24}] - x_{24}x_{44}[\Lambda_{34}] = b_{11}[\Lambda_{23}] + b_{21}[\Lambda_{34}]; \\ \phi[\Lambda_{24}] &= x_{22}x_{44}[\Lambda_{24}] + 2x_{24}x_{44}[\Lambda_{34}] = b_{12}[\Lambda_{23}] + b_{22}[\Lambda_{34}]. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de $[\Lambda_{24}]$ en ambos lados de las ecuaciones, deducimos que debe cumplirse que $x_{22}x_{34} - x_{32}x_{24} = x_{22}x_{44} = 0$, y por tanto ϕ es singular, que es una contradicción.

- ◇ Si tomamos $\langle 2[\Lambda_{23}] + [\Lambda_{24}], a_{24}[\Lambda_{24}] + a_{34}[\Lambda_{34}] \rangle$,
- Si $a_{34} = 0$, entonces tenemos el espacio $\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}] \rangle$, que ya habíamos obtenido.
 - Si $a_{34} \neq 0$, entonces tomamos el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}a_{34}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{si } a_{24} = 0,$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{24}^{-1}a_{34} & -\frac{1}{2}a_{24}^{-1}a_{34} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } a_{24} \neq 0.$$

Se puede comprobar que este automorfismo envía el espacio que estamos considerando a $\langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}] \rangle$, obteniendo de nuevo la misma órbita del caso anterior.

- ★ Si $s = 3$. Entonces $(U_{BL}^M)_3(\mathcal{L}_2^{-1}) = \{ \langle [\Lambda_{23}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle \}$ y tenemos una única órbita.

3. Construimos cada una de las álgebras correspondientes a los representantes de órbitas que hemos calculado.

Lema 4.3. *Sea \mathbb{A} una extensión central de Lie-binaria que no es Malcev ni split de la álgebra \mathcal{L}_2^{-1} , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_2^{-1})_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = 2e_5 \quad [e_2, e_4] = e_5 \\
 (\mathcal{L}_2^{-1})_{5,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \\
 (\mathcal{L}_2^{-1})_{6,3} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \\
 (\mathcal{L}_2^{-1})_{6,4} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_3, e_4] = e_6 \\
 (\mathcal{L}_2^{-1})_{7,5} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_3, e_4] = e_7
 \end{aligned}$$

4.2.4. Álgebra \mathcal{M}_1

1. Como en los casos anteriores, hemos calculado el grupo de automorfismos de \mathcal{M}_1 utilizando la función del Apéndice B, ya que el resto de información necesaria la tenemos en la Tabla 4.1. Este está formado por matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2\delta^{-1}(x_{22}x_{43} - x_{42}x_{23}) & x_{22} & x_{23} & 0 \\
 2\delta^{-1}(x_{32}x_{43} - x_{42}x_{33}) & x_{32} & x_{33} & 0 \\
 x_{41} & x_{42} & x_{43} & \delta
 \end{pmatrix},$$

donde $\delta = x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} \neq 0$.

2. Estudiamos las órbitas de $(U_{BL}^M)_s(\mathcal{M}_1)$ por la acción del grupo de automorfismos $Aut(\mathcal{M}_1)$.

★ Si $s = 1$. Tomamos un espacio $\langle a_{14}[\Lambda_{14}] + a_{24}[\Lambda_{24}] + a_{34}[\Lambda_{34}] \rangle$ de $(U_{BL}^M)_1(\mathcal{M}_1)$ (véase Tabla 4.1). La acción de un automorfismo arbitrario sobre este espacio lo envía a

$$\begin{aligned}
 & \langle (\delta a_{14} + 3a_{24}(x_{22}x_{43} - x_{23}x_{42}) + 3a_{34}(x_{32}x_{43} - x_{33}x_{42}))[\Lambda_{14}] \\
 & + \delta(a_{24}x_{22} + a_{34}x_{32})[\Lambda_{24}] + \delta(a_{24}x_{23} + a_{34}x_{33})[\Lambda_{34}] \rangle.
 \end{aligned}$$

◇ Si $a_{24} = 0$ y $a_{34} = 0$, tenemos la órbita trivial del espacio $\langle [\Lambda_{14}] \rangle$.

◇ Si $a_{24} \neq 0$ o $a_{34} \neq 0$, entonces tomamos el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}a_{14}a_{24}^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a_{14}a_{24}^{-2} & a_{24}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{si } a_{34} = 0,$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{34}^{-1} & 0 \\ -\frac{2}{3}a_{14}a_{34}^{-1} & 1 & a_{34}^{-2}a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}a_{14}a_{34}^{-2} & a_{34}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{si } a_{34} \neq 0.$$

Este automorfismo ϕ envía el espacio $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ a $\langle [\Lambda_{24}] \rangle$.

★ Si $s = 2$. Por el caso anterior, podemos suponer que un espacio arbitrario de $(U_{BL}^M)_2(\mathcal{M}_1)$ es de la forma $\langle [\Lambda_{14}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ o de la forma $\langle [\Lambda_{24}], a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$

◇ Si consideramos el espacio $\langle [\Lambda_{14}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$, entonces tenemos que:

- Si $a_{34} = 0$, tenemos el espacio $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}] \rangle$.
- Si $a_{34} \neq 0$, basta tomar el automorfismo ϕ de la siguiente forma:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{34}^{-1}a_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, la acción de ϕ envía $\langle [\Lambda_{14}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ a $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}] \rangle$, obteniendo la misma órbita del caso anterior.

◇ Si ahora consideramos $\langle [\Lambda_{24}], a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$, tenemos los siguientes casos:

- Si $a_{34} = 0$, entonces obtenemos de nuevo el espacio $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}] \rangle$.
- Si $a_{34} \neq 0$, tomando el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3}a_{14}a_{34}^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}a_{14}a_{34}^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos el espacio $\langle [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle$.

Basta observar que para todo automorfismo $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{M}_1)$ se cumple que $\phi[\Lambda_{14}] \in \langle [\Lambda_{14}] \rangle$, para concluir que los representantes que hemos extraído se encuentran en órbitas disjuntas.

★ Si $s = 3$. Entonces el conjunto $(U_{BL}^M)_3(\mathcal{M}_1) = \{\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle\}$ conforma una única órbita.

3. Construimos cada una de las álgebras correspondientes a los representantes de órbitas que hemos calculado.

Lema 4.4. *Sea \mathbb{A} una extensión central de Lie-binaria que no es Malcev ni split de la álgebra \mathcal{M}_1 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_1)_{5,1} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \\ (\mathcal{M}_1)_{5,2} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = -e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_5 \\ (\mathcal{M}_1)_{6,3} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{M}_1)_{6,4} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = -e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_5 \quad [e_3, e_4] = e_6 \\ (\mathcal{M}_1)_{7,5} & : [e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 - e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4 \quad [e_2, e_4] = e_6 \quad [e_3, e_4] = e_7 \end{aligned}$$

4.2.5. Álgebra \mathcal{B}_2

1. El grupo de automorfismos de \mathcal{B}_2 está formado por matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & \epsilon \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \varphi \\ x_{31} & x_{32} & \delta & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\delta = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$, $\epsilon\delta = x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31}$ y $\varphi\delta = x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}$.

2. Estudiamos las órbitas de $(T_{BL})_s(\mathcal{B}_2)$ por la acción del grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{B}_2)$.

- ★ Si $s = 1$. Por los resultados de la Tabla 4.1, un espacio arbitrario de $(T_{BL})_1(\mathcal{B}_2)$ es de la forma $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$. Luego, la acción de un automorfismo sobre este espacio lo envía a:

$$(a_{14}x_{11} + a_{24}x_{21} + a_{34}x_{31}) [\Lambda_{14}] + (a_{14}x_{12} + a_{24}x_{22} + a_{34}x_{32}) [\Lambda_{24}] + \delta a_{34} [\Lambda_{34}].$$

A partir de aquí, tenemos al menos dos órbitas. Por lo que diferenciamos los siguientes casos:

- ◇ Si $a_{34} = 0$, entonces:
- Si $a_{24} = 0$, entonces tenemos el espacio $\langle [\Lambda_{14}] \rangle$.
 - Si $a_{24} \neq 0$, tomando el automorfismo siguiente:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{24}^{-1} & -a_{14}a_{24}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{24}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que la acción de ϕ sobre $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] \rangle$ lo envía a $\langle [\Lambda_{14}] \rangle$, obteniendo la misma órbita del caso anterior

- ◇ Si $a_{34} \neq 0$, tomamos ϕ como el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_{34}^{-1}a_{24} \\ 0 & 1 & 0 & a_{34}^{-1}a_{14} \\ -a_{34}^{-1}a_{14} & -a_{34}^{-1}a_{24} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La acción de ϕ sobre $\langle a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$ lo envía al espacio $\langle [\Lambda_{34}] \rangle$.

- ★ Si $s = 2$. Como hemos hecho en estudios anteriores, observando el estudio del caso $s = 1$, podemos suponer que un espacio arbitrario de $(T_{BL})_2(\mathcal{B}_2)$ es de la forma $\langle [\Lambda_{34}], a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] \rangle$ o de la forma $\langle [\Lambda_{14}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$.

- ◇ Comenzaremos considerando el espacio $\langle [\Lambda_{34}], a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] \rangle$.

- Si $a_{24} = 0$, entonces tenemos el representante $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{34}] \rangle$.
- Si $a_{24} \neq 0$, basta tomar el automorfismo:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ a_{24}^{-1} & -a_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La acción del automorfismo ϕ envía el espacio $\langle [\Lambda_{34}], a_{14} [\Lambda_{14}] + a_{24} [\Lambda_{24}] \rangle$ al espacio $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{34}] \rangle$, obteniendo de nuevo la misma órbita.

◇ Ahora, consideraremos el espacio $\langle [\Lambda_{14}], a_{24} [\Lambda_{24}] + a_{34} [\Lambda_{34}] \rangle$.

- Si $a_{34} = 0$, obtenemos la órbita trivial del espacio $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}] \rangle$.
- Si $a_{34} \neq 0$, obtenemos el representante $\langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{34}] \rangle$ tomando:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_{24}a_{34}^{-1} \\ 0 & a_{34}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{24}a_{34}^{-2} & a_{34}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

★ Si $s = 3$. Tenemos la órbita de $(T_{BL})_3(\mathcal{B}_2) = \{ \langle [\Lambda_{14}], [\Lambda_{24}], [\Lambda_{34}] \rangle \}$.

3. Construimos cada una de las álgebras correspondientes a los representantes de órbitas que hemos calculado.

Lema 4.5. *Sea \mathbb{A} una extensión central de Lie-binaria que no es Malcev ni split de la álgebra \mathcal{B}_2 , entonces esta es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras no isomorfas entre sí:*

$$(\mathcal{B}_2)_{5,1} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 + e_5$$

$$(\mathcal{B}_2)_{5,2} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5$$

$$(\mathcal{B}_2)_{6,3} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 + e_5 \quad [e_1, e_4] = e_6$$

$$(\mathcal{B}_2)_{6,4} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6$$

$$(\mathcal{B}_2)_{7,5} : [e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3 + e_7 \quad [e_1, e_4] = e_5 \quad [e_2, e_4] = e_6$$

Recopilando los resultados obtenidos en esta sección, podemos dar por probado el Teorema 4.3 de clasificación de las álgebras de Lie-binarias que no son de Malcev de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$.

Conclusiones

Este documento ha estudiado el problema de clasificación salvo isomorfismos de las álgebras con anulador no nulo, desarrollando un procedimiento general para clasificar este tipo de álgebras en distintos escenarios posibles. Con este fin, se ha hecho uso de la noción de extensión por anulador de una álgebra, que permitía construir clasificaciones de dimensiones superiores a partir de clasificaciones de dimensiones inferiores. Como resultado, esta memoria ha quedado dividida de la siguiente forma.

En el primer capítulo, se ha incluido una breve introducción a la teoría de álgebras no asociativas, que recoge todos aquellos conceptos elementales que han ido surgiendo a lo largo de la misma.

En el segundo capítulo, se ha construido un procedimiento que permite calcular la clasificación de las extensiones por anulador no *split* de una álgebra, en virtud del cual es posible obtener clasificaciones de las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión m a partir de la clasificación de las álgebras de dimensión $n - m$. Para mostrar la viabilidad de este procedimiento, se ha aplicado al problema concreto de clasificar las álgebras de dimensión n con anulador de dimensión $n - 2$, utilizando la clasificación de las álgebras de dimensión dos.

En el tercer capítulo, se ha construido un nuevo procedimiento a partir del cual es posible obtener la clasificación de las extensiones por anulador no *split* de una álgebra que pertenecen a una clase definida por identidades polinómicas. Posteriormente, se ha aplicado este procedimiento al problema de clasificar las álgebras anticonmutativas de dimensión n con anulador de dimensión $n - 3$, utilizando la clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres.

En el cuarto capítulo, se ha abordado otra variante del problema, la de clasificar las extensiones por anulador no *split* de una álgebra que pertenecen a una clase definida por identidades polinómicas pero que no pertenecen a otra clase definida de

la misma forma. Esta variante se resuelve adaptando ligeramente el procedimiento del capítulo anterior. Finalmente, se ha aplicado esta nueva versión al problema de clasificar las álgebras de Lie-binarias que no son de Malcev de dimensión n con anulador de dimensión $n - 4$, utilizando la clasificación de las álgebras de Lie-binarias de dimensión cuatro.

Aunque en esta memoria se hayan resuelto algunas de las incógnitas en torno a la clasificación de álgebras con anulador no nulo, aun existen otras cuestiones que deben ser estudiadas en futuros trabajos.

Uno de estos interrogantes sería el de si es posible adaptar el procedimiento desarrollado en el tercer capítulo al problema de clasificar extensiones por anulador de una clase definida por pseudoidentidades. Más aun, se podría estudiar si es posible construir un procedimiento para clasificar extensiones por anulador de cualquier clase (incluyendo las no definidas por identidades ni por pseudoidentidades).

Otro interrogante que queda abierto gira en torno a la posibilidad de construir un procedimiento todavía más general, que permita clasificar todas las extensiones, en el sentido usual del término, de una álgebra. Pues a partir de él, sería posible obtener clasificaciones de álgebras no simples de dimensiones superiores utilizando clasificaciones de dimensiones inferiores.

Apéndice A

Álgebras de partida

En este apéndice, reunimos de forma concisa todas aquellas clasificaciones algebraicas conocidas que han sido utilizadas a lo largo de esta memoria como punto de partida para calcular sus extensiones por anulador, aplicando el procedimiento correspondiente en cada caso, con el fin de obtener cada una de las clasificaciones algebraicas que hemos presentado.

Esto incluye la clasificación de las álgebras de dimensión dos, la clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres y la clasificación de las álgebras de Lie-binarias de dimensión cuatro. Cada una ellas, la hemos resumido en una tabla diferente junto con información adicional de utilidad para nuestro propósito.

A.1. Clasificación de las álgebras de dimensión dos

En virtud del artículo de Ivan Kaygorodov y Yuri Volkov [1], tenemos la clasificación, salvo isomorfismos, de las álgebras de dimensión dos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Esta clasificación distingue seis clases de álgebras según el número de elementos idempotentes, esto es, elementos $e \in \mathbb{A}$ con $e \neq 0$ tal que $e^2 = e$, y el número de elementos 2-nil, esto es, elementos $x \in \mathbb{A}$ con $x \neq 0$ tal que $x^2 = 0$. Estas clases son:

- Las álgebras de la clase **A** no tienen elementos idempotentes y los elementos 2-nil generan un único subespacio de dimensión uno.
- Las álgebras de la clase **B** no tienen elementos idempotentes y tiene dos elementos 2-nil linealmente independientes.

- Las álgebras de la clase C tienen un único elemento idempotente y no tienen elementos 2-nil.
- Las álgebras de la clase D tienen un único elemento idempotente y un elemento 2-nil.
- Las álgebras de la clase E tienen dos elementos idempotentes linealmente independientes.
- La clase formada por la álgebra de productos nulos de dimensión dos N_2 .

Para dar la clasificación algebraica desarrollada en el citado trabajo, es necesario introducir cierta notación relativa a los conjuntos sobre los que están definidas las familias de álgebras de cada clase.

Notación A.1. En primer lugar, consideramos la acción del grupo cíclico $C_2 = \langle \rho \mid \rho^2 \rangle$ sobre k definida por $\rho\alpha = -\alpha$ para $\alpha \in k$. Fijamos un conjunto de representantes de órbitas y lo denotamos por $k_{\geq 0}$. De este modo, si $k = \mathbb{C}$, entonces podemos tomar

$$\mathbb{C}_{\geq 0} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) > 0\} \cup \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) = 0, \operatorname{Im}(\alpha) \geq 0\}.$$

De igual forma, consideramos la acción del grupo cíclico C_2 sobre $k^* \setminus \{1\}$ definida por $\rho\alpha = \alpha^{-1}$ para $\alpha \in k^* \setminus \{1\}$. Fijamos un conjunto de representantes de órbita bajo esta acción y lo denotamos por $k_{>1}^*$. Por ejemplo, si $k = \mathbb{C}$, entonces

$$\mathbb{C}_{>1}^* = \{\alpha \in \mathbb{C}^* \mid |\alpha| > 1\} \cup \{\alpha \in \mathbb{C}^* \mid |\alpha| = 1, 0 < \arg(\alpha) \leq \pi\}.$$

En segundo lugar, consideramos la acción de C_2 sobre k^2 que viene dada por la aplicación $\rho(\alpha, \beta) = (1 - \alpha + \beta, \beta)$ para $(\alpha, \beta) \in k^2$. De nuevo, fijamos algún conjunto de representantes de órbitas bajo esta acción y lo denotamos por \mathcal{U} . Asimismo, introducimos el conjunto $\mathcal{T} = \{(\alpha, \beta) \in k^2 \mid \alpha + \beta = 1\}$.

Finalmente, definimos $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) - 1$, para $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in k^4$. Para cada elemento $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tal que $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0$ definimos $\mathcal{C}_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\beta, \delta)$, $\mathcal{C}_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\gamma, \alpha)$ y $\mathcal{C}_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{\beta\gamma - (\alpha-1)(\delta-1)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}, \frac{\alpha\delta - (\beta-1)(\gamma-1)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \right)$. Consideramos

$$\{(\mathcal{C}_1(\Gamma), \mathcal{C}_2(\Gamma), \mathcal{C}_3(\Gamma)) \mid \Gamma \in k^4, \mathcal{D}(\Gamma) \neq 0, \mathcal{C}_1(\Gamma), \mathcal{C}_2(\Gamma) \notin \mathcal{T}\} \subset (k^2)^3.$$

Claramente, el grupo simétrico S_3 actúa sobre este conjunto por medio de $\sigma(\mathcal{C}_1(\Gamma), \mathcal{C}_2(\Gamma), \mathcal{C}_3(\Gamma)) = (\mathcal{C}_{\sigma^{-1}(1)}(\Gamma), \mathcal{C}_{\sigma^{-1}(2)}(\Gamma), \mathcal{C}_{\sigma^{-1}(3)}(\Gamma))$ para $\sigma \in S_3$. Observar que existe un conjunto de representantes de órbita por esta acción $\tilde{\mathcal{V}}$ tal que si $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) \in \tilde{\mathcal{V}}$ y $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$, entonces $\mathcal{C}_3 \neq \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. Fijamos $\tilde{\mathcal{V}}$ de esta forma y definimos

$$\mathcal{V} = \{\Gamma \in \mathbf{k}^4 \mid \mathcal{D}(\Gamma) \neq 0; \mathcal{C}_1(\Gamma), \mathcal{C}_2(\Gamma) \notin \mathcal{T}, (\mathcal{C}_1(\Gamma), \mathcal{C}_2(\Gamma), \mathcal{C}_3(\Gamma)) \in \tilde{\mathcal{V}}\}.$$

Además, definimos $\mathcal{C}(\Gamma) = \{\mathcal{C}_1(\Gamma), \mathcal{C}_2(\Gamma), \mathcal{C}_3(\Gamma)\} \subset \mathbf{k}^2$ para $\Gamma \in \mathcal{V}$.

En la Tabla A.1, recopilamos la clasificación salvo isomorfismos de las álgebras de dimensión dos, proporcionada por el trabajo citado. Para una base $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{A} , la primera columna denota el nombre dado a dicha álgebra, la segunda columna indica la multiplicación de la álgebra y la tercera columna muestra el grupo de automorfismos correspondiente, que también puede encontrarse en el mismo artículo.

Como consecuencia de esta clasificación, tenemos el siguiente corolario acerca de las álgebras con anulador no nulo de dimensión dos, cuya demostración es sencilla.

Corolario A.1. *Sea \mathbb{A} una álgebra de dimensión dos con $\text{Ann}(\mathbb{A}) \neq 0$, entonces es isomorfa a A_3 , $D_2(0,0)$ o N_2 .*

Álgebra (A)	Multiplicación	Grupo de automorfismos (Aut)
$A_1(\alpha), \alpha \in k$	$e_1e_1 = e_1 + e_2, \quad e_1e_2 = \alpha e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} : x \in k \right\}$
A_2	$e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = -e_2$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} : x \in k \right\}$
A_3	$e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = 0,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = 0$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^2 \end{pmatrix} : x \in k^*, y \in k \right\}$
$A_4(\alpha), \alpha \in k_{\geq 0}$	$e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2, \quad e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = -e_1$	$\left\{ I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ si $\alpha = 0,$ $\{1\}$ en otro caso
$B_1(\alpha), \alpha \in k$	$e_1e_1 = 0, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2$	$\{1\}$
$B_2(\alpha), \alpha \in k$	$e_1e_1 = 0, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = \alpha e_1$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in k^* \right\}$
B_3	$e_1e_1 = 0, \quad e_1e_2 = e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = -e_2$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} : x \in k, y \in k^* \right\}$
$C(\alpha, \beta),$ $(\alpha, \beta) \in k \times k_{\geq 0}$	$e_1e_1 = e_2, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2,$ $e_2e_2 = e_2, \quad e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$\left\{ I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ si $\beta = 0,$ $\{1\}$ si $\beta \neq 0$
$D_1(\alpha, \beta),$ $(\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$\left\{ I_2, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ si $\beta = 2\alpha - 1,$ $\{1\}$ si $\beta \neq 2\alpha - 1$
$D_2(\alpha, \beta),$ $(\alpha, \beta) \in k^2 \setminus \mathcal{T}$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = \alpha e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = \beta e_2$	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in k^* \right\}$
$D_3(\alpha, \beta),$ $(\alpha, \beta) \in k^2 \setminus \mathcal{T}$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2$	$\{1\}$
$E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{V}$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2,$ $e_2e_2 = e_2, \quad e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2$	S_2 si $(\alpha, \gamma) = (\delta, \beta) \neq (-1, -1),$ S_3 si $(\alpha, \gamma) = (\delta, \beta) = (-1, -1),$ $\{1\}$ en otro caso
$E_2(\alpha, \beta, \gamma),$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in k^3 \setminus k \times \mathcal{T}$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2,$ $e_2e_2 = e_2, \quad e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2$	$\{1\}$
$E_3(\alpha, \beta, \gamma),$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in k^2 \times k_{>1}^*$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma} e_2,$ $e_2e_2 = e_2, \quad e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma} e_2$	S_2 si $\gamma = -1$ y $\alpha = \beta,$ $\{1\}$ en otro caso
E_4	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = e_1 + e_2,$ $e_2e_2 = e_2, \quad e_2e_1 = 0$	$\{1\}$
$E_5(\alpha), \alpha \in k$	$e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2,$ $e_2e_2 = e_2, \quad e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 1 - x & 1 - y \end{pmatrix} : x, y \in k, x \neq y \right\}$
N_2	$e_1e_1 = 0, \quad e_1e_2 = 0,$ $e_2e_2 = 0, \quad e_2e_1 = 0$	$GL(2, k)$

TABLA A.1: Álgebras de dimensión dos módulo isomorfismos.

Donde $\{1\}$ denota el grupo trivial, S_2 y S_3 denotan el grupo simétrico de dimensión dos y tres y $GL(2, k)$ denota el grupo lineal general de grado dos.

A.2. Clasificación de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres

La clasificación módulo isomorfismos de las álgebras anticonmutativas de dimensión tres se tiene gracias al artículo de Nurlan Ismailov, Ivan Kaygorodov y Yury Volkov [11]. En la Tabla A.2, presentamos dicha clasificación de forma sintética. Para una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{A} , la primera columna denota el nombre de la álgebra y la segunda columna indica la multiplicación de la álgebra. En ella, hemos omitido aquellos productos que se deduzcan de la anticonmutatividad de la álgebra y aquellos que son igual a cero.

Álgebra (\mathbb{A})	Multiplicación
\mathfrak{g}_1	$e_2e_3 = e_1$
\mathfrak{g}_2	$e_1e_3 = e_1 \quad e_2e_3 = e_2$
$\mathfrak{g}_3^\alpha, \alpha \in \mathbf{k}_{\geq 1}$	$e_1e_3 = e_1 + e_2 \quad e_2e_3 = \alpha e_2$
\mathfrak{g}_4	$e_1e_2 = e_3 \quad e_1e_3 = -e_2 \quad e_2e_3 = e_1$
$\mathcal{A}_1^\alpha, \alpha \in \mathbf{k}_{\geq 1}$	$e_1e_2 = e_3 \quad e_1e_3 = e_1 + e_3 \quad e_2e_3 = \alpha e_2$
\mathcal{A}_2	$e_1e_2 = e_1 \quad e_2e_3 = e_2$
\mathcal{A}_3	$e_1e_2 = e_3 \quad e_1e_3 = e_1 \quad e_2e_3 = e_2$
\mathbf{N}_3	

TABLA A.2: Álgebras anticonmutativas de dimensión tres módulo isomorfismos.

Donde hemos denotado por $\mathbf{k}_{\geq 1}$ al conjunto $\mathbf{k}_{>1}^* \cup \{0, 1\}$.

A.3. Clasificación de las álgebras de Lie-binarias complejas de dimensión cuatro

La clasificación de las álgebras de Lie-binarias complejas de dimensión cuatro viene dada por el trabajo [47] de Yury Volkov, Ivan Kaygorodov y Yury Popov. La Tabla A.3 recoge dicha clasificación.

Para una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de \mathbb{A} , la primera columna denota el nombre dado a la álgebra y la segunda columna indica la multiplicación de la álgebra, en la que volvemos a omitir aquellos productos que se deduzcan de la anticonmutatividad de la álgebra y aquellos que son igual a cero. Adicionalmente, utilizando la función desarrollada en el Apéndice B en Wolfram Mathematica, hemos estudiado cuáles de estas álgebras de Lie-binarias son de Lie o de Malcev, incluyendo dicha información en una tercera columna. En el caso en el que no se indique nada, queremos decir que no es ni de Lie ni de Malcev.

Álgebra (\mathbb{A})	Multiplicación	Clase
$n_3 \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_3$	Lie
n_4	$[e_1, e_2] = e_3 \quad [e_1, e_3] = e_4$	Lie
$r_2 \oplus \mathbb{C}^2$	$[e_1, e_2] = e_2$	Lie
$r_2 \oplus r_2$	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_3, e_4] = e_4$	Lie
$sl_2 \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = -e_3 \quad [e_2, e_3] = e_1$	Lie
g_1	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_4$	Lie
$g_2(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + \alpha e_4$	Lie
$g_3(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_3 \quad [e_1, e_4] = \alpha e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4$	Lie si $\alpha = 2$, Malcev si $\alpha = -1$
$g_4(\alpha, \beta)$	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3 \quad [e_1, e_4] = e_3 + \beta e_4$	Lie
$g_5(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}_{\geq 1}$	$[e_1, e_2] = e_2 \quad [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3 \quad [e_1, e_4] = (1 + \alpha)e_4 \quad [e_2, e_3] = e_4$	Lie
g_6	$[e_1, e_2] = e_3 \quad [e_3, e_4] = e_3$	

TABLA A.3: Álgebras de Lie-binarias de dimensión cuatro módulo isomorfismos.

La álgebra $g_4(\alpha_1, \beta_1)$ es isomorfa a $g_4(\alpha_2, \beta_2)$ si y solo si tras alguna permutación de los parámetros las proporciones $1 : \alpha_1 : \beta_1$ y $1 : \alpha_2 : \beta_2$ coinciden, donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. Salvo esta excepción, el resto de álgebras son no isomorfas dos a dos.

Apéndice B

Álgebras en Wolfram Mathematica

En este apéndice, hemos recopilado aquellas funciones elaboradas con el propósito de resolver algunos de los cálculos rutinarios que han surgido en el desarrollo de esta memoria, como son el comprobar si una álgebra cumple una determinada identidad polinómica o el cálculo del grupo de automorfismos de una álgebra. Estas funciones están escritas en Wolfram Language (el lenguaje de programación de Wolfram Mathematica).

B.1. Definición de álgebras

Sea \mathbb{A} una álgebra con una base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Sean $c_{ij}^k \in k$ los escalares tales que la multiplicación de \mathbb{A} viene dada por los siguientes productos entre vectores de la base:

$$e_i \bullet e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k \text{ para } 1 \leq i, j \leq n.$$

A estos escalares se los denomina constantes estructurales de la álgebra \mathbb{A} . Con ellos, podemos considerar el siguiente *array*.

```
In[1]:= A = Array[c, {n, n, n}];
```

En el cuál definimos $c[i, j, k] = c_{ij}^k$ para $1 \leq i, j, k \leq n$. Por ejemplo, si \mathbb{A} es de dimensión tres, tenemos:

```
In[2]:= A = Array[c, {3, 3, 3}];  
MatrixForm[A]
```

$$\text{Out[2]=} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c[1, 1, 1] \\ c[1, 1, 2] \\ c[1, 1, 3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c[1, 2, 1] \\ c[1, 2, 2] \\ c[1, 2, 3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c[1, 3, 1] \\ c[1, 3, 2] \\ c[1, 3, 3] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c[2, 1, 1] \\ c[2, 1, 2] \\ c[2, 1, 3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c[2, 2, 1] \\ c[2, 2, 2] \\ c[2, 2, 3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c[2, 3, 1] \\ c[2, 3, 2] \\ c[2, 3, 3] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c[3, 1, 1] \\ c[3, 1, 2] \\ c[3, 1, 3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c[3, 2, 1] \\ c[3, 2, 2] \\ c[3, 2, 3] \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c[3, 3, 1] \\ c[3, 3, 2] \\ c[3, 3, 3] \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

En donde, $c[i, j, k] = c_{ij}^k$ para $1 \leq i, j, k \leq 3$.

Asimismo, dos elementos $x, y \in \mathbb{A}$ tales que $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ e $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, vienen dados por los *array*:

```
In[3]:= x = Array[xc, n];
y = Array[yc, n];
```

En donde definimos $xc[k] = x_k$ e $yc[k] = y_k$ para $1 \leq k \leq n$.

De este modo, la multiplicación de dos elementos $x, y \in \mathbb{A}$ es el resultado de aplicar la función:

```
In[4]:= m[x_, y_, A_] := Transpose[x.A].y
```

B.2. Identidades polinómicas

Utilizando la función de multiplicación de una álgebra que hemos definido en la sección anterior, podemos definir identidades polinómicas por medio de funciones.

Los polinomios correspondientes a algunas de ellas son:

```
In[5]:= Asociativa[x_, y_, z_, A_] :=
m[m[x, y, A], z, A] - m[x, m[y, z, A], A];
IJacobi[x_, y_, z_, A_] :=
m[m[x, y, A], z, A] + m[m[y, z, A], x, A]
+ m[m[z, x, A], y, A];
IMalcev[x_, y_, z_, A_] :=
IJacobi[x, y, m[x, z, A], A]
- m[IJacobi[x, y, z, A], x, A];
IBinary[x_, y_, A_] := IJacobi[m[x, y, A], x, y, A];
```

La siguiente función comprueba si una álgebra (o una familia de álgebras), cuya multiplicación viene dada por un *array*, cumple una identidad polinómica correspondiente a un polinomio de $k(\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\})$.

```
In[6]:= CheckClassP[A_, P_, s_] := Module[{dim, xvectors, x,
  Sol},
  (*Obtenemos dim(A)*)
  dim = Length[A];
  (*Definimos los vectores x1, ..., xs*)
  xvectors = Array[x, {s, dim}];
  (*Comprobamos si A satisface P(x1, ..., xs)=0*)
  Sol = DeleteDuplicates[FullSimplify[SolveAlways[
    P[Sequence @@ Table[xvectors[[k]],
      {k, 1, s}], A] == 0, Flatten[xvectors]]]];
  (*Mostramos una respuesta en base a lo obtenido*)
  (*Si A es una familia que satisface P=0 en ciertos
  casos, indicamos estos casos*)
  If[Sol == {}, Print["SATISFACE la identidad ", P],
  If[Sol == {}, Print["NO SATISFACE la identidad ", P],
  Print["SATISFACE la identidad ", P, " si:"];
  Print[Or @@ And @@@ Sol /. Rule -> Equal
    // LogicalExpand];]]
```

Como ejemplo, comprobaremos que $(N_2)_{3,2}$ es una álgebra de Lie.

```
In[7]:= (*Definimos los polinomios correspondientes a las
  identidades de anticonmutatividad y de Jacobi.
  La de Jacobi ya la tenemos*)
Anticonmutativa[x_, y_, A_] := m[x, y, A] + m[y, x, A];

In[8]:= (*Definimos el array correspondiente al producto de A*)
A = {{{0, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}},
  {{0, 0, -1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}};
```

```
MatrixForm[A]
```

```
(*Comprobamos si satisface las identidades*)
```

```
CheckClassP[A, Anticonmutativa, 2]
```

```
CheckClassP[A, IJacobi, 3]
```

$$\text{Out[8]=} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

```
SATISFACE la identidad Anticonmutativa
```

```
SATISFACE la identidad IJacobi
```

En efecto, la álgebra $(N_2)_{3,2}$ es de Lie.

De igual forma, podemos encontrar las álgebras de una familia de álgebras que cumple una cierta identidad. Por ejemplo, para la familia de álgebras de dimensión cinco correspondiente al siguiente *array* con parámetros a, b y c , comprobaremos si cumple alguna de las identidades que hemos definido en esta sección.

```
In[9]:= A = {{{0, 0, 1, 0, a},
              {0, b, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, 0, 0}}, {{0, c, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1},
              {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}},
              {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}},
              {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}, {{0, 0, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, 0, 0}}, {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0},
              {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}};
```

```
In[10]:= (*Comprobamos si satisface las identidades*)
```

```
CheckClassP[A, Asociativa, 3]
```

```
CheckClassP[A, IJacobi, 3]
```

```
CheckClassP[A, IMalcev, 3]
```

```

CheckClassP[A, IBinary, 2]
CheckClassP[A, Anticonmutativa, 2]

SATISFACE la identidad Asociativa si:
b==0&&c==0

SATISFACE la identidad IJacobi si:
(b==0&&c==0) || -c==b

SATISFACE la identidad IMalcev si:
(b==0&&c==0) || -c==b

SATISFACE la identidad IBinary si:
(b==0&&c==0) || -c==b

NO SATISFACE la identidad Anticonmutativa

```

Por lo que la familia que hemos considerado contiene:

- Álgebras asociativas cuando $b = c = 0$.
- Álgebras que cumplen la identidad de Jacobi cuando $b = -c$.
- Álgebras que cumplen la identidad de Malcev cuando $b = -c$.
- Ningún álgebra anticonmutativa y por tanto, ningún álgebra de Lie, ni de Malcev, ni de Lie-binaria.

Observación B.1. Toda álgebra satisface las identidades polinómicas $P_1 = 0$ y $P_2 = 0$ si y solo si satisface $P_1 + P_2 = 0$, para $P_i \in \mathbf{k}(X_i)$ con X_1 y X_2 conjuntos disjuntos de variables.

Por lo que para comprobar si una álgebra o una familia de álgebras cumple un conjunto de identidades que vienen dadas por polinomios $P_i \in \mathbf{k}(X_i)$, con X_i conjuntos disjuntos de s_i variables, bastará con introducir en la función el polinomio $P = \sum_{i=1}^s P_i \in \mathbf{k}(\cup_{i=1}^s X_i)$.

Por ejemplo, vamos a comprobar que $(N_2)_{3,2}$ es de Lie utilizando la función una sola vez.

```

In[11]:= AntiyJacobi[x1_, x2_, x3_, x4_, x5_, A] :=
Anticonmutativa[x1, x2, A]
+ IJacobi[x3, x4, x5, A];
CheckClassP[A, AntiyJacobi, 5]

SATISFACE la identidad AntiyJacobi

```

B.3. Cálculo del anulador de una álgebra

La siguiente función nos permite calcular el anulador de una álgebra o de una familia de álgebras.

```
In[12]:= CompAnn[A_] := Module[{dim, x, y, SolLog},
  (*Obtenemos dim(A)*)
  dim = Length[A];
  (*Encontramos los x en el anulador, resolviendo el
  sistema xy=0 && yx=0 para todo y*)
  x = Array[xc, dim];
  y = Array[yc, dim];
  SolLog = Reduce[Not[Eliminate[
    Not[m[x, y, A] == 0 && m[y, x, A] == 0],
    Flatten[y]]], Flatten[x]] // LogicalExpand;
  Print[SolLog];]
```

Como primer ejemplo, vamos a comprobar que el anulador de $D_2(0,0)$ es el espacio generado por e_2 .

```
In[13]:= (*Definimos el array correspondiente al producto de A
y aplicamos CompAnn*)
A = {{{1, 0}, {0, 0}}, {{0, 0}, {0, 0}}};
MatrixForm[A]
CompAnn[A]
```

Out[13]=
$$\left(\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$xc[1]==0$

Esta expresión indica que el anulador de la álgebra $D_2(0,0)$ está formado por los vectores (x_1, x_2) donde $x_1 = 0$, por lo que $Ann(D_2(0,0)) = \langle e_2 \rangle$.

Como segundo ejemplo, calcularemos el anulador de las álgebras cuya familia se corresponde con el siguiente *array* con parámetros a, b, c, d .

```

In[14]:= (*Definimos el array correspondiente al producto de A
y aplicamos CompAnn*)
A = {{{1, 0, 0}, {a, 0, 0}, {0, 0, 0}},
      {{b, 0, 0}, {c, d, 0}, {0, 0, 0}},
      {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}};

MatrixForm[A]

CompAnn[A]

Out[14]= 
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$


```

$(x[1]==0 \&\&x[2]==0) \ || \ (a==0 \&\&b==0 \&\&c==0 \&\&d==0 \&\&x[1]==0) \ ||$
 $(b==a \&\&-Sqrt[c]==b \&\&d==0 \&\&x[2]==-(x[1]/b) \&\&b!=0) \ ||$
 $(b==a \&\&Sqrt[c]==b \&\&d==0 \&\&x[2]==-(x[1]/b) \&\&b!=0)$

A partir de esta expresión lógica, deducimos que:

- Si $a = b = c = d = 0$, entonces el anulador es $\langle e_2, e_3 \rangle$.
- Si $a = b = \pm\sqrt{c}$, $c \neq 0$ y $d = 0$, entonces el anulador es $\langle e_1 - \frac{1}{b}e_2, e_3 \rangle$.
- En otro caso, el anulador es $\langle e_3 \rangle$.

B.4. Cálculo del grupo de automorfismos de una álgebra

A continuación, presentamos una función que permite calcular el grupo de automorfismos de una álgebra o de una familia de álgebras.

```

In[15]:= CompAut[A_] := Module[{dim, x, y, aut, SolLog,
SolRules},
  (*Obtenemos dim(A)*)
  dim = Length[A];

```

```

(*Calculamos todos los homomorfismos de A*)
x = Array[xc, dim];
y = Array[yc, dim];
aut = Array[autc, {dim, dim}];
SolLog = Reduce[Not[Eliminate[
Not[m[aut.x, aut.y, A] == aut.m[x, y, A]],
Union[Flatten[x], Flatten[y]]]], Flatten[aut]];
(*Mostramos solo los isomorfismos*)
SolRules = {ToRules[SolLog]};
Table[If[ToString[FullSimplify[
Det[aut /. SolRules[[k]]]] == "0", ,
Print[Or@And@@SolRules[[k]] /. Rule -> Equal
// LogicalExpand]], {k, 1, Length[SolRules]}];]

```

En el primer ejemplo, calcularemos el grupo de automorfismos de la álgebra de Lie-binaria g_1 .

```

In[16]:= (*Definimos el array correspondiente al producto de A
y aplicamos CompAut*)
A = {{{0, 0, 0, 0},
{0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}},
{{0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0}}, {{0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0},
{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}, {{0, 0, 0, -1},
{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}};
MatrixForm[A]
CompAut[A]

```

$$\text{Out[16]=} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{autc}[1,1]==1\&\&\text{autc}[1,2]==0\&\&\text{autc}[1,3]==0\&\&\text{autc}[1,4]==0$$

Por tanto, el grupo de automorfismos de g_1 está formado por matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

En el segundo ejemplo, calcularemos el grupo de automorfismos de las álgebras de Lie-binarias $g_2(a)$.

```
In[17]:= (*Definimos el array correspondiente al producto de A
y aplicamos CompAut*)
A = {{{0, 0, 0, 0},
      {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 1, a}},
      {{0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0},
      {0, 0, 0, 0}}, {{0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, 0},
      {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}, {{0, 0, -1, -a},
      {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}};
MatrixForm[A]
CompAut[A]
```

```

Out[17]=

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

a==0&&autc[1,1]==1&&autc[1,2]==0&&autc[1,3]==0&&
autc[1,4]==0&& autc[2,4]==autc[2,3]&&autc[4,2]==0
&&autc[4,3]==0&& autc[4,4]==autc[3,3]-autc[3,4]
  

a==1&&autc[1,1]==1&&autc[1,2]==0&&autc[1,3]==0&&
autc[1,4]==0&&autc[2,3]==0&&autc[4,2]==0&&
autc[4,3]==0&&autc[4,4]==autc[3,3]
  

autc[1,1]==1&&autc[1,2]==0&&autc[1,3]==0&&
autc[1,4]==0&&autc[2,4]==-(autc[2,3]/(-1+a))&&
autc[4,2]==0&&autc[4,3]==0&&
autc[4,4]==autc[3,3]-autc[3,4]+a autc[3,4]

```

Puesto que la primera y la segunda expresión lógica son casos particulares de la tercera, para cada $a \in k$, el grupo de automorfismos de la álgebra $g_2(a)$ está formado por las matrices no singulares de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & (1-a)x_{24} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & (1-a)x_{34} + x_{44} & x_{34} \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}.$$

B.5. Cálculo del espacio de cociclos de una álgebra

La última función que hemos desarrollado nos permite calcular el espacio de cociclos de una álgebra (o una familia de álgebras), cuya multiplicación viene dada

por un *array*, con respecto a k relativo a una identidad polinómica correspondiente a un polinomio de $k(\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\})$.

```
In[18]:= CompZ2P[A_, PZ2_, s_] := Module[{dim, xvectors, bil,
  SolLog},
  (*Obtenemos dim(A)*)
  dim = Length[A];
  (*Encontramos las aplicaciones bilineales que
  cumplen PZ2=0, para el producto de A*)
  xvectors = Array[x, {s, dim}];
  bil = Array[bilc, {dim, dim}];
  SolLog = Reduce[Not[Eliminate[
    Not[PZ2[Sequence @@ Table[xvectors[[k]],
    {k, 1, s}], A, bil] ==0], Flatten[xvectors]],
    Flatten[bil]] // LogicalExpand;
  Print[SolLog];]
```

Para utilizar esta función, es necesario introducir la condición que define a las aplicaciones bilineales del espacio de cociclos que estemos considerando. Algunos ejemplos (extraídos del Ejemplo 3.1) son los siguientes:

```
In[19]:= (*Propiedad del espacio de cociclos
  relativo a la identidad de Jacobi*)
ZJacobi[x_, y_, z_, A_, coc_] := (m[x, y, A].coc).z
  + (m[y, z, A].coc).x + (m[z, x, A].coc).y;
(*Propiedad del espacio de cociclos
  relativo a la identidad anticonmutativa*)
ZAnticonmutativa[x_, y_, A_, coc_] :=
  x.coc.y + y.coc.x;
```

Utilizando un argumento análogo al de la Observación B.1, podemos obtener el espacio de cociclos relativo a la clase de las álgebras de Lie a partir de la condición:

```
In[20]:= ZAntiyJacobi[x1_, x2_, x3_, x4_, x5_, A_, coc_] :=
      ZJacobi[x1, x2, x3, A, coc]
      + ZAnticonmutativa[x4, x5, A, coc];
```

De la misma forma, podemos definir el espacio de cociclos relativo a la clase de las álgebras de Malcev y a la clase de las álgebras de Lie-binarias.

```
In[21]:= ZMalcev[x_, y_, z_, A_, coc_] :=
      ZJacobi[x, y, m[x, z, A], A, coc]
      - IJacobi[x, y, z, A].coc.x;
ZAntiyMalcev[x1_, x2_, x3_, x4_, x5_, A_, coc_] :=
      ZMalcev[x1, x2, x3, A, coc]
      + ZAnticonmutativa[x4, x5, A, coc];

ZBinary[x_, y_, A_, coc_] :=
      ZJacobi[m[x, y, A], x, y, A, coc];
ZAntiyBinary[x1_, x2_, x3_, x4_, A_, coc_] :=
      ZBinary[x1, x2, A, coc]
      + ZAnticonmutativa[x3, x4, A, coc];
```

Como ejemplo, calcularemos el espacio de cociclos de las álgebras de Lie-binarias g_1 y $g_2(a)$ para $a \in k$, definidos en la sección anterior, relativos a las clases de las álgebras de Malcev y las álgebras de Lie-binarias. Así, para la álgebra g_1 tenemos:

```
In[22]:= CompZ2P[A, ZAntiyMalcev, 5]
CompZ2P[A, ZAntiyBinary, 4]

bilc[1,1]==0&&bilc[2,1]==-bilc[1,2]&&bilc[2,2]==0&&
bilc[2,3]==0&&bilc[2,4]==0&&bilc[3,1]==-bilc[1,3]&&
bilc[3,2]==0&&bilc[3,3]==0&&bilc[3,4]==0&&bilc[4,4]==0&&
bilc[4,1]==-bilc[1,4]&&bilc[4,2]==0&&bilc[4,3]==0&&

bilc[1,1]==0&&bilc[2,1]==-bilc[1,2]&&bilc[2,2]==0&&
bilc[3,1]==-bilc[1,3]&&bilc[3,2]==-bilc[2,3]&&bilc[4,4]==0&&
bilc[3,3]==0&&bilc[4,1]==-bilc[1,4]&&bilc[4,2]==-bilc[2,4]&&
bilc[4,3]==-bilc[3,4]
```

Así, deducimos que $Z_M^2(g_1, \mathbf{C}) = \langle \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14} \rangle$ y $Z_{BL}^2(g_1, \mathbf{C}) = Z_{anti}^2(g_1, \mathbf{C})$ que, como sabemos, es el espacio de las aplicaciones bilineales antisimétricas.

Por otro lado, para la familia de álgebras $g_2(a)$ obtenemos:

In[23]:= **CompZ2P[A, ZAntiyMalcev, 5]**

CompZ2P[A, ZAntiyBinary, 4]

```
(a== -1 && bilc[1,1]==0 && bilc[2,1]== -bilc[1,2] &&
bilc[2,2]==0 && bilc[2,3]==0 && bilc[3,1]== -bilc[1,3] &&
bilc[3,2]==0 && bilc[3,3]==0 && bilc[4,1]== -bilc[1,4] &&
bilc[4,2]== -bilc[2,4] && bilc[4,3]== -bilc[3,4] &&
bilc[4,4]==0) || (bilc[1,1]==0 && bilc[2,1]== -bilc[1,2] &&
bilc[2,2]==0 && bilc[2,3]==0 && bilc[2,4]==0 &&
bilc[3,1]== -bilc[1,3] && bilc[3,2]==0 && bilc[3,3]==0 &&
bilc[3,4]==0 && bilc[4,1]== -bilc[1,4] && bilc[4,2]==0 &&
bilc[4,3]==0 && bilc[4,4]==0 && 1+a != 0)
```

```
(a== -1 && bilc[1,1]==0 && bilc[2,1]== -bilc[1,2] && bilc[2,2]==0 &&
bilc[3,1]== -bilc[1,3] && bilc[3,2]== -bilc[2,3] && bilc[3,3]==0 &&
bilc[4,1]== -bilc[1,4] && bilc[4,2]== -bilc[2,4] && bilc[4,4]==0 &&
bilc[4,3]== -bilc[3,4]) ||
```

```
(a== 1 && bilc[1,1]==0 && bilc[2,1]== -bilc[1,2] && bilc[2,2]==0 &&
bilc[2,3]==0 && bilc[3,1]== -bilc[1,3] && bilc[3,2]==0 &&
bilc[3,3]==0 && bilc[3,4]==0 && bilc[4,1]== -bilc[1,4] &&
bilc[4,2]== -bilc[2,4] && bilc[4,3]==0 && bilc[4,4]==0) ||
(bilc[1,1]==0 && bilc[2,2]==0 && bilc[2,1]== -bilc[1,2] &&
bilc[2,4]== - (bilc[2,3] / (-1+a)) && bilc[3,1]== -bilc[1,3] &&
bilc[3,3]==0 && bilc[3,2]== -bilc[2,3] && bilc[3,4]==0 &&
bilc[4,1]== -bilc[1,4] && bilc[4,2]== -bilc[2,4] &&
bilc[4,3]==0 && bilc[4,4]==0 && (-1+a) (1+a) != 0)
```

Por tanto, tenemos que:

- Si $a = 1$, entonces

$$Z_M^2(g_2(1), \mathbf{C}) = \langle \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14} \rangle \text{ y } Z_{BL}^2(g_2(1), \mathbf{C}) = \langle \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14}, \Lambda_{24} \rangle.$$

- Si $a = -1$, entonces

$$Z_M^2(g_2(-1), \mathbb{C}) = \langle \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14}, \Lambda_{24}, \Lambda_{34} \rangle \text{ y } Z_{BL}^2(g_2(-1), \mathbb{C}) = Z_{anti}^2(g_2(-1), \mathbb{C}).$$

- En otro caso, tenemos que

$$Z_M^2(g_2(a), \mathbb{C}) = \langle \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14} \rangle \text{ y } Z_{BL}^2(g_2(a), \mathbb{C}) = \langle \Lambda_{12}, \Lambda_{13}, \Lambda_{14}, (1-a)\Lambda_{23} + \Lambda_{24} \rangle.$$

A partir de esta función, y utilizando el Lema 2.7, podemos calcular fácilmente el segundo espacio de cohomología de una álgebra con respecto a k relativo a una clase.

Apéndice C

Tablas de clasificación

$A_{01}(\alpha)$: $(A_1(\alpha \neq 0))_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1 + e_2$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2 + e_3$	$e_2e_2 = 0$
A_{02}	: $(A_1(0))_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1 + e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_2$	$e_2e_2 = 0$
$A_{03}(\alpha)$: $(A_1(\alpha \neq \frac{1}{2}))_{3,2}$: $e_1e_1 = e_1 + e_2$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{04}(\lambda)$: $(A_1(\frac{1}{2}))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1 + e_2$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_2$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_2 + \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_3$
A_{05}	: $(A_2)_{3,1}$: $e_1e_1 = e_2 + e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = 0$
A_{06}	: $(A_2)_{3,2}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{07}(\lambda)$: $(A_2)_{3,3}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_2 + \lambda e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = e_3$
A_{08}	: $(A_3)_{3,1}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
A_{09}	: $(A_3)_{3,2}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
A_{10}	: $(A_3)_{3,3}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{11}(\lambda)$: $(A_3)_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{12}(\alpha)$: $(A_4(\alpha))_{3,1}$: $e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2$	$e_2e_1 = -e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{13}(\alpha, \lambda)$: $(A_4(\alpha \neq 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = -e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{14}(\lambda)$: $(A_4(0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1 + e_3$	$e_2e_1 = -e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{15}(\alpha)$: $(B_1(\alpha))_{3,1}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{16}(\alpha, \lambda)$: $(B_1(\alpha))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{17}(\alpha)$: $(B_2(\alpha))_{3,1}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{18}(\alpha)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{3,2}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
A_{19}	: $(B_2(0))_{3,2}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{20}(\alpha)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{3,3}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = 0$
A_{21}	: $(B_2(0))_{3,3}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{22}(\alpha)$: $(B_2(\alpha))_{3,4}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = 0$
$A_{23}(\alpha)$: $(B_2(\alpha))_{3,5}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{24}(\alpha, \lambda)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{3,6}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{25}(\lambda)$: $(B_2(0))_{3,6}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$

TABLA C.1: Álgebras de dimensión tres con anulador de dimensión uno módulo isomorfismos. Parte 1.

A_{26}	:	$(\mathbf{B}_3)_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = 0$
A_{27}	:	$(\mathbf{B}_3)_{3,2}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_3$	$e_2e_2 = 0$
A_{28}	:	$(\mathbf{B}_3)_{3,3}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = e_3$
A_{29}	:	$(\mathbf{B}_3)_{3,4}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{30}(\alpha, \beta)$:	$(\mathbf{C}(\alpha, \beta))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_2 + e_3$
$A_{31}(\alpha, \lambda)$:	$(\mathbf{C}(\alpha \neq 0, 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$A_{32}(\lambda)$:	$(\mathbf{C}(0, 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$A_{33}(\alpha, \beta, \lambda)$:	$(\mathbf{C}(\alpha \neq 0, \beta \neq 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$A_{34}(\beta, \lambda)$:	$(\mathbf{C}(0, \beta \neq 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = -\beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2 + \lambda e_3$
$A_{35}(\alpha, \beta)$:	$(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{36}(\alpha, \lambda)$:	$(\mathbf{D}_1(\alpha \neq \frac{1}{2}, 0))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{37}(\lambda)$:	$(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0))_{3,2}((\lambda, 0) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{38}(\alpha, \lambda, \mu)$:	$(\mathbf{D}_1(\alpha \neq \frac{1}{2}, 0))_{3,3}(\lambda, \mu \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \lambda e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \mu e_3$
$A_{39}(\mu, \lambda)$:	$(\mathbf{D}_1(\frac{1}{2}, 0))_{3,3}((\mu, \lambda) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + \lambda e_3$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \mu e_3$
$A_{40}(\alpha, \lambda)$:	$(\mathbf{D}_1(\alpha, 2\alpha - 1 \neq 0))_{3,4}((\lambda, 0) \in \mathcal{U})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + (2\alpha - 1)e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - (2\alpha - 1)e_2 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{41}(\alpha, \beta, \lambda)$:	$(\mathbf{D}_1(\alpha, \beta))_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})(\beta \neq 2\alpha - 1, 0)$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{42}(\alpha, \beta)$:	$(\mathbf{D}_2(\alpha, \beta))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{43}(\alpha)$:	$(\mathbf{D}_2(\alpha, 0))_{3,2}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{44}(\alpha)$:	$(\mathbf{D}_2(\alpha, 0))_{3,3}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{45}(\lambda)$:	$(\mathbf{D}_2(0, 0))_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{46}(\lambda)$:	$(\mathbf{D}_2(0, 0))_{3,5}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{47}(\alpha, \beta)$:	$(\mathbf{D}_2(\alpha, \beta \neq 0))_{3,6}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{48}(\alpha, \beta)$:	$(\mathbf{D}_2(\alpha, \beta \neq 0))_{3,7}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = 0$
$A_{49}(\alpha, \beta)$:	$(\mathbf{D}_3(\alpha, \beta))_{3,1}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2$	$e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{50}(\beta, \lambda)$:	$(\mathbf{D}_3(0, \beta))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_3$	$e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2$	$e_2e_2 = \lambda e_3$

TABLA C.2: Álgebras de dimensión tres con anulador de dimensión uno módulo isomorfismos. Parte 2.

$A_{51}(\lambda, \mu)$: $(D_3(0, 0))_{3,3}(\lambda, \mu \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + \lambda e_3$	$e_2e_1 = -e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \mu e_3$
$A_{52}(\alpha, \beta, \lambda)$: $(D_3(\alpha \neq 0, \beta))_{3,4}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2$	$e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
$A_{53}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$: $(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{54}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$: $(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$ ($\gamma \neq \beta \circ \delta \neq \alpha$)	: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2 + \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{55}(\alpha, \beta, \lambda)$: $(E_1(\alpha, \beta, \beta, \alpha))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{>1}^* \cup \{1\})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_1 + \alpha e_2 + \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{56}(\alpha, \beta, \gamma)$: $(E_2(\alpha, \beta, \gamma))_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{57}(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$: $(E_2(\alpha, \beta, \gamma))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2 + \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{58}(\alpha, \beta, \gamma)$: $(E_3(\alpha, \beta, \gamma))_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma}e_2$	$e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma}e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{59}(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$: $(E_3(\alpha, \beta, \gamma))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$ ($\beta \neq \alpha \circ \gamma \neq -1$)	: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma}e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma}e_2 + \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{60}(\alpha, \lambda)$: $(E_3(\alpha, \alpha, -1))_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k}_{>1}^* \cup \{1\})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = -(1 - \alpha)e_1 - \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = -\alpha e_1 - (1 - \alpha)e_2 + \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_2$
A_{61}	: $(E_4)_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{62}(\lambda)$: $(E_4)_{3,2}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \lambda e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{63}(\alpha)$: $(E_5(\alpha))_{3,1}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{64}(\alpha)$: $(E_5(\alpha))_{3,2}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2 - e_3$	$e_2e_2 = e_2$
A_{65}	: $(E_5(1/2))_{3,3}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2$
A_{66}	: $(N_2)_{3,1}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = 0$	$e_2e_2 = e_3$
A_{67}	: $(N_2)_{3,2}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = -e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{68}(\lambda)$: $(N_2)_{3,3}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = \lambda e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_3$

TABLA C.3: Álgebras de dimensión tres con anulador de dimensión uno módulo isomorfismos. Parte 3.

$A_{69}(\alpha)$: $(A_1(\alpha \neq 0))_{4,3}$: $e_1e_1 = e_1 + e_2$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = (1 - \alpha)e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
A_{70}	: $(A_1(0))_{4,3}$: $e_1e_1 = e_1 + e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_2$	$e_2e_2 = e_4$
A_{71}	: $(A_2)_{4,4}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{72}(\lambda)$: $(A_2)_{4,5}(\lambda \in k)$: $e_1e_1 = e_2 + e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_4$	$e_2e_2 = \lambda e_3$
A_{73}	: $(A_2)_{4,6}$: $e_1e_1 = e_2 + e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = e_4$
A_{74}	: $(A_3)_{4,5}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3$
A_{75}	: $(A_3)_{4,6}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = 0$
$A_{76}(\lambda)$: $(A_3)_{4,7}(\lambda \in k)$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
A_{77}	: $(A_3)_{4,8}$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_3 + e_4$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{78}(\alpha)$: $(A_4(\alpha))_{4,3}$: $e_1e_1 = \alpha e_1 + e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = -e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{79}(\alpha)$: $(B_1(\alpha))_{4,3}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - e_2$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{80}(\alpha)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{4,7}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
A_{81}	: $(B_2(0))_{4,7}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{82}(\alpha)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{4,8}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_3$
A_{83}	: $(B_2(0))_{4,8}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{84}(\alpha)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{4,9}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = 0$
A_{85}	: $(B_2(0))_{4,9}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
$A_{86}(\alpha)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{4,10}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
A_{87}	: $(B_2(0))_{4,10}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{88}(\alpha)$: $(B_2(\alpha))_{4,11}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{89}(\alpha, \lambda)$: $(B_2(\alpha \neq 0))_{4,12}(\lambda \in k)$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \lambda e_3 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{90}(\lambda)$: $(B_2(0))_{4,12}(\lambda \in k)$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = \lambda e_3 + e_4$	$e_2e_2 = e_4$
A_{91}	: $(B_3)_{4,5}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
A_{92}	: $(B_3)_{4,6}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_3$
A_{93}	: $(B_3)_{4,7}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_4$	$e_2e_2 = 0$

TABLA C.4: Álgebras de dimensión cuatro con anulador de dimensión dos módulo isomorfismos. Parte 1.

A_{94}	: $(B_3)_{4,8}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{95}(\alpha, \beta, \lambda)$: $(C(\alpha \neq 0, \beta))_{4,3}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2$	$e_2e_2 = e_2 + e_4$
$A_{96}(\beta, \lambda)$: $(C(0, \beta))_{4,3}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = -\beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_2 + e_4$
$A_{97}(\alpha, \beta)$: $(D_1(\alpha, \beta))_{4,5}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2$	$e_2e_1 = \alpha e_1 - \beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{98}(\alpha, \lambda)$: $(D_1(\alpha, 0))_{4,6}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{99}(\alpha, \lambda, \mu)$: $(D_1(\alpha \neq \frac{1}{2}, 0))_{4,7}(\lambda, \mu \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + \mu e_4$
$A_{100}(\lambda, \mu)$: $(D_1(\frac{1}{2}, 0))_{4,7}((\lambda, 0), (\mu, 0) \in \mathcal{U})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \frac{1}{2}e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \frac{1}{2}e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + \mu e_4$
$A_{101}(\alpha)$: $(D_2(\alpha, 0))_{4,8}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = e_4$
A_{102}	: $(D_2(0, 0))_{4,9}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_4$
A_{103}	: $(D_2(0, 0))_{4,10}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
$A_{104}(\lambda)$: $(D_2(0, 0))_{4,11}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{105}(\lambda)$: $(D_2(0, 0))_{4,12}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + e_4$
$A_{106}(\alpha, \beta)$: $(D_2(\alpha, \beta \neq 0))_{4,13}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \beta e_2$	$e_2e_2 = e_4$
A_{107}	: $(D_3(0, 0))_{4,5}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = -e_1 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{108}(\alpha, \beta)$: $(D_3(\alpha \neq 0, \beta))_{4,5}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + \alpha e_2$	$e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{109}(\lambda)$: $(D_3(0, 0))_{4,6}(\lambda \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_4$	$e_2e_1 = -e_1 + \lambda e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$A_{110}(\lambda, \mu)$: $(D_3(0, 0))_{4,7}(\lambda, \mu \in \mathbf{k})$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_4$	$e_2e_1 = -e_1 + e_3$	$e_2e_2 = \lambda e_3 + \mu e_4$
$A_{111}(\beta)$: $(D_3(0, \beta \neq 0))_{4,8}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_3$	$e_2e_1 = -e_1 + \beta e_2$	$e_2e_2 = e_4$
$A_{112}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$: $(E_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta))_{4,3}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \gamma e_1 + \delta e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{113}(\alpha, \beta, \gamma)$: $(E_2(\alpha, \beta, \gamma))_{4,3}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \beta e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + \gamma e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{114}(\alpha, \beta, \gamma)$: $(E_3(\alpha, \beta, \gamma))_{4,3}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)\gamma e_1 + \frac{\beta}{\gamma}e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha\gamma e_1 + \frac{1-\beta}{\gamma}e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_2$
A_{115}	: $(E_4)_{4,3}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_2 + e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_2$
$A_{116}(\alpha)$: $(E_5(\alpha))_{4,4}$: $e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + \alpha e_2 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + (1 - \alpha)e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_2$
A_{117}	: $(N_2)_{4,4}$: $e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$
A_{118}	: $(N_2)_{4,5}$: $e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = 0$

TABLA C.5: Álgebras de dimensión cuatro con anulador de dimensión dos módulo isomorfismos. Parte 2.

\mathbf{A}_{120}	:	$(\mathbf{N}_2)_{4,7}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3$
$\mathbf{A}_{121}(\lambda)$:	$(\mathbf{N}_2)_{4,8}(\lambda \in \mathbf{k}_{\geq 0})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = 0$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_3 + \lambda e_4$
$\mathbf{A}_{122}(\lambda)$:	$(\mathbf{N}_2)_{4,9}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = \lambda e_4$	$e_2e_2 = 0$
\mathbf{A}_{123}	:	$(\mathbf{A}_2)_{5,7}$:	$e_1e_1 = e_2 + e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{124}	:	$(\mathbf{A}_3)_{5,8}$:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$\mathbf{A}_{125}(\alpha)$:	$(\mathbf{B}_2(\alpha \neq 0))_{5,13}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_4$	$e_2e_1 = \alpha e_1$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{126}	:	$(\mathbf{B}_2(0))_{5,13}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_1$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{127}	:	$(\mathbf{B}_3)_{5,9}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_2$	$e_2e_1 = -e_2 + e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$\mathbf{A}_{128}(\alpha)$:	$(\mathbf{D}_1(\alpha, 0))_{5,9}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = (1 - \alpha)e_1 + e_3$	$e_2e_1 = \alpha e_1 + e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{129}	:	$(\mathbf{D}_2(0, 0))_{5,14}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{130}	:	$(\mathbf{D}_3(0, 0))_{5,9}$:	$e_1e_1 = e_1$	$e_1e_2 = e_1 + e_3$	$e_2e_1 = -e_1 + e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{131}	:	$(\mathbf{N}_2)_{5,10}$:	$e_1e_1 = 0$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{132}	:	$(\mathbf{N}_2)_{5,11}$:	$e_1e_1 = e_5$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
\mathbf{A}_{133}	:	$(\mathbf{N}_2)_{5,12}$:	$e_1e_1 = e_3$	$e_1e_2 = e_4$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$
$\mathbf{A}_{134}(\lambda)$:	$(\mathbf{N}_2)_{5,13}(\lambda \in \mathbf{k})$:	$e_1e_1 = e_3 + \lambda e_5$	$e_1e_2 = e_3$	$e_2e_1 = e_4$	$e_2e_2 = e_5$

TABLA C.6: Álgebras de dimensión cinco con anulador de dimensión tres módulo isomorfismos.

Bibliografía

- [1] I. Kaygorodov and Yu. Volkov.
The variety of two-dimensional algebras over an algebraically closed field.
Canadian Journal of Mathematics, 71(4):819–842, 2019.
- [2] A. J. Calderón, A. Fernández, and I. Kaygorodov.
The classification of 2-dimensional rigid algebras.
Linear and Multilinear Algebra, pages 1–17, 2018.
- [3] Abdelwahab H., Calderón A.J., and Kaygorodov I.
The algebraic and geometric classification of nilpotent binary Lie algebras.
International Journal of Algebra and Computation, 29(6), 2019.
- [4] Ancochea Bermúdez J.M., Fresán J., and Margalef Bentabol J.
Contractions of low-dimensional nilpotent Jordan algebras.
Communications in Algebra, 39(3):1139–1151, 2011.
- [5] Cicalò S., De Graaf W., and Schneider C.
Six-dimensional nilpotent Lie algebras.
Linear Algebra and its Applications, 436(1):163–189, 2012.
- [6] Darijani I. and Usefi H.
The classification of 5-dimensional p -nilpotent restricted Lie algebras over perfect fields.
Journal of Algebra, 464:97–140, 2016.
- [7] De Graaf W.
Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras.
Journal of Algebra, 309(2):640–653, 2007.
- [8] De Graaf W.
Classification of nilpotent associative algebras of small dimension.
International Journal of Algebra and Computation, 28(1):133–161, 2018.

- [9] Demir I., Misra K., and Stitzinger E.
On classification of four-dimensional nilpotent Leibniz algebras.
Communications in Algebra, 45(3):1012–1018, 2017.
- [10] Gorshkov I., Kaygorodov I., Kytmanov A., and Salim M.
The variety of nilpotent Tortkara algebras.
Journal of Siberian Federal University, 12(2):173–184, 2019.
- [11] N. Ismailov, I. Kaygorodov, and Yu. Volkov.
Degenerations of Leibniz and anticommutative algebras.
Canadian Mathematical Bulletin, 62(3):539–549, 2019.
- [12] Hegazi A., Abdelwahab H., and Calderón Martín A.
Classification of nilpotent Malcev algebras of small dimensions.
Algebras and Representation Theory, 21(9):19–45, 2018.
- [13] Karimjanov I., Kaygorodov I., and Khudoyberdiyev A.
The algebraic and geometric classification of nilpotent Novikov algebras.
Journal of Geometry and Physics, 143, 2019.
- [14] N. Ismailov, I. Kaygorodov, and Yu. Volkov.
The geometric classification of Leibniz algebras.
International Journal of Mathematics, 29(05):1850035, 2018.
- [15] I. Kaygorodov, Yu. Popov, A. Pozhidaev, and Yu. Volkov.
Degenerations of Zinbiel and nilpotent Leibniz algebras.
Linear and Multilinear Algebra, 66(4):704–716, 2018.
- [16] Alvarez M.A.
On rigid 2-step nilpotent Lie algebras.
Algebra Colloquium, 25(2):349–360, 2018.
- [17] Alvarez M.A.
The variety of 7-dimensional 2-step nilpotent Lie algebras.
Symmetry, 1(10):26, 2018.
- [18] Alvarez M.A. and Hernández I.
On degenerations of Lie superalgebras.
Linear and Multilinear Algebra, 69(1), 2018.

- [19] Alvarez M.A., Hernández I., and Kaygorodov I.
Degenerations of Jordan superalgebras.
Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 42, 2018.
- [20] Beneš T. and Burde D.
Classification of orbit closures of three-dimensional Novikov algebras.
Journal of Algebra and its Applications, 13(2):33, 2014.
- [21] Burde D. and Steinhoff C.
Classification of orbit closures of 4-dimensional complex Lie algebras.
Journal of Algebra, 214(2):729–739, 1999.
- [22] Grunewald F. and O’Halloran J.
Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six.
Journal of Algebra, 112(2):315–325, 1988.
- [23] Grunewald F. and O’Halloran J.
A characterization of orbit closure and applications.
Journal of Algebra, 116(1):163–175, 1988.
- [24] Lauret J.
Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups.
Differential Geometry and its Applications, 18(2):177–194, 2003.
- [25] Gorbatsevich V.
On contractions and degeneracy of finite-dimensional algebras.
Soviet Mathematics (Iz. VUZ), 10(35):17–24, 1991.
- [26] Gorbatsevich V.
Anticommutative finite-dimensional algebras of the first three levels.
St. Petersburg Mathematical Journal, 5(3):505–521, 1994.
- [27] Gorbatsevich V.
On the level of some solvable Lie algebras.
Siberian Mathematical Journal, 39(5):872–883, 1998.
- [28] A. Kh. Khudoyberdiyev.
The classification of algebras of level two.
Journal of Geometry and Physics, 98:13 – 20, 2015.

- [29] M. Schottenloher.
A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory (2nd ed.).
Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [30] E. A. De Kerf, G. G. A. B auerle, and A. P. E. Ten Kroode.
Lie Algebras. Part 2. Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics, volume 7.
North-Holland Publishing Co., 1997.
- [31] L. Dolan.
The beacon of Kac–Moody symmetry for Physics.
Notices of the AMS, 42(12), 1995.
- [32] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten.
Superstring Theory. Vol. 1.
Cambridge University Press, 1987.
- [33] E. Wigner.
Group Theory and Applications to Quantum Mechanics.
New York: Academic Press, 1959.
- [34] T. Skjelbred and T. Sund.
Sur la classification des alg ebres de Lie nilpotentes.
Comptes rendus de l’Académie des Sciences, 286(5), 1978.
- [35] A. S. Hegazi, H. Abdelwahab, and A. J. Calderón.
The classification of n -dimensional non-Lie Malcev algebras with $(n-4)$ -dimensional annihilator.
Linear Algebra and its Applications, 505:32 – 56, 2016.
- [36] A. S. Hegazi and J. Abdelwahab.
The classification of n -dimensional non-associative Jordan algebras with $(n-3)$ -dimensional annihilator.
Communications in Algebra, 46(2):629–643, 2018.
- [37] J. K. Adashev, L. M. Camacho, and B. A. Omirov.
Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras.

- Journal of Algebra*, 479:461 – 486, 2017.
- [38] A. J. Calderón, A. Fernández, and I. Kaygorodov.
The classification of n -dimensional anticommutative algebras with $(n-3)$ -dimensional annihilator.
Communications in Algebra, 47(1):173–181, 2019.
- [39] I. Rakhimov and M. Hassan.
On one-dimensional Leibniz central extensions of a filiform Lie algebra.
Bulletin of the Australian Mathematical Society, 84(2):205–224, 2011.
- [40] Paul Zusmanovich.
Central extensions of current algebras.
Transactions of the American Mathematical Society, 334(1):143–152, 1992.
- [41] I. Kantor.
Certain generalizations of Jordan algebras.
Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal., 16:407–499, 1972.
- [42] J. P. Tian and P. Jianjun.
Evolution Algebras and Their Applications.
Number 1921 in *Evolution Algebras and Their Applications*. Springer, 2008.
- [43] A. J. Calderón, A. Fernández, and I. Kaygorodov.
On the classification of bilinear maps with radical of a fixed codimension.
Linear and Multilinear Algebra. En prensa, 2020.
- [44] A. Fernández, I. Kaygorodov, M. Khrypchenko, and Yu. Volkov.
Degenerations of nilpotent algebras.
Prepublicación, 2020.
- [45] Yuji Kobayashi, Kiyoshi Shirayanagi, Sin-Ei Takahasi, and Makoto Tsukada.
Classification of three-dimensional zeropotent algebras over an algebraically closed field.
Communications in Algebra, 45(12):5037–5052, 2017.
- [46] H. Abdelwahab, A. J. Calderón, and A. Fernández.
Central extensions of 4-dimensional binary-Lie algebras.
Rocky Mountain Journal of Mathematics. En prensa, 2020.

[47] I. Kaygorodov, Yu. Popov, and Yu. Volkov.

Degenerations of binary-Lie and nilpotent Malcev algebras.

Communications in Algebra, 46(11):4929–4941, 2018.