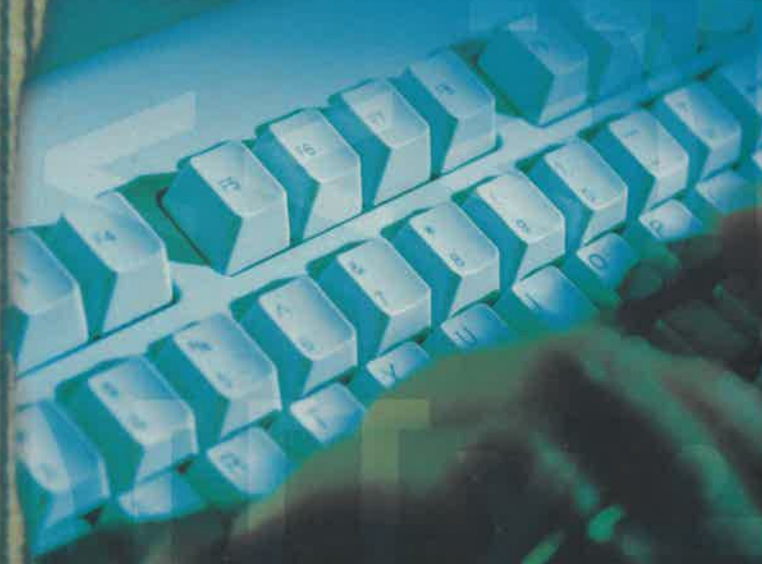
Rosa Rodríguez Huertas • Antonio Gámez Mellado

Investigación operativa

Teoría, Ejercicios y Prácticas con ordenador



textos básicos
UNIVERSITARIOS
11

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

Investigación Operativa

Teoría, ejercicios y prácticas con ordenador

Rosa Rodríguez Huertas / Antonio Gámez Mellado

UCA Universidad de Cádiz

Servicio de Publicaciones
2002

Rodríguez Huertas, Rosa

Investigación operativa : teoría, ejercicios y prácticas con ordenador / Rosa Rodríguez Huertas, Antonio Gámez Mellado. -- Cádiz : Universidad, Servicio de Publicaciones, 1998. -- p.

ISBN 84-7786-775-5

1. Investigación operativa - Tratados, manuales, etc. 2. Programación lineal - Tratados, manuales, etc. I. Gámez Mellado, Antonio. II. Universidad de Cádiz. Servicio de Publicaciones, ed. III. Título.

658.012.1

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz

Depósito legal: CA-693/02
I.S.B.N.: 84-7786-775-5

Diseño: Cadigrafía
Maquetación y fotomecánica: Produce
Imprime: Imprenta Repeto

INVESTIGACIÓN OPERATIVA.

Teoría, Ejercicios y Prácticas con Ordenador

Rosa Rodríguez Huertas   Antonio Gámez Mellado

10 de Septiembre de 2002

Índice General

INTRODUCCIÓN

Este libro está concebido con el propósito de cubrir los conceptos y técnicas básicas de la Investigación Operativa y pone el mayor énfasis en sus aplicaciones a problemas reales. Los destinatarios de este texto son las personas, estudiantes o profesionales, que se inicien en el estudio de las distintas técnicas que la Investigación Operativa nos suministra para el estudio de los problemas de optimización que surgen a diario en el mundo de la empresa y de la administración, problemas que pretenden dar el máximo rendimiento a los recursos disponibles y, por lo general, limitados. Está especialmente diseñado para alumnos de las Escuelas de Ingeniería o para estudios de Ciencias Económicas y Empresariales y es fruto de la experiencia de los autores, ambos profesores de Estadística e Investigación Operativa de la Escuela Superior de Ingeniería de la Universidad de Cádiz.

El libro está organizado en tres secciones:

Una primera parte teórica donde se recogen sobre todo los conceptos fundamentales y los algoritmos más usuales en la resolución de problemas de optimización, ilustrando todos los aspectos mencionados con abundantes ejemplos. En los cuatro primeros temas se trata la Programación Lineal, la Dualidad en Programación Lineal y los problemas de Sensibilidad del algoritmo de Simplex. Los siguientes temas están dedicados a algoritmos especiales de optimización, incluyéndose el problema de transporte, problemas de redes y programación con variable entera o binaria. El libro contiene también un capítulo de Teoría de Colas, así como otro que trata los temas más básicos de las Técnicas de Simulación, incluyendo programas en Fortran y en otros lenguajes de Programación.

La segunda parte, dedicada a problemas sobre los temas tratados en la teoría, contiene una sección de ejercicios totalmente resueltos y otra de ejercicios propuestos con su solución.

La tercera parte contiene diversos problemas realizados con el Programa LINGO publicado por LINDO SYSTEMS. INC., incluyendo instrucciones de uso de los comandos de este programa.

Esperamos que los lectores encuentren útil este manual para el estudio y las aplicaciones de la Investigación Operativa y sean capaces de resolver los problemas que se les planteen en este campo. De esta forma, veremos cumplido nuestro objetivo.

LOS AUTORES

Parte I

TEORÍA

Tema 1

Introducción a la teoría de optimización

1.1 Orígenes y desarrollo

En los siglos XVII y XVIII, grandes matemáticos como Newton, Leibnitz, Bernoulli y, sobre todo, Lagrange, que tanto habían contribuido al desarrollo del cálculo infinitesimal, se ocuparon de obtener máximos y mínimos condicionados de determinadas funciones.

Posteriormente el matemático francés Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) fue el primero en intuir, aunque de forma imprecisa, los métodos de lo que actualmente llamamos programación lineal y la potencialidad que de ellos se deriva.

Si exceptuamos al matemático Gaspar Monge (1746-1818), quien en 1776 se interesó por problemas de este género, debemos remontarnos al año 1939 para encontrar nuevos estudios relacionados con los métodos de la actual programación lineal. En este año, el matemático ruso Leonodas Vitalyevich Kantarovitch publica una extensa monografía titulada *Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción* en la que por primera vez se hace corresponder a una extensa gama de problemas una teoría matemática precisa y bien definida llamada, hoy en día, programación lineal.

En 1941-1942 se formula por primera vez el problema de transporte, estudiado independientemente por Koopmans y Kantarovitch, razón por la cual se suele conocer con el nombre de problema de Koopmans-Kantarovitch.

Tres años más tarde, G. Stigler plantea otro problema particular conocido con el nombre de régimen alimenticio optimal.

1.1.1 Orígenes de la Investigación operativa

La **Investigación Operativa (I.O.)** es una ciencia relativamente joven. Los primeros resultados importantes se consiguieron durante la II Guerra Mundial. En la batalla de Inglaterra el ejército alemán sometió a los británicos a un duro ataque aéreo. El gobierno estaba explorando cualquier método para defender el país. Los ingleses tenían una fuerza aérea hábil, aunque pequeña, pero disponía de radares. Se plantearon sacarle al radar el máximo rendimiento. El gobierno convocó a media docena de científicos de diversas disciplinas para resolver este problema. Así diseñaron una nueva técnica, la Investigación Operativa, que duplicó la efectividad del sistema de defensa aérea mediante una localización óptima para las antenas y una mejor distribución de las señales.

Alentados por este éxito, Inglaterra organizó equipos similares para resolver otros problemas militares. EE.UU. hizo lo mismo cuando entró en guerra, creándose el proyecto *(SCOOP Scientific Computation of Optimum Programs)* que desarrolló el algoritmo **Simplex** *(George B. Dantzing, 1947).*

Una de las primeras aplicaciones de los estudios del grupo SCOOP fue el puente aéreo de Berlín. Se continuó con infinidad de aplicaciones de tipo preferentemente militar.

En 1946 comienza el largo período de la guerra fría entre la antigua Unión Soviética (URSS) y las potencias aliadas (principalmente, Inglaterra y Estados Unidos). Uno de los episodios más llamativos de esa guerra fría se produjo a mediados de 1948 cuando la URSS bloqueó las comunicaciones terrestres desde las zonas alemanas en poder de los aliados con la ciudad de Berlín, iniciando el bloqueo de Berlín. A los aliados se les plantearon dos posibilidades: o romper el bloqueo terrestre por la fuerza, o llegar a Berlín por el aire. Se adoptó la decisión de programar una demostración técnica del poder aéreo norteamericano; a tal efecto, se organizó un gigantesco puente aéreo para abastecer la ciudad: en diciembre de 1948 se estaban transportando 4500 toneladas diarias; en marzo de 1949, se llegó a las 8000 toneladas, tanto como se transportaba por carretera y ferrocarril antes del corte de las comunicaciones. En la planificación de los suministros se utilizó la programación lineal. (El 12 de mayo de 1949, los soviéticos levantaron el bloqueo).

En estos años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, en Estados Unidos se asumió que la eficaz coordinación de todas las energías y recursos de la nación era un problema de tal complejidad, que su resolución y simplificación pasaba necesariamente por los modelos de optimización que resuelve la programación lineal.

Paralelamente a los hechos descritos se desarrollan las técnicas de computación y los ordenadores, instrumentos que harían posible la resolución y simplificación de los problemas que se estaban gestando.

En 1952 un ordenador *SEAC del National Bureau of Standars* proporcionó la primera solución de un problema de programación lineal, que es el tema del que nos ocuparemos al principio del libro. Se obtuvieron soluciones para los problemas de determinar la altura óptima a la que deberían volar los aviones para localizar los submarinos enemigos, además resolvieron el problema del reparto de fondos entre combustible, armamento, instrumentos, equipos, etc ... También se determinó la profundidad a la que había que enviar las cargas para alcanzar a los submarinos enemigos con mayor efectividad. En este aspecto los resultados de la Investigación Operativa multiplicaron por cinco la eficacia de la fuerza aérea.

Los fundamentos matemáticos de la programación lineal se deben al matemático norteamericano de origen húngaro Janos von Neuman (1903-1957), quien en 1928 publicó su famoso trabajo Teoría de Juegos. En 1947 conjetura la equivalencia de los problemas de programación lineal y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. La influencia de este respetado matemático, discípulo de David Hilbert en Gotinga y, desde 1930, catedrático de la Universidad de Princenton de Estados Unidos, hace que otros investigadores se interesaran paulatinamente por el desarrollo riguroso de esta disciplina.

En 1958 se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador Strena en 10 días del mes de junio, rebajó un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Estos métodos se aplicaron posteriormente a problemas comerciales y de la industria, lo que contribuyó a que la Investigación Operativa se desarrollara extraordinariamente entre los años 50 y 60.

En la sociedad civil ya se habían planteado anteriormente diversos problemas propios de la Investigación Operativa en un disciplina que se conoció como Investigación de Empresas o Análisis de Empresas, pero lo que aportó la II Guerra Mundial fue el desarrollo de métodos sistemáticos para afrontar estos problemas, principalmente el método Simplex.

El campo de las aplicaciones no bélicas de la Investigación Operativa es muy amplio. Ésta resuelve problemas tales como el uso adecuado de los equipos de trabajo y de personal, localización y volumen de sucursales, campañas de publicidad, transporte de mercancías, problemas de grafos y redes, problemas de colas, etc. También tiene aplicaciones en agricultura y ganadería dando respuestas que permitan la mejor distribución de los cultivos o la alimentación más económica para el ganado.

Como ya hemos comentado anteriormente, otro motor importantísimo del desarrollo de la Investigación Operativa ha sido el ordenador que permite resolver problemas reales en que intervienen un gran número de variables en un tiempo razonable.

En España el Instituto de Estadística de Madrid comenzó sus cursos en 1950 con una conferencia sobre aplicaciones de la Investigación Operativa, justo cuando apareció el libro de *Morse-Kimbal* en el que se exponían los trabajos de los equipos científicos que se constituyeron en la guerra. Se publicó a partir de 1950 una revista especializada: *"Trabajos de Estadística en Investigación Operativa"* con un nivel similar al de otros países europeos, a pesar de que nuestra industria estaba muy atrasada. Adelantándose a otros paises se creó un Instituto de Investigación Operativa que colaboró con las empresas españolas a introducir la Investigación Operativa en la resolución de sus problemas. De esta forma, se reconoció la importancia de esta materia, y como consecuencia se incorporó a los planes de estudio de facultades y escuelas universitarias.

Destacamos asimismo a Sixto Ríos que ha jugado un papel fundamental en el campo de la Estadística y la Investigación Operativa en España. También se puede destacar el gran número de discípulos de este profesor, incluidos sus propios hijos, que han contribuido y contribuyen al desarrollo de la Estadística y la Investigación Operativa en las universidades españolas, aportando un gran número de trabajos y publicaciones.

En el siglo XX se produce la aparición de nuevas ramas de las matemáticas, por lo que es preciso resaltar algunos aspectos que la caracterizan:

- Teoría de Juegos.
- La Programación Lineal.
- La Investigación Operativa.
- Álgebra Computacional.

1.1.2 La Teoría de Juegos

Así como la Teoría de la Probabilidad surgió del estudio de los juegos de azar y del deseo de los jugadores profesionales de encontrar formas de mejorar sus ventajas, la teoría de juegos nace al intentar dar precisión a la noción de "comportamiento racional". El estudio matemático de los juegos ofrece la posibilidad de nuevas formas de comprensión y precisión en el estudio de la Economía.

La Teoría de Juegos utiliza herramientas básicas de las matemáticas, el Algebra, en concreto las matrices, la probabilidad e incluso el teorema del punto fijo de Brouwer para demostrar que existe un único plan de acción "estable" o racional que representa la estrategia óptima. Actualmente se aplica en Economía y en la Estrategia Militar.

1.1.3 La Programación Lineal

La Programación Lineal es una técnica reciente de la Matemática Aplicada que permite considerar un cierto número de variables simultáneamente y calcular la solución óptima de un problema dado considerando ciertas restricciones.

Su nombre se debe a que en un principio trataba de resolver problemas que se planteaban en términos matemáticos con funciones lineales. En la actualidad se aplica también a problemas no lineales.

La teoría de la Programación Lineal ha sido desarrollada por Gohn, Von Neumann, Dantzig, Koopmans, W. Cooper y Charnes entre otros matemáticos, estadísticos y economistas.

El proceso para encontrar la solución óptima es el siguiente: Se plantea el problema, se traduce a un modo algebraico, se analizan las restricciones y se busca el óptimo dependiendo del criterio que se quiera aplicar. La respuesta se puede encontrar por varios métodos. El más general es el diseñado por Dantzig, que se denomina método del Simplex.

Estos métodos emplean un "teorema dual" mediante el cual un problema de maximización lleva emparejado uno de minimización.

Se utiliza en problemas de transportes, negocios, en logística militar y en la actualidad las aplicaciones también se dirigen hacia el área industrial, a la resolución de problemas de producción, etc.

La Programación Lineal se ha convertido en una herramienta de las Matemáticas tanto teóricas como aplicadas que utiliza el Algebra, la Teoría de Matrices y está relacionada con la Estadística y la Teoría de Juegos.

1.1.4 La Investigación Operativa

Una característica importante del siglo XX es el desarrollo de las distintas ramas de las Matemáticas y el descubrimiento de los vínculos entre ellas. Pero también el resurgir de nuevas ramas como es la Investigación Operativa.

Aunque debe su nombre a su aplicación a las operaciones militares, y empieza a desarrollarse en la II Guerra Mundial, sus orígenes se remontan al siglo XVII. Pascal y Fermat, que habían inventado el concepto de esperanza matemática, inician los estudios de Investigación Operativa junto con Jacques Bernoulli y Waldegrave al intentar resolver problemas de decisión en el campo de la incertidumbre.

Posteriormente, Monge (1746-1818) se propuso y logró resolver un problema económico de naturaleza combinatoria: el de los desmontes y rellenos. Borel (1871-1956) presentó la Teoría matemática de los Juegos en la Academia de Ciencias de París, mientras que Erlang establecía la de las "filas de espera", que utilizó para la concepción de redes telefónicas. En vísperas de la II Guerra Mundial, Kantorovitch concebía y aplicaba la programación lineal a la planificación. Por ello cuando el físico inglés Blackett, en 1938, fue llamado para reunir el primer equipo de investigadores operativos, ya le habían precedido personalidades en dicho campo.

Blackett tuvo el mérito de encontrar la fórmula que le permitió tratar de forma rápida y con éxito la difícil cuestión de la implantación óptima de los radares de vigilancia británicos, que desempeñaron un papel tan decisivo en la "Batalla de Inglaterra". Desde que finalizó la guerra se ha utilizado con éxito para resolver problemas de ámbito empresarial, industrial, etc.

Es justo señalar que el desarrollo de la investigación operativa ha sido posible gracias al desarrollo de los medios informáticos que son los que posibilitan resolver los problemas en la práctica, como gestión de grandes conjuntos económicos, organización sistemática de tareas complejas o controlar toda una red eléctrica nacional.

Debido al éxito de la Investigación Operativa en el campo militar, los industriales recurrieron a ésta para solucionar los problemas generados por la complejidad y especialización que iba en aumento dentro de sus organizaciones. En 1951, la Investigación Operativa ya se había introducido por completo en la industria británica y estaba en proceso de hacerlo en la estadounidense. Desde entonces, su desarrollo ha sido muy rápido, en gran medida gracias a la ayuda del ordenador que, desde el momento de su aparición, queda irremediablemente unido a la Teoría de la Probabilidad, a la Estadística y especialmente a la propia Investigación Operativa y aumentó enormemente las posibilidades de la Ciencia.

Según Hillier y Lieberman (1991), en esencia la contribución del enfoque de la Investigación Operativa proviene principalmente de:

- La estructuración de una situación de la vida real como un modelo matemático, logrando una abstracción de los elementos esenciales para que pueda buscarse una solución que concuerde con los objetivos del que toma decisiones.
- El análisis de la estructura de tales soluciones y el desarrollo de procedimientos sistemáticos para obtenerlas.
- El desarrollo de una solución, incluyendo la teoría matemática si es necesario, que lleva el valor óptimo de la medida de lo que se espera del sistema.

Actualmente la Investigación Operativa incluye gran cantidad de ramas como la Programación Lineal y No Lineal, Programación Dinámica, Simulación, Teoría de Colas, Teoría de Inventarios, Teoría de Grafos, etc. y se encuentra muy difundida, con aplicaciones en campos muy variados y en particular muy unida a la Economía y a la Informática y por supuesto a la Estadística y Teoría de Probabilidad, constituyendo una materia universitaria con entidad propia.

1.2 Modelización de un problema de P. L.

Introduciremos las líneas generales del modelo de Programación Lineal (P.L.) ilustrándolo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1 ***Alimentación del ganado***

Nos proponemos alimentar el ganado de una granja de la forma que sea la más económica posible. La alimentación debe contener cuatro tipos de nutrientes que llamamos A,B,C,D. Estos componentes se encuentran en dos tipos de piensos M y N. La cantidad, en gramos, de cada componente por kilo de estos piensos viene dada *en la tabla siguiente:*

	A	*B*	*C*	*D*
M	*100*		*100*	*200*
N		*100*	*200*	*100*

Un animal debe consumir diariamente al menos 0,4 Kg del componente A, 0,6 Kg del componente B, 2 Kg. del componente C y 1,7 Kg. del componente D. El compuesto M cuesta 20 pts/kg y el N 8 pts/kg. ¿Qué cantidades de piensos M y N deben adquirirse para que el gasto de comida sea el menor posible?

Para resolver el problema construimos un modelo matemático del mismo. La construcción de este modelo puede hacerse siguiendo el proceso que se describe a continuación:

1.2.1 Formulación de los modelos

Paso 1: Determinar las variables de decisión o de entrada y representarlas algebraicamente. Tomamos en este caso las variables:

x_1 = cantidad de pienso M(en Kg)

x_2 = cantidad de pienso N(en Kg).

Paso 2: Determinar las restricciones expresándolas como ecuaciones o inecuaciones de las variables de decisión.

Las restricciones se deducen de la composición requerida para la dieta (en Kg.):

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{En componente A} & 0,1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0,4 \\
\text{En componente B} & 0x_1 & + & 0,1x_2 & \geq & 0,6 \\
\text{En componente C} & 0,1x_1 & + & 0,2x_2 & \geq & 2 \\
\text{En componente D} & 0,2x_1 & + & 0,1x_2 & \geq & 1,7
\end{array}$$

Paso 3: Expresar todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables (que no puedan ser negativas, que sean enteras, que sólo pueden tomar determinados valores, etc.)

En este ejemplo los cantidades de pienso no pueden tomar valores negativos por lo tanto, deberíamos imponer que sean $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$. No imponemos otras restricciones al tipo de variables.

Paso 4: Determinar la función objetivo.

El objetivo de este problema es:

$$\text{Minimizar gasto } = Min\ Z = 20x_1 + 8x_2.$$

El modelo por tanto es el siguiente:

$$
\begin{array}{rlcl}
\text{Min Z} & = 20x_1 + 8x_2 & & \\
\text{s.a.:} & 0,1x_1 + 0x_2 & \geq & 0,4 \\
& 0x_1 + 0,1x_2 & \geq & 0,6 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 & \geq & 2 \\
& 0,2x_1 + 0,1x_2 & \geq & 1,7 \\
& x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

1.3 Modelización de diversos problemas de I.O.

Vamos a modelizar ahora diversos problemas que se pueden plantear en la Investigación Operativa (I.O.) que enunciamos a continuación:

Ejemplo 2 ***Transporte de tropa.***

Un destacamento militar formado por 40 soldados de Ingenieros, 36 especialistas dinamiteros, 88 antiguerrilleros y 120 infantes como tropa de apoyo, ha de transportarse hasta una posición estratégica importante. En el parque de la base se dispone de 4 tipos de vehículos A,B,C,D, acondicionados para el transporte de tropas. El número de personas que cada vehículo puede transportar es 10,7,6,9 de la forma en que se detalla en la siguiente tabla:

	Ingenieros	*Dinamiteros*	*Antiguerrillas*	*Infantes*
A	*3*	*2*	*1*	*4*
B	*1*	*1*	*2*	*3*
C	*2*	*1*	*2*	*1*
D	*3*	*2*	*3*	*1*

Los gastos de gasolina de cada vehículo hasta el punto de destino se estiman en 160, 80, 40 y 120 litros respectivamente. Si queremos ahorrar gasolina. ¿Cuántos vehículos de cada tipo habrá que utilizar para que el gasto de gasolina sea el menor posible?

P1) $x_i = n^o$ vehículos de cada tipo que se usen.

P2)

$$
\begin{array}{lcl}
3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \geq & 40 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & \geq & 36 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \geq & 88 \\
4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 120
\end{array}
$$

P3) $x_i \geq 0$; x_i son enteros.

P4) Minimizar gasto gasolina $= 160x_1 + 80x_2 + 40x_3 + 120x_4$

$$\begin{array}{rll} \text{Min Z} & = 160x_1 + 80x_2 + 40x_3 + 120x_4 & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \geq 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & \geq 36 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \geq 88 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & \geq 120 \\ & x_i \geq 0 \quad ; \quad \text{enteros.} & \end{array}$$

Ejemplo 3 ***Transporte de mercancías.***

Un fabricante desea despachar varias unidades de un artículo a tres tiendas T1, T2, T3. Dispone de dos almacenes desde donde realizar el envío, A y B. En el primero dispone de 5 unidades de este artículo y el segundo 10. La demanda de cada tienda es 8, 5 y 2 unidades respectivamente. Los gastos de transporte de un artículo desde cada almacén a cada tienda están expresados en la tabla:

	T1	*T2*	*T3*	
A	*1*	*2*	*4*	
B	*3*	*2*	*1*	

¿Cómo ha de realizar el transporte para que sea lo más económico posible?

$x_i = n^o$ de unidades transportadas.

Problema equilibrado (Oferta=Demanda):

	T1	T2	T3	Disponibilidad
A	x_1	x_2	x_3	5
B	x_4	x_5	x_6	10
Demanda	8	5	2	

$$\begin{array}{rl} \text{Min Z} & = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 10 \\ & x_1 + x_4 = 8 \\ & x_2 + x_5 = 5 \\ & x_3 + x_6 = 2 \\ & x_i \quad \text{enteros y no negativos.} \end{array}$$

Ejemplo 4 ***Árboles frutales.***

Un agricultor tiene una parcela de 640 m^2 para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales y manzanos. Se pregunta de qué forma repartirá la superficie de la parcela entre las tres variedades para conseguir el máximo beneficio sabiendo que:

Cada naranjo necesita un mínimo de 16 m^2*, cada peral* 4 m^2 *y cada manzano* 8 m^2.

Dispone de 900 horas de trabajo al año, necesitando cada naranjo de 30 horas al año, cada peral 5 y cada manzano 10.

Los beneficios unitarios son de 50, 25 y 20 unidades monetarias respectivamente por cada naranjo, peral y manzano respectivamente.

x_1 = número de naranjos.

x_2 = número de perales.

x_3 = número de manzanos.

$$\begin{array}{rlcl} \text{Max Z} = & 50x_1 + 25x_2 + 20x_3 & & \\ \text{s.a.:} & 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 & \leq & 640 \\ & 30x_1 + 5x_2 + 10x_3 & \leq & 900 \\ & x_i \geq 0 \quad ; \quad \text{enteros.} & & \end{array}$$

Ejemplo 5 ***Árboles frutales (II).***

1. *Si se produce un incremento del precio de los naranjos que hace elevar el beneficio de cada naranjo a 120. ¿Sigue siendo válida la solución?*

2. *Si desciende el beneficio de los perales hasta situarse en 10. ¿Se modificará la solución del problema?*

3. *Al agricultor se le plantea la posibilidad de cultivar limoneros que necesitan* $12m^2$ *de tierra, 20 horas anuales de mano de obra, proporcionando un beneficio de 30 u.m. ¿Cuál será ahora la situación?*

4. *A causa de la sequía, el agricultor tiene restricciones para el riego: Le han asignado* $200m^3$ *de agua anuales. Las necesidades son de* $2m^3$ *por naranjo,* $1m^3$ *por peral y* $1m^3$ *por manzano cada año. ¿Cómo repercute esta nueva situación en la solución inicial?*

5. *Se compra una parcela contigua de* $160m^2$*. ¿Cuál será en este caso la nueva solución?*

6. *De acuerdo con un estudio técnico, para el tratamiento óptimo de los perales se necesitan* $10m^2$ *y 15 horas de mano de obra anuales. ¿Sigue siendo válida la solución?*

1. $Z' = 120x_1 + 25x_2 + 20x_3$

2. $Z'' = 50x_1 + 20x_2 + 20x_3$

3. x_4 = número de limoneros.

$$\begin{array}{lll} \text{Max Z} = 50x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 30x_4 & & \\ \quad \text{s.a.: } 16x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 & \leq & 640 \\ \quad 30x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 20x_4 & \leq & 900 \\ \quad x_i \geq 0 \quad ; \quad \text{enteros.} & & \end{array}$$

4. Nueva restricción: $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$

5. $16x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 800$

6. El programa lineal se escribirá:

$$\begin{array}{ll} Z = 50x_1 + 25x_2 + 20x_3 & \\ \quad \text{s.a.: } 16x_1 + 10x_2 + 8x_3 & \leq 640 \\ \quad 30x_1 + 15x_2 + 10x_3 & \leq 900 \\ \quad x_i \geq 0 \quad ; \quad \text{enteros.} & \end{array}$$

Ejemplo 6 ***Asignación de personal.***

Una empresa ha preseleccionado 5 candidatos para ocupar 4 puestos de trabajo en la empresa. Los puestos de trabajo consisten en manejar 4 máquinas diferentes (un trabajador para cada máquina). La empresa ha probado a los cinco trabajadores en las 4 máquinas, realizando el mismo trabajo todos ellos en cada una de las máquinas, se obtuvieron los siguientes tiempos:

Trabajo	*Máquina 1*	*Máquina 2*	*Máquina 3*	*Máquina 4*
1	*10*	*6*	*6*	*5*
2	*8*	*7*	*6*	*6*
3	*8*	*6*	*5*	*6*
4	*9*	*7*	*7*	*6*
5	*8*	*7*	*6*	*5*

Determinar qué trabajadores debe seleccionar la empresa y a qué máquinas debe asignarlos.

La variable x_{ij} representa la acción "el trabajador i se asigna a la máquina j". Los dos estados de esta acción son 0 (si no se asigna) y 1 (si se asigna).

$$\begin{array}{rcl} \text{Min Z} & = & 10x_{11} + 8x_{21} + 8x_{31} + 9x_{41} + 8x_{51} + \\ & + & 6x_{12} + 7x_{22} + 6x_{32} + 7x_{42} + 7x_{52} + \\ & + & 6x_{13} + 3x_{23} + 5x_{33} + 7x_{42} + 6x_{53} + \\ & + & 5x_{14} + 6x_{24} + 6x_{34} + 6x_{44} + 5x_{54} \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a.: } x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} & \leq & 1 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leq & 1 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & \leq & 1 \\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} & \leq & 1 \\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51} & = & 1 \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{52} & = & 1 \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{53} & = & 1 \\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{54} & = & 1 \\
x_{ij} \geq 0; \quad x_{ij} \epsilon \{0,1\} & &
\end{array}
$$

Ejemplo 7 ***Camino mínimo.***

Una persona tiene que desplazarse a diario de un pueblo 1 a otro 7. Está estudiando usando el mapa de carreteras cuál debe ser el trayecto más corto. Las carreteras y sus distancias están en la figura 1.1.

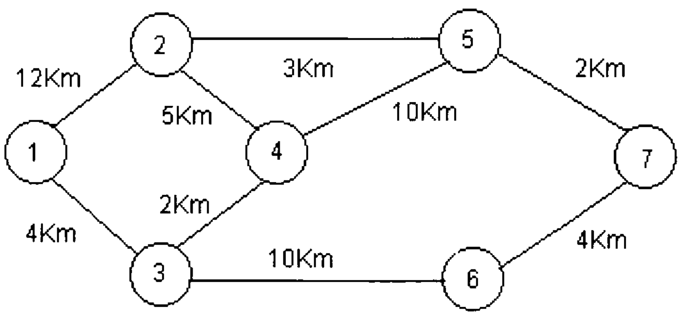


Figura 1.1 Mapa de carreteras de los pueblos 1 al 7.

La variable x_{ij} representa la acción "desplazarse del pueblo i al j", indicando el uno que se produce tal desplazamiento, y el cero que no se produce.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min Z} & = & 12x_{12}+4x_{13}+5x_{24}+3x_{25}+2x_{34}+ \\
& + & 5x_{42}+2x_{43}+10x_{45}+3x_{52}+10x_{54}+ \\
& + & 2x_{57}+10x_{63}+4x_{67}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a.: } x_{12}+x_{13} & = & 1 \\
x_{24}+x_{25}-x_{12}-x_{42}-x_{52} & = & 0 \\
x_{34}+x_{36}-x_{13}-x_{43}-x_{63} & = & 0 \\
x_{42}+x_{43}+x_{45}-x_{24}-x_{34}-x_{54} & = & 0 \\
x_{52}+x_{54}+x_{57}-x_{25}-x_{45} & = & 0 \\
x_{63}+x_{67}-x_{36} & = & 0 \\
-x_{57}-x_{67} & = & -1 \\
x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad x_{ij} \in \{0,1\}. & &
\end{array}
$$

Ejemplo 8 ***Localización.***

Una empresa tiene la exclusiva para la distribución de un producto en 4 poblaciones. En un estudio de mercado se ha determinado la demanda potencial:

Población 1	*Población 2*	*Población 3*	*Población 4*
3000 unidades	*2000 unidades*	*2500 unidades*	*2700 unidades*

Se sabe que los costes de transporte son de dos pesetas por Km y unidad transportada. La distancia entre los pueblos es la que figura en la tabla siguiente:

	1	*2*	*3*	*4*
1	-	*25*	*35*	*40*
2	-	-	*20*	*40*
3	-	-	-	*30*
4	-	-	-	-

Para abaratar los costes de transporte se decide instalar un almacén con capacidad para 6000 unidades en dos de estas cuatro ciudades.

Determinar en qué poblaciones deben instalarse los almacenes para que el coste de distribución sea mínimo.

La variable x_{ij} representa la cantidad enviada del almacén i a la población j, e y_i toma el valor 1 si se selecciona la ciudad i para localizar el almacén. Toma el valor 0 en caso contrario.

$$
\begin{aligned}
\text{Min Z} \quad = & \quad 50x_{12} + 70x_{13} + 60x_{14} + 50x_{21} + 40x_{23} + \\
+ & \quad 80x_{24} + 70x_{31} + 40x_{32} + 60x_{34} + 60x_{41} + \\
+ & \quad 80x_{42} + 60x_{43}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.a.: } x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} & \geq & 3000 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} & \geq & 2000 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} & \geq & 2500 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} & \geq & 2700 \\
y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & = & 2 \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - 6000y_1 & \leq & 0 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{23} - 6000y_2 & \leq & 0 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} - 6000y_3 & \leq & 0 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} - 6000y_4 & \leq & 0 \\
x_{ij} \geq 0 \quad ; \quad x_{ij} \in \{0, 1\}. & &
\end{array}
$$

1.4 Modelos de programación matemática

La modelización general de un **problema de programación lineal** es:

$$\begin{array}{rlll} \text{Max(Min):} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 \cdots + c_nx_n & & \\ \text{sujeto a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & (\leq=\geq) & b_1 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & (\leq=\geq) & b_m \\ & x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \ldots x_n \geq 0. & & \end{array}$$

donde tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales.

Si la función objetivo y/o las restricciones no fueran funciones lineales diremos que el problema es de **programación no lineal**.

En la **programación cuadrática** la función objetivo es de segundo grado y las restricciones si existen son lineales.

En el caso particular de un problema de programación lineal en el que las variables de decisión tomen valores enteros, se llama **programación entera**.

Cuando las variables sólo toman valores 0,1 se llama **programación booleana**. Los modelos de programación lineal se incluyen en una clase más amplia, la clase de modelos de optimización en los que se optimiza una función de las variables de decisión, denominada función objetivo, sujeta a un conjunto de limitaciones o restricciones sobre las variables de decisión.

La formulación general de un problema de optimización es:

$$\begin{array}{lll} \text{Opt Z } = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & & \\ \text{sujeto a } g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq 0; & j = 1, \ldots, m & \text{donde,} \end{array}$$

f es la función objetivo, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las variables de decisión, y tenemos unas restricciones caracterizadas por las desigualdades sobre $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$.

En el caso de la programación lineal la función objetivo y las restricciones son lineales en las variables de decisión:

$$\begin{array}{lcl} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = C^tX \\ g_j(x_1, \ldots, x_n) & = & a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n - b_j \end{array}$$

$A \cdot X \leq b$ en notacion matricial, donde,

C es el vector coeficientes del objetivo, A es la matriz de coeficientes tecnológicos, b es el vector de términos constantes y X el vector de variables de decisión.

1.5 El método geométrico

En algunos casos sencillos vamos a poder resolver problemas de programación lineal usando el método geométrico. La única restricción que tendremos que considerar es que tenga dos variables de decisión. Ilustramos este método con el ejemplo siguiente:

Ejemplo 9

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2x_1 + x_2 \\ s.a.:\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Paso 1: Representamos en un sistema de coordenadas adecuadas y, en él, las rectas que corresponden a las restricciones.

$$5x_1 + 2x_2 = 10 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 5 \\ x_1 = 2 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$3x_1 + 5x_2 = 15 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 3 \\ x_1 = 5 & x_2 = 0 \end{array}$$

Paso 2. Se representa la región del plano que verifica simultáneamente todas las restricciones. Esta región se conoce con el nombre de región factible. La región factible está marcada en la figura siguiente:

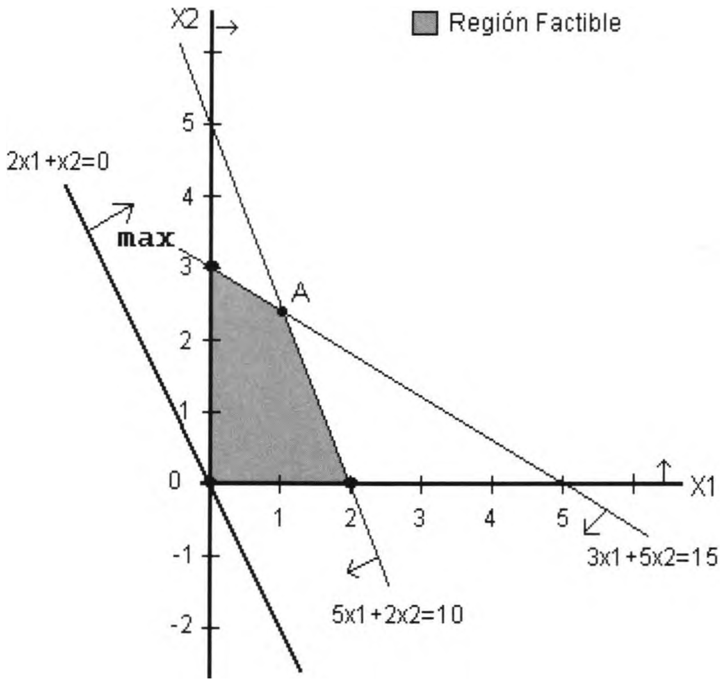


Figura 1.2 Dibujo de la Región Factible. Ejemplo 9.

Paso 3.

Representamos la recta

$$Z = 2x_1 + x_2 \Longrightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 1 & x_2 = -2 \end{array}$$

Si desplazamos la recta paralelamente hacia arriba el valor de Z va aumentando. Así la paralela a $2x_1 + x_2 = 0$ que pasa por $(1, 0)$ es $2x_1 + x_2 = 2$ y nos da un valor del objetivo $Z = 2 \cdot 1 + 0 = 2$.

Lo más alto que podemos desplazar la recta sin dejar la región factible es hasta el punto A, que es el punto de corte de las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 & = & 10 \\ 3x_1 + 5x_2 & = & 15 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} 15x_1 + 6x_2 & = & 30 \\ -15x_1 - 25x_2 & = & -75 \end{array}\right\}$$

Si sumamos ambas, obtenemos el punto A, con coordenadas:

$$-19x_2 = -45 \longrightarrow \begin{array}{rcl} x_2 & = & 45/19 \\ x_1 & = & 20/19. \end{array}$$

En el punto A se obtiene el óptimo, cuyo valor en la función objetivo vale

$$Z = 2.\tfrac{20}{19} + \tfrac{45}{19} = 4.47368.$$

1.5.1 Descripción del método geométrico

1) Dibujar un sistema de coordenadas cartesianas en el que las variables de decisión corresponden a los ejes. Se elegirá una escala adecuada (no necesariamente la misma en ambos ejes) Representar las rectas correspondientes a las distintas restricciones.

2) Representar las regiones del plano que cumplen cada una de las restricciones, incluidas las de no negatividad. La intersección de estas regiones nos daría la región de soluciones o región factible (si la intersección es $\emptyset$ el problema no tiene solución).

3) Si la función objetivo es $Z = c_1x_1 + c_2x_2$, tendremos que representar la recta $r \equiv c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ y estudiar la variación de Z al desplazarnos dentro de la región factible mediante rectas paralelas a $r \equiv c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. En los problemas de maximización la solución será el punto de la región factible que nos de un Z mayor, en los de minimización el que nos proporcione un Z menor.

Ejemplo 10

$$\begin{array}{rlcl} Max\ Z & = 6x_1 + 10x_2 & & \\ s.a.: & 5x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\ & 3x_1 + 5x_2 & \leq & 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & \end{array}$$

Paso 1.

$$5x_1 + 2x_2 = 10 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 5 \\ x_1 = 2 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$3x_1 + 5x_2 = 15 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 3 \\ x_1 = 5 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$6x_1 + 10x_2 = 0 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 1 & x_2 = -\tfrac{3}{5} \end{array}$$

Paso 2. Ver figura 1.3.

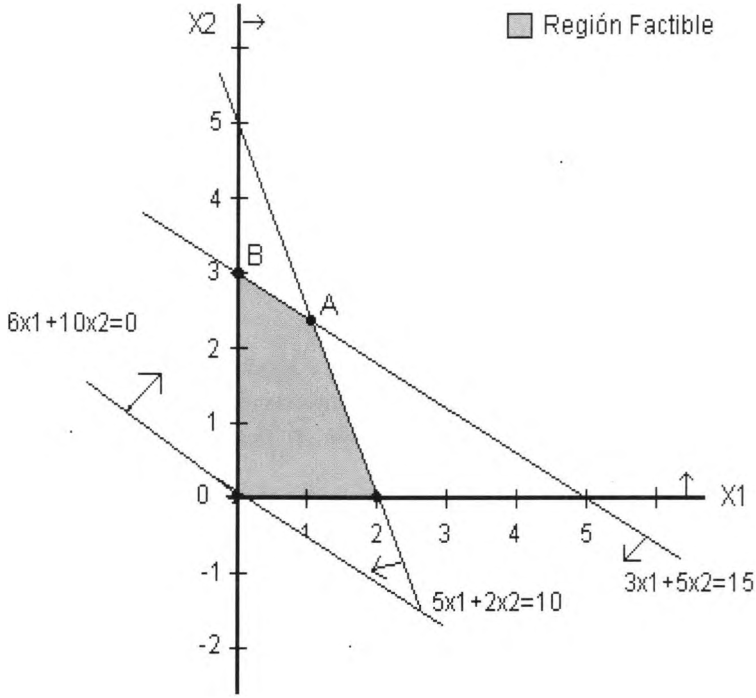


Figura 1.3 Dibujo de la Región Factible. Ejemplo 10.

Paso 3.

La recta paralela a $6x_1 + 10x_2 = 0$ que pasa por $(1, 0)$ es $6x_1 + 10x_2 = 6$ con valor del objetivo $Z = 6 \cdot 1 + 10 \cdot 0 = 6$.

Tiene soluciones múltiples pues, las dos rectas:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 & = & 15 \\ 6x_1 + 10x_2 & = & 0 \end{cases}$$

tienen la misma pendiente, son paralelas y, en todos los puntos desde A hasta B se obtiene el mismo valor para la función objetivo.

$$A\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right) \text{ y } B(0, 3)$$

El valor del objetivo en el segmento $\overline{AB}$ es $Z = 6 \cdot 0 + 10 \cdot 3 = 30$.

Ejemplo 11

$$\begin{array}{rll} Min\ Z & = x_1 - 4x_2 & \\ s.a.:\ & x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq 2 \\ & -4x_1 + 3x_2 & \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Paso 1.

$$x_1 + x_2 = 6 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 6 \\ x_1 = 6 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$x_1 - 2x_2 = 2 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = -1 \\ x_1 = 2 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$-4x_1 + 3x_2 = 12 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 4 \\ x_1 = -3 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$x_1 - 4x_2 = 0 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 4 & x_2 = 1 \end{array}$$

Paso 2. Ver figura 1.4.

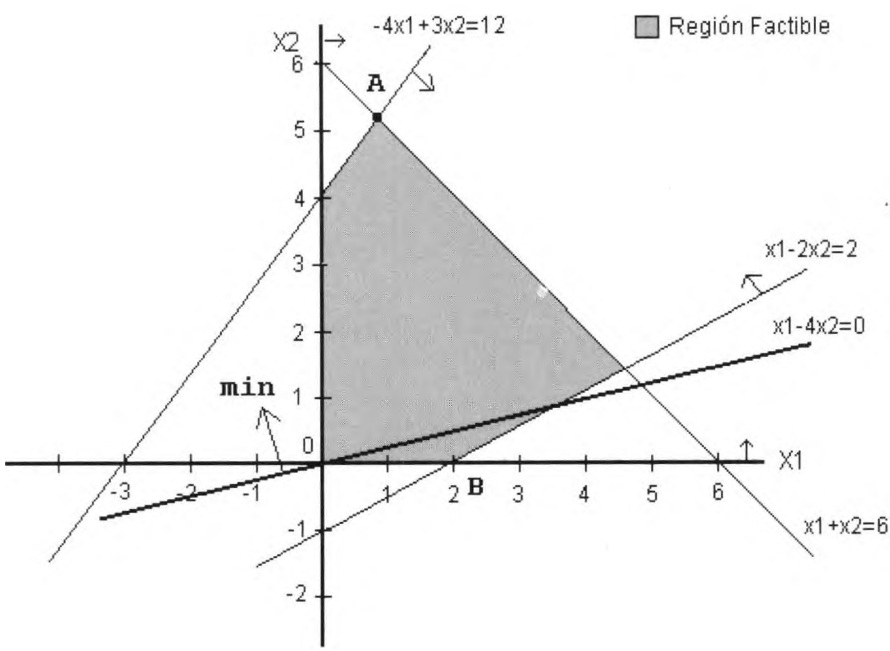


Figura 1.4 Dibujo de la región factible. Ejemplo 11.

Paso 3.

La recta paralela a $x_1 - 4x_2 = 0$ que pasa por (1,0) sería $x_1 - 4x_2 = 1$ con $Z = x_1 - 4x_2 = 1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 1$.

Tengo que ir hacia arriba porque el término independiente ha aumentado y lo que tengo que hacer es minimizar. El punto donde se obtiene el óptimo es el punto A, con coordenadas:

$$\text{A} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6 \\ -4x_1 + 3x_2 = 12 \end{array} \right. \qquad \text{donde,} \qquad x_1 = \frac{6}{7}, \qquad x_2 = \frac{36}{7}.$$

Y la solución óptima es: $Z = x_1 - 4x_2 = -\frac{138}{7}$.

Nota: Si el programa hubiese estado escrito en forma maximizante, el óptimo se obtendría en el punto $B(2,0)$, como puede verse en la figura 1.4.

Ejemplo 12

$$\begin{array}{rll} Max\ Z & = 2x_1 - x_2 & \\ s.a.: & x_1 - x_2 & \leq \ 2 \\ & 5x_1 - 2x_2 & \leq \ 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Paso 1.

$$x_1 - x_2 = 2 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = -2 \\ x_1 = 2 & x_2 = 0 \end{array}$$

$$5x_1 - 2x_2 = 16 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 2 & x_2 = -3 \\ x_1 = \frac{16}{5} & x_2 = 0 \end{array}$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 1 & x_2 = 2 \end{array}$$

Paso 2. Ver figura 1.5.

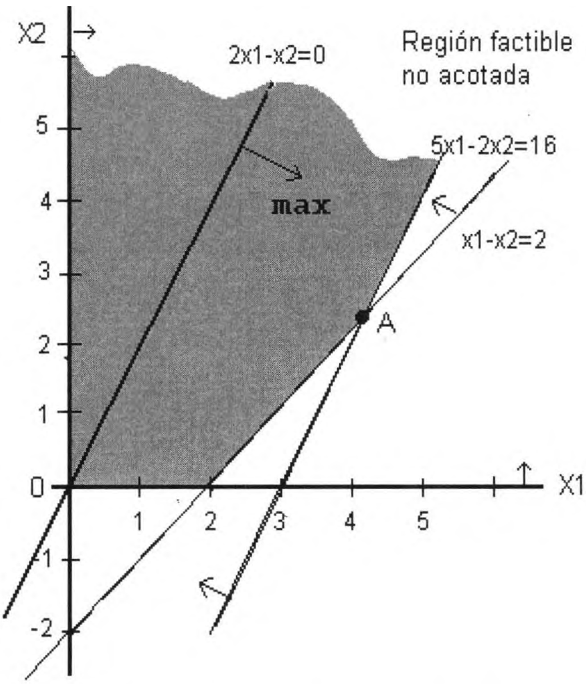


Figura 1.5 Dibujo de la Región factible. Ejemplo 12.

Paso 3.

La recta paralela a $2x_1 - x_2 = 0$ que pasa por $(1, 0)$ toma el valor $Z = 2 \cdot 1 - 0 = 2$. Luego la solución óptima es el punto A, que se obtiene como:

$$\text{A} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 = 16 \end{array} \right. \qquad \text{donde,} \quad x_1 = 4, \qquad x_2 = 2.$$

Y la función objetivo vale $Z = 2x_1 - x_2$, y por tanto la solución óptima vale $Z = 8 - 2 = 6$. Si en el problema hubiésemos tenido que minimizar la solución sería ilimitada.

1.5.2 Resumen del método geométrico

- Si la región factible es $\emptyset$ el programa lineal no tiene solución factible.
- Si la región factible es acotada entonces siempre hay solución finita, que puede ser única o múltiple.
- Si la región factible es no acotada entonces puede ocurrir que haya:
  - Solución finita (única o múltiple).
  - Solución ilimitada.

Tema 2

Programación Lineal

2.1 Modelo general de programación lineal

Un programa lineal consiste en encontrar un vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que optimice una función lineal.

$$
\left.
\begin{array}{lrcl}
\text{Opt.} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & \\
\text{s.a.:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & (\leq = \geq) & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & (\leq = \geq) & b_2 \\
 & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & (\leq = \geq) & b_m \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n. & &
\end{array}
\right\}
$$

Todos los c_j son conocidos, también los a_{ij} y los b_i.

A los coeficientes c_j se les denomina coeficientes de coste, a los a_{ij} coeficientes tecnológicos y a los b_i coeficientes de recursos.

Programa lineal en forma estándar. Decimos que un programa lineal está en forma estándar si todas las restricciones son de igualdad y todos los b_i con $i = 1, 2, \ldots, m$ son positivos o nulos.

Veamos un ejemplo de un programa lineal en forma estándar:

Ejemplo 13 *Problema en forma estándar*

$$
\begin{array}{ll}
Max & Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

A veces puede aparecer en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Opt.} & Z = c^t X \\ \text{s.a.:} & AX = b \\ & X \geq 0 \end{array}\right\}$$

donde $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ y

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

También puede aparecer en forma vectorial:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Opt.} & Z = c^t X \\ \text{s.a.:} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \\ & X \geq 0 \end{array}\right\}$$

donde a_j es la $j-$ ésima columna de la matriz A.

Ejemplo 14 *El modelo anterior en forma vectorial sería:*

$$\textit{Opt.} \quad Z = (3, 2, -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\textit{s.a.:} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$X \geq 0$$

Programa lineal en forma canónica maximizante. Decimos que un programa lineal está en forma canónica maximizante si todas las restricciones son de desigualdad del tipo $\leq$ y el programa es de maximizar.

Ejemplo 15 *Forma canónica maximizante*

$$\begin{array}{ll} \textit{Max} & Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \textit{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & \leq & 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 & \leq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Programa lineal en forma canónica minimizante. Decimos que un programa lineal está en forma canónica minimizante si todas las restricciones son en desigualdad ($\geq$) y el programa es de minimizar.

Ejemplo 16 *Forma canónica minimizante*

$$
\begin{array}{ll}
Min & Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & \geq & 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 & \geq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

¿Cómo pasar cualquier modelo a forma estándar?

Paso 1: Si algún b_j es negativo se multiplica la restricción por -1.

Paso 2: Si la variable x_r no tiene condición de no negatividad, expresarla como diferencia de dos variables positivas de la forma:

$$x_r = x_r' - x_r''; \quad x_r' \geq 0; x_r'' \geq 0$$

Paso 3: Las desigualdades se convierten en igualdades mediante la introducción de variables de holgura positivas de la forma:

$$\sum^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum^n a_{ij}x_j + s_i = b_i; \quad s_i \geq 0$$

$$\sum^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum^n a_{ij}x_j - t_i = b_i; \quad t_i \geq 0$$

Ejemplo 17 *Pasar a forma estándar el programa lineal:*

$$
\begin{array}{ll}
Max & Z = 3x_1 + x_2 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 + 5x_2 & \leq & 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Los pasos 1 y 2 no son necesarios en este caso.

Paso 3:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Z = 3x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 & = & 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Ejemplo 18 *Pasar a forma estándar el programa lineal:*

$$
\begin{array}{ll}
Max & Z = x_1 + x_2 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 5x_2 & \leq & 5 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & -4 \\ x_1, x_2 & \geq 0 & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Paso 1: $2x_1 - x_2 \leq -4 \leftrightarrow -2x_1 + x_2 \geq 4$

Paso 2: Son mayores que cero.

Paso 3:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Z = x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 5 \\ -2x_1 + x_2 - x_4 & = & 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Ejemplo 19 *Pasar a forma estándar el programa lineal:*

$$
\begin{array}{ll}
Min & Z = 5x_1 + 2x_2 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} 6x_1 + x_2 & \geq & 6 \\ 4x_1 + 3x_2 & \leq & 5 \\ x_1 \geq 0 & & \\ x_2 \textit{ sin restriccion} & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Paso 1: No es necesario.

Paso 2: $x_2 = x_2' - x_2''; \; x_2', x_2'' \geq 0$

Paso 3:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & Z = 5x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \\
\text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} 6x_1 + x_2' - x_2'' - x_3 & = & 6 \\ 4x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Cambiar el sentido de optimización. Un problema de maximización puede pasarse a otro de minimización y viceversa:

$$\text{Max } z = \sum^{n} c_j x_j \iff \text{Min } z' = \sum^{n} (-c_j) x_j \quad ; \qquad z = -z'$$

$$\text{Min } z = \sum^{n} c_j x_j \iff \text{Max } z' = \sum^{n} (-c_j) x_j \quad ; \qquad z = -z'$$

Cambiar el sentido de una desigualdad.

$$\sum^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \implies \sum^{n} (-a_{ij}) x_j \geq -b_i$$

$$\sum^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \implies \sum^{n} (-a_{ij}) x_j \leq -b_i$$

Convertir igualdades en desigualdades.

$$\begin{array}{rcl} \sum^{n} a_{ij} x_j & = & b_i \quad \leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \sum^n a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum^n a_{ij}x_j & \geq & b_i \end{array} \right. \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} \sum^n a_{ij}x_j & \leq & b_i \\ \sum^n (-a_{ij})x_j & \leq & -b_i \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \sum^n (-a_{ij})x_j & \geq & -b_i \\ \sum^n a_{ij}x_j & \geq & b_i \end{array} \right. \end{array}$$

Ejemplo 20 *Dado el programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min} & Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \textit{s.a.:} & \left. \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 + x_3 & = & 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array} \right\} \end{array}$$

pasarlo a forma canónica maximizante, y forma canónica minimizante.

Forma canónica maximizante:

$$\text{Max} \quad \text{Z'} = -3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_1 - 2x_2 = 4 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 - 2x_2 & \geq & 4 \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & -4 \end{array} \right.$$

$$3x_1 + x_3 = 3 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ 3x_1 + x_3 & \geq & 3 \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ -3x_1 - x_3 & \leq & -3 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z' = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.:} & \left. \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & -4 \\ 3x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ -3x_1 - x_3 & \leq & -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array} \right\} \end{array}$$

Forma canónica minimizante:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a.:} & \left. \begin{array}{lcl} -x_1 + 2x_2 & \geq & -4 \\ x_1 - 2x_2 & \geq & 4 \\ -3x_1 - x_3 & \geq & -3 \\ 3x_1 + x_3 & \geq & 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array} \right\} \end{array}$$

2.2 Nociones previas

Decimos que $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ es un **conjunto de vectores linealmente dependiente** si existen $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ constantes no todas nulas de forma que se cumple $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Son **vectores linealmente independientes** si la igualdad anterior sólo se cumple para $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Decimos que el vector $\vec{v}$ se puede expresar como **combinación lineal convexa** de los vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ si existen constantes positivas $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ de forma que se verifique:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1.$$

Sean A_1 y A_2 dos puntos de $I\!R^n$; se llama **segmento lineal cerrado** de extremos A_1 y A_2 al conjunto:

$$\{A \in I\!R^n / A = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2; \quad 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Un conjunto C $\subset I\!R^n$ es un **conjunto convexo** cuando dados dos puntos cualesquiera de C el segmento lineal cerrado determinado por esos puntos está contenido en C.

Decimos que un punto x de un conjunto convexo C es un **punto extremo o vértice** de C si no existen dos puntos $x_1,\ x_2 \in C$ de forma que $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ para algún $\lambda\ /\ \ 0 < \lambda < 1$.

Se llama **semiespacio cerrado** al conjunto de puntos de $I\!R^n$ que cumple

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \leq \alpha$$

Se llama **poliedro** al conjunto intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados.

Ejercicio Demostrar que todo semiespacio cerrado es un conjunto convexo.

Demostración:

Sea $S = \{(x_1, x_2, ...x_n) \in I\!R^n \quad / \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \leq \alpha\}$. Sean Y y Z dos puntos de S, entonces se cumple:

$$Y = (y_1, y_2, ...y_n) \in S \iff \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \leq \alpha.$$

$$Z = (z_1, z_2, ...z_n) \in S \iff \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n \leq \alpha.$$

Demostraremos que cualquier punto del segmento YZ verifica la condición:

$$\lambda Y + (1-\lambda)Z \in S \qquad ; \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Pero

$$\begin{aligned} & \lambda Y + (1-\lambda)Z = \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (1-\lambda)(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ = \; & (\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2, \ldots, \lambda y_n + (1-\lambda)z_n) \end{aligned}$$

Ahora sustituimos y comprobamos que sea menor o igual a α.

$$\begin{aligned} & \alpha_1[\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1] + \alpha_2[\lambda y_2 + (1-\lambda)z_2] + \cdots + \alpha_n[\lambda y_n + (1-\lambda)z_n] = \\ = \; & \alpha_1\lambda y_1 + \alpha_1(1-\lambda)z_1 + \alpha_2\lambda y_2 + \alpha_2(1-\lambda)z_2 + \cdots + \alpha_n\lambda y_n + \alpha_n(1-\lambda)z_n = \\ = \; & \lambda(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n) + (1-\lambda)(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n) \leq \\ \leq \; & \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \lambda\alpha + \alpha - \lambda\alpha = \alpha \end{aligned}$$

luego

$$\lambda Y + (1-\lambda)Z \in S.$$

Teorema 1 *Si C es un conjunto convexo acotado con un número finito de puntos extremos, entonces cualquier punto de C puede expresarse como combinación lineal convexa de los puntos extremos. Esto es:*

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \ldots, A_k \quad \textit{puntos extremos de } C\,, A &\in C \implies \\ A &= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k \end{aligned}$$

$$\textit{siendo } \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1.$$

2.3 Definiciones sobre las soluciones de un problema

Vamos a dar a continuación algunas definiciones sobre las soluciones de un problema de programación lineal.

Se llama **solución factible** a cualquier vector x que verifique

$$Ax = b; \;\; x \geq 0$$

Se llama **región factible** al conjunto de todas las soluciones factibles

$$F = \{x \in I\!R^n \;/\; Ax = b; x \geq 0\}$$

Decimos que X^* es una **solución factible óptima** si optimiza en el sentido deseado a la función objetivo. Esto es:

Caso de Maximización $Z^* = C^t X^*$ cualquier otro $X \in F \implies Z = C^t X \leq C^t X^* = Z^*$

Caso de Minimización

$$Z^* = C^t X^* \qquad \text{cualquier otro} \qquad X \in F \qquad \implies \qquad Z = C^t X \geq C^t X^* = Z^*$$

Sea X^* la solución óptima del programa lineal, a la cantidad $Z^* = C^t X^*$ se le llama **valor óptimo del programa lineal.**

Decimos que **un programa lineal es no acotado** cuando no tiene valor óptimo finito: Max $Z \rightarrow +\infty$ o Min $Z \rightarrow -\infty$.

Decimos que **un programa lineal es infactible o no tiene solución** cuando no existen valores para las variables x_i que verifiquen las restricciones. Es decir, la región factible es vacía, $F = \emptyset$.

Matriz básica: Supongamos un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \theta_{11}x_1 + ... + \theta_{1n}x_n & = & b_1 \\ \theta_{21}x_1 + ... + \theta_{2n}x_n & = & b_2 \\ ... & ... & . \\ \theta_{m1}x_1 + ... + \theta_{mn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Si suponemos que $r(A) = m$, tomamos cualquier submatriz B de A no singular de orden m (determinante no nulo). La matriz B se llama matriz básica.

Si hacemos igual a cero las $n - m$ variables asociadas a los vectores columnas de A que no están en B, la solución del sistema formada por estas variables nulas y la solución del sistema resultante $BX_B = b$ de m ecuaciones con m variables se denomina **solución básica** asociada a la matriz básica B.

Se denominan **variables básicas** a las variables del vector X_B formado por las m variables del sistema $BX_B = b$. Las variables que se han igualado a cero "$n - m$" se denominan **variables no básicas**.

Ejemplo 21 *Encontrar las soluciones básicas de:*

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad r(A) = 2.$$

Escogemos como submatriz

$$B = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $x_3 = 0$.

$$BX_B = b \quad ; \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 + 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 & = & 5 \end{array}\right\}$$

$$X_B = B^{-1}b \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una solución básica del sistema sería:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0.$$

Podríamos haber escogido como submatriz

$$B = (\ \theta_1, \theta_3\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

y por tanto $x_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 5x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$

$$X_B = B^{-1}b \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una solución básica del sistema sería:

$$x_1 = 5;\ x_2 = 0;\ x_3 = -1.$$

Otra submatriz

$$B = (\ \theta_2, \theta_3\ ) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

y por tanto $x_1 = 0$

$$X_B = B^{-1}b \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Una solución básica del sistema sería:

$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{5}{3};\ x_3 = \frac{2}{3}.$$

Resumiendo, las soluciones básicas de este ejemplo son:

Variables básicas	**Variables no básicas**
$x_1 = 2;\ x_2 = 1$	$x_3 = 0$
$x_1 = 5;\ x_3 = -1$	$x_2 = 0$
$x_2 = \frac{5}{3};\ x_3 = \frac{2}{3}$	$x_1 = 0$

Si A es una matriz de dimensión $m \times n$ y $n > m$, tendrá $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ soluciones básicas como máximo. En el ejemplo anterior $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$, y como hemos visto anteriormente, hay 3 soluciones básicas exactamente. A veces este número máximo de soluciones básicas no se alcanza porque algunas de las submatrices tienen determinante nulo. Ésto puede verse en algunos problemas en la parte de los ejercicios resueltos.

Si X_B es una solución básica y se cumple que los valores de las variables básicas son mayores o iguales que cero, decimos que la **solución es básica factible** y que la base B es una **base factible**.

Si en una solución factible básica, alguna de las variables básicas vale cero, decimos que la **solución es factible básica degenerada**.

Soluciones básicas factibles adyacentes son dos soluciones básicas factibles que tienen en común $m-1$ variables básicas.

Ejemplo 22 *Con referencia al ejemplo anterior:*

Variables básicas	*Variables no básicas*
$x_1 = 2; x_2 = 1$	$x_3 = 0$ *Solución básica factible*
$x_1 = 5; x_3 = -1$	$x_2 = 0$ *Solución básica no factible*
$x_2 = \frac{5}{3}; x_3 = \frac{2}{3}$	$x_1 = 0$ *Solución básica factible*

2.4 Algunos resultados sobre las soluciones

Vamos a estudiar ahora algunos resultados relacionados con las soluciones de un problema de programación lineal.

Teorema 2 *El conjunto F de las soluciones factibles es convexo.*

Demostración

Suponemos $F = \{x \in I\!R^n \quad / \quad Ax = b; \quad x \geq 0\}$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in F$ probaremos que $x = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in F; \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

$$\vec{x}_1 \in F \quad \Longleftrightarrow \quad A\vec{x}_1 = b; \quad \vec{x}_1 \geq 0$$

$$\vec{x}_2 \in F \quad \Longleftrightarrow \quad A\vec{x}_2 = b; \quad \vec{x}_2 \geq 0$$

Como $x = \lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in F$ si cumple que $AX = b$; esto es:

$$A[\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2] = A\lambda\vec{x}_1 + A(1-\lambda)\vec{x}_2 = \lambda A\vec{x}_1 + (1-\lambda)A\vec{x}_2 =$$

$$= \lambda b + (1-\lambda)b = \lambda b + b - \lambda b = b.$$

Veamos que $x \geq 0$

$\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \geq 0$ son sumas de dos productos ≥ 0; por tanto es ≥ 0.

Luego se verifica que $\lambda\vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in F$. Luego F es convexo.

Teorema 3 *Sea A una matriz $m \times n$ con $r(A) = m$ y sea b un vector $m \times 1$. Sea F el conjunto convexo formado por los vectores X que cumplen $AX = b$ con $X \geq 0$. Un vector X es una solución básica factible si y solo si X es punto extremo de F.*

Demostración

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m; 0, 0, \ldots, 0)$ es una solución básica factible, y $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ es la base asociada a esta solución.

Supongamos que X no es punto extremo, y razonaremos por reducción al absurdo.

Si X no es punto extremo, existen dos puntos $y, z \in F$ que verifican:

$$X = \lambda y + (1-\lambda)z \qquad \text{para algún} \qquad \lambda \in (0,1) \quad \text{con} \quad y \neq z.$$

Además y, z son de la forma:

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m; y_{m+1}, \ldots, y_n) \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_m; z_{m+1}, \ldots, z_n).$$

De esta forma tenemos:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m; 0, \ldots, 0) =$$
$$= \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_m; y_{m+1}, \ldots, y_n) + (1-\lambda)(z_1, z_2, \ldots, z_m; z_{m+1}, \ldots, z_n).$$

Si operamos tenemos:

$(x_1, x_2, \ldots, x_m; 0, \ldots, 0) =$

$$\begin{aligned} = \quad & (\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2, \ldots, \lambda y_m + (1-\lambda)z_m, \lambda y_{m+1} + \\ & +(1-\lambda)z_{m+1}, \ldots, \lambda y_n + (1-\lambda)z_n). \end{aligned}$$

Luego

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda y_{m+1} + (1-\lambda) z_{m+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda y_n + (1-\lambda) z_n = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y_{m+1} = 0 \\ \cdots\cdots \\ y_n = 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{c} z_{m+1} = 0 \\ \cdots\cdots \\ z_n = 0 \end{array}\right.$$

puesto que no puede haber soluciones negativas.

Además tenemos, como $y, z \in F$ se cumple

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 a_1 + y_2 a_2 + \cdots + y_m a_m & = & b \\ z_1 a_1 + z_2 a_2 + \cdots + z_m a_m & = & b \end{array}\right\}$$

Si restamos ambas expresiones nos queda:

$$(y_1 - z_1) a_1 + (y_2 - z_2) a_2 + \cdots + (y_m - z_m) a_m = \vec{0}.$$

Por definición sabemos que los escalares tienen que ser cero, pues $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ forman una base, y por tanto son linealmente independientes, por lo que se deduce:

$$\cdot \quad \left.\begin{array}{rcl} y_1 - z_1 & = & 0 \\ y_2 - z_2 & = & 0 \\ \cdots\cdots & & \\ y_m - z_m & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & z_1 \\ y_2 & = & z_2 \\ \cdots\cdots & & \\ y_m & = & z_m \end{array}\right\} \Longrightarrow y = z.$$

Pero esto es absurdo pues habíamos supuesto que $y \neq z$. Y por tanto hemos llegado a una contradicción, esto implica que X es punto extremo.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que X es un punto extremo de F que tiene k componentes estrictamente mayores que 0. Suponemos sin pérdida de generalidad que son las k primeras $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k; 0, \ldots, 0)$.

Como tiene que verificar el sistema tendremos:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k = b \tag{2.1}$$

Vamos a probar que $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ son linealmente independientes. Vamos a razonar por reducción al absurdo.

Supongamos que no son linealmente independientes, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ no todos nulos tal que:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \vec{0}$$

Si multiplicamos por $\epsilon > 0$, entonces:

$$\epsilon\lambda_1 a_1 + \epsilon\lambda_2 a_2 + \cdots + \epsilon\lambda_k a_k = \vec{0} \tag{2.2}$$

Si sumamos (2.1) y (2.2) tenemos:

$$(x_1 + \epsilon\lambda_1)a_1 + (x_2 + \epsilon\lambda_2)a_2 + \cdots + (x_k + \epsilon\lambda_k)a_k = b$$

Si restamos (2.1) y (2.2) tenemos:

$$(x_1 - \epsilon\lambda_1)a_1 + (x_2 - \epsilon\lambda_2)a_2 + \cdots + (x_k - \epsilon\lambda_k)a_k = b$$

Si llamamos y, z a los vectores:

$$y = (x_1 + \epsilon\lambda_1, x_2 + \epsilon\lambda_2, \dots, x_k + \epsilon\lambda_k, 0, \dots, 0)$$

$$z = (x_1 - \epsilon\lambda_1, x_2 - \epsilon\lambda_2, \dots, x_k - \epsilon\lambda_k, 0, \dots, 0)$$

Ambos son solución de $AX = b$. Si tomamos ϵ suficientemente pequeño:

$$\begin{array}{ll} x_i + \epsilon\lambda_i \geq 0 \qquad & y \geq 0 \\ x_i - \epsilon\lambda_i \geq 0 \qquad & z \geq 0 \end{array}$$

Por tanto y, z verifican el sistema y además son mayores o iguales a cero, entonces $y, z \in F$.

Pero si calculamos $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\epsilon\lambda_1, \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\epsilon\lambda_2, \dots, \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}\epsilon\lambda_k, 0, \dots, 0\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}\epsilon\lambda_1, \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}\epsilon\lambda_2, \dots, \frac{1}{2}x_k - \frac{1}{2}\epsilon\lambda_k, 0, \dots, 0\right) = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = X \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pero esto es contradicción con que X sea punto extremo de F. Por tanto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ son linealmente independientes, siendo $k \leq m$.

Pueden ocurrir dos cosas:

- Si $k = m$ forman base, y entonces X es solución básica factible.
- Si $k < m$ se completan las columnas que faltan formando una base, entonces será solución básica factible degenerada.

Teorema 4 *Dado un programa lineal en forma estándar factible acotado, el valor óptimo del programa lineal se obtiene en un punto extremo de la región factible.*

Demostración

Sea el programa lineal

$$\left.\begin{array}{ll} Max & z = c^t X \\ s.a. & AX = b \\ & X \geq 0 \end{array}\right\}$$

y sean $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ puntos extremos.

Si llamamos $M = max\{c^t E_1, c^t E_2, \ldots, c^t E_k\}$.

Sea ahora $X \in F$ un punto cualquiera de la región factible, usando el teorema anterior tendremos:

$$X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k \qquad / \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Z &= c^t X = c^t(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_k E_k) = \\ &= \lambda_1 c^t E_1 + \lambda_2 c^t E_2 + \cdots + \lambda_k c^t E_k \leq \lambda_1 M + \lambda_2 M + \cdots + \lambda_k M \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k) \cdot M = 1 \cdot M = M. \end{aligned}$$

Así tenemos que M es el valor de la función objetivo en algún punto extremo. $\forall x \in F$ el valor de la función objetivo $Z \leq M$, entonces el punto de la región factible que me da el mayor valor es el valor extremo.

La demostración para el caso minimizante es idéntica, sólo que hay que buscar el mínimo y tendremos que $Z \geq m$, siendo $m = min\{c^t E_1, c^t E_2, \ldots, c^t E_k\}$.

Ejemplo 23 *Hallar la solución óptima del programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Variables básicas	Variables no básicas	Objetivo
$x_1 = 2;\ x_2 = 1$	$x_3 = 0$	z=1
$x_1 = 5;\ x_3 = -1$	$x_2 = 0$	No factible
$x_2 = 5/3;\ x_3 = 2/3$	$x_1 = 0$	z=5/3

El valor máximo de Z es $Z = 5/3$, eso implica que la solución óptima es:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5/3 \qquad x_3 = 2/3.$$

Teorema 5 *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ soluciones óptimas de un programa lineal en forma estándar, entonces las combinaciones lineales convexas de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ también son soluciones óptimas.*

Si llamamos $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$, y evaluamos Z, obtenemos:

$$\begin{aligned} Z &= c^t X = c^t(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k) = \\ &= \lambda_1 c^t x_1 + \lambda_2 c^t x_2 + \cdots + \lambda_k c^t x_k = \\ &= \lambda_1 M + \lambda_2 M + \cdots + \lambda_k M = \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k) \cdot M = 1 \cdot M = M. \end{aligned}$$

Luego X también es óptima.

Ejemplo 24 *Resolver el siguiente P.L.*

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + x_2 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Los puntos extremos son $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(3,3)$, $D(0,3)$, $E(0,0)$ que aparecen en la siguiente figura.

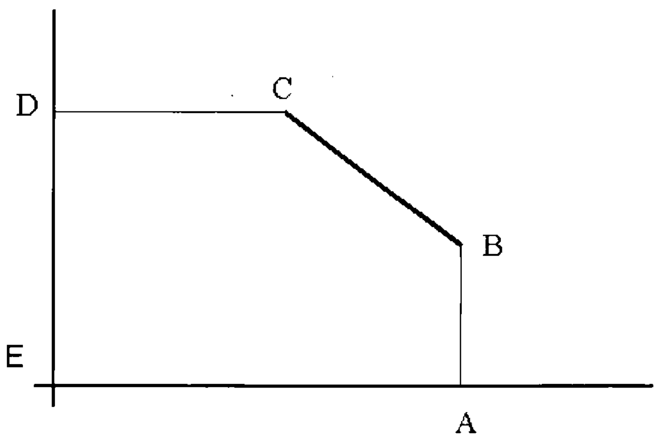


Figura 2.1: Soluciones óptimas multiples

Variables básicas	Objetivo
$x_1 = 0; x_2 = 0$	$z = 0$ Solución básica factible
$x_1 = 0; x_2 = 3$	$z = 9$ Solución básica no factible
$x_1 = 3; x_2 = 3$	$z = 18$ Solución óptima
$x_1 = 4; x_2 = 2$	$z = 18$ Solución óptima
$x_1 = 4; x_2 = 0$	$z = 12$ Solución básica factible

Luego B y C son soluciones óptimas, y por tanto todos los puntos del segmento lineal $\overline{BC}$ también son soluciones óptimas.

2.5 El algoritmo del Simplex

El algoritmo del Simplex es una técnica general de resolución de problemas de programación lineal. Los pasos básicos del algoritmo son los siguientes::

1. Partir de una solución básica factible. (Un vértice de la región factible).
2. Comprobar si esta solución es óptima. Si es así, parar. En caso contrario, ir al paso 3.
3. Hallar una nueva solución básica adyacente a la anterior que mejore el valor de la función objetivo. Ir al paso 2.

Explicaremos la forma en que se realizan estos pasos con el siguiente ejemplo, dejando para más adelante una exposición más detallada del algoritmo.

Ejemplo 25 *Resolver el siguiente P.L.*

$$\begin{array}{ll} Max & z = x_1 + x_2 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Como el problema tiene sólo dos variables podría resolverse por el procedimiento geométrico. Se puede comprobar que la región factible es el polígono de vértices O, A, B, C, D. Las coordenadas de los vértices y los valores de la función objetivo de cada uno de ellos son:

Vértice	Coordenadas	Valor de la función objetivo
O	(0, 0)	0
A	(0,2)	2
B	$(\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$	$\frac{10}{3}$
C	(2, 2)	4
D	(3, 0)	3

Por lo tanto el valor óptimo va a ser C con un valor óptimo de 4 para la función objetivo.

Ahora queremos resolver este problema por un procedimiento analítico.

Lo primero que vamos a hacer es formular el problema en forma estándar, introduciendo variables de holgura:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & z = x_1 + x_2 \\
\text{s.a.:} & \left\{ \begin{array}{cccccccc}
-x_1 & +x_2 & +h_1 & & & = & 2 \\
x_1 & +2x_2 & & +h_2 & & = & 6 \\
2x_1 & +x_2 & & & +h_3 & = & 6 \\
x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & h_1 \geq 0 & h_2 \geq 0 & h_3 \geq 0 & &
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Paso 1 Partir de una solución básica factible. (Un vértice de la región factible). En este caso es muy fácil partir de una solución básica factible. Si tomamos como variables básicas las variables de holgura, y damos a las no básicas x_1 y x_2 el valor cero tenemos la solución básica factible de partida $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 2, 6, 6)$ con un valor para $z = x_1 + x_2 = 0$. Los valores anteriores cumplen el siguiente sistema que se ha conseguido añadiendo al anterior una última ecuación conseguida trasponiendo términos en la función objetivo.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & -x_1 & +x_2 & +h_1 & & & = & 2 \\
 & x_1 & +2x_2 & & +h_2 & & = & 6 \\
 & 2x_1 & +x_2 & & & +h_3 & = & 6 \\
z & -x_1 & -x_2 & & & & = & 0 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & h_1 \geq 0 & h_2 \geq 0 & h_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Puede observarse que todos los valores de las variables básicas, y también el valor de z, aparecen en los términos independientes de este sistema.

Paso 2 Comprobar si esta solución es óptima. Puesto que $z = x_1 + x_2 = 0$. Podremos mejorarla si logramos introducir en la base la variable x_1 ó x_2. Supongamos que introducimos x_1 en la base aumentando su valor dentro de las condiciones de factibilidad y manteniendo x_2 como variable no básica ($x_2 = 0$). Se deberá pues cumplir:

$$\begin{array}{lllllll} -x_1 & +h_1 & & & = & 2 \\ x_1 & & +h_2 & & = & 6 \\ 2x_1 & & & +h_3 & = & 6 \\ x_1 \geq 0 & h_1 \geq 0 & h_2 \geq 0 & h_3 \geq 0 & & \end{array}$$

es decir

$$\begin{array}{lllllll} h_1 & = & 2 & + & x_1 & \geq 0 \\ h_2 & = & 6 & - & x_1 & \geq 0 \\ h_3 & = & 6 & - & 2x_1 & \geq 0 \end{array}$$

Como $x_1 \geq 0$ la primera restricción se cumple siempre. Para que se cumplan las otras dos ha de ser $x_1 \leq 6$ y $x_1 \leq \frac{6}{2} = 3$ Por lo tanto el mejor valor para x_1 cumpliendo todas las condiciones de factibilidad es 3. Así que la solución actual no es óptima, puesto que puede mejorarse aumentando el valor de x_1.

Paso 3 Hallar una nueva solución básica adyacente a la actual que mejore el valor de la función objetivo.

Si tomamos $x_1 = 3$, $h_3 = 6 - 2x_1 = 0$. Por lo tanto la variable h_3 saldrá de la base entrando en su lugar x_1. La nueva solución es $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (3, 0, 5, 3, 0)$ con un valor para $z = x_1 + x_2 = 3 + 0 = 3$, mejorándose por tanto el valor de z. Con el objeto de que la actual solución aparezca de nuevo en el lugar de los términos independientes del sistema realizamos las transformaciones adecuadas para que los coeficientes de x_1 del sistema sean 0, 0, 1, 0, que eran los coeficientes que antes tenía h_3. Para ello dividimos la tercera ecuación por el coeficiente de x_1, que es 2 (**pivote**), y realizamos las transformaciones del método de Gauss a las restantes ecuaciones, de modo que los restantes coeficientes de x_1 sean nulos. De esta forma se obtiene el sistema siguiente:

$$\begin{array}{llllllll} & & \frac{3}{2}x_2 & +h_1 & & +\frac{1}{2}h_3 & = & 5 \\ & & \frac{3}{2}x_2 & & +h_2 & -\frac{1}{2}h_3 & = & 3 \\ & x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & & +\frac{1}{2}h_3 & = & 3 \\ z & & -\frac{1}{2}x_2 & & & +\frac{1}{2}h_3 & = & 3 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & h_1 \geq 0 & h_2 \geq 0 & h_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Ir paso 2 La solución actual es $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (3, 0, 5, 3, 0)$ ¿Es óptima? Despejamos z de la última ecuación obteniendose $z = 3 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}h_3$. El valor de z puede mejorar si podemos aumentar el valor de x_2 que toma en la solución básica actual el valor 0. Conviene mantener para h_3 el valor 0. Impondremos las condiciones de factibilidad:

$$h_1 = 5 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0,\ h_2 = 3 - \frac{3}{2}x_2 \geq 0,\ x_1 = 3 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

Por lo tanto

$$\frac{5}{\frac{3}{2}} \geq x_2,\ \frac{3}{\frac{3}{2}} \geq x_2,\ \frac{3}{\frac{1}{2}} \geq x_2 \qquad ; \qquad \frac{10}{3} \geq x_2,\ 2 \geq x_2,\ 6 \geq x_2$$

Estas condiciones se cumplen para $x_2 \leq 2$

Paso 3 Dando a x_2 el valor 2 se mejora lo más posible el valor de z. Esta variable entra en la base. Sustituyendo este valor para x_2 y h_3 por 0, se obtiene $h_2 = 0$ que es la variable que entra en la base. Si denominamos **pivote** al elemento a_{lk} siendo x_l la variable que deja de ser básica, y x_k la variable que pasa a ser básica, el pivote es ahora el coeficiente de x_2 de la segunda ecuación, que es $\frac{3}{2}$. Dividiendo esta segunda ecuación por $\frac{3}{2}$ y haciendo las transformaciones de Gauss adecuadas para anular el resto de los coeficientes de x_2 el sistema toma el siguiente aspecto.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & h_1 & -h_2 & +h_3 & = & 2 \\
 & & x_2 & & +\frac{2}{3}h_2 & -\frac{1}{3}h_3 & = & 2 \\
 & x_1 & & & -\frac{1}{3}h_2 & +\frac{2}{3}h_3 & = & 2 \\
z & & & & +\frac{1}{3}h_2 & +\frac{1}{3}h_3 & = & 4 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & h_1 \geq 0 & h_2 \geq 0 & h_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

La nueva solución básica es $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (2, 2, 2, 0, 0)$. Esta solución ya es óptima. En efecto, si despejamos z de la última ecuación del sistema obtenemos $z = 4 - \frac{1}{3}h_2 - \frac{1}{3}h_3$. Como h_2 y h_3 no pueden tomar valores negativos el mejor valor para estas variables es cero. Por lo tanto la solución actual $(2, 2, 2, 0, 0)$ no puede mejorarse.

2.6 Algoritmo del Simplex en forma de tabla (max)

Vamos a describir el Algoritmo del simplex en forma de tabla en el caso maximizante:

0. **Construir la tabla inicial**: Esta tabla se construye tomando en cada fila los coeficientes de cada restricción seguido del correspondiente término independiente de la forma estándar. Añadimos una última fila con los coeficientes que resultan si se trasponen los términos de la función objetivo hasta igualarlos a cero. Los términos de la matriz de los coeficientes se designan en general por y_{ij} y los términos independientes por x_i^0. En la parte superior de la tabla aparecen los costes y las variables. En la parte izquierda de la tabla aparecen estos mismos datos referentes a las variables básicas. La tabla inicial presentaría el siguiente aspecto:

Opt.		c_1	c_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	c_n	coef. objetivo
		x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	x_n	variables
x_1	c_1	y_{11}	y_{12}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{1n}	x_1^0
x_2	c_2	y_{21}	y_{22}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{2n}	x_2^0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m	y_{m1}	y_{m2}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{mn}	x_m^0
		r_1	r_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	r_n	Z_0

Los coeficientes r_i que aparecen en la última fila se suelen llamar **costes reducidos** de la variable correspondiente.

1. **Partir de una solución básica factible:** Suponemos que esta primera solución corresponde a una **base canónica** (La correspondiente matriz básica es la identidad). La forma de conseguir esta solución canónica inicial se detallará posteriormente.

2. **Comprobar si esta solución es óptima**. La solución actual es óptima si todos los costes reducidos, coeficientes de la última fila, son no negativos (positivos o nulos). Si es así, parar. En otro caso ir al paso 3.

3. **Hallar una nueva solución básica adyacente a la actual que mejore el valor de la función objetivo**:

   3a. Regla de la variable de entrada

   Seleccionar para entrar en la base la variable con r_j más negativo. Sea ésta la x_k. Cuando hay varias variables que tienen este mismo valor, se selecciona arbitrariamente una cualquiera de éstas.

   3 b. Regla de la variable de salida

   Seleccionar para salir de la base el que haga mínimo el cociente $\frac{x_i^0}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. Sea la fila l. (Si todos los $y_{ik} \leq 0$, el problema es no acotado) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$. En caso contrario ir al paso 4.

4. Realizar transformaciones en la tabla para conseguir una nueva matriz unitaria tomando y_{lk} como **pivote.** Se realizan transformaciones lineales similares a las que se usan en el método de Gauss, hasta conseguir que la columna k tenga el valor 1 en el lugar del elemento pivote y 0 en los restantes. De esta forma obtenemos una nueva solución básica factible adyacente a la anterior. Con esta nueva solución, ir al paso 2.

Ir paso 2

Ejemplo 26 *Resolver el problema anterior*

$$
\begin{array}{ll}
Max & z = x_1 + x_2 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

en forma de tabla

Paso 0 La tabla inicial es (introduciendo variables de holgura):

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	-1	1	1	0	0	2
0	h_2	1	2	0	1	0	6
0	h_3	2	1	0	0	1	6
		-1	-1	0	0	0	0

Paso 1 Partimos de una base canónica. La solución básica factible inicial es $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 2, 6, 6)$ con un valor para $z = x_1 + x_2 = 0 + 0 = 0$.

Puede observarse que todos los valores de las variables básicas, y también el valor de z, aparecen en los términos independientes de este sistema.

Paso 2 Comprobar si esta solución es óptima. No es óptima puesto que hay valores no negativos de los costes reducidos (los que corresponden a las variables x_1 y x_2 ambos con valor -1.

Paso 3 a Seleccionamos la primera como variable de entrada $k = 1$.

Paso 3 b Seleccionamos como variable de salida la que aparezca en la fila correspondiente al mínimo cociente $\dfrac{x_i^0}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. En este caso el valor mínimo se alcanza cuando: $\min\left(\frac{6}{1}, \frac{6}{2}\right) = \min(6, 3) = 3$. Corresponde a la tercera fila. Así que $l = 3$. Por lo tanto el elemento pivote es $y_{31} = 2$. La variable de salida es h_3.

Paso 4 Hallar una nueva solución básica adyacente a la actual que mejore el valor de la función objetivo.

Pivoteando se obtiene la siguiente tabla:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	5
0	h_2	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3
1	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	3
		0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	3

La nueva solución es $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (3, 0, 5, 3, 0)$ con un valor para $z = 3$.

Ir paso 2 ¿Es óptima? No porque algún coste reducido es negativo (el que corresponde a la variable x_2 que vale $-\frac{1}{2}$.

Paso 3 a Seleccionamos x_2 como variable de entrada, por lo tanto $k = 2$.

Paso 3 b Seleccionamos como variable de salida la que aparezca en la fila correspondiente al mínimo cociente $\frac{x_i^0}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. En este caso $\min\left(\frac{5}{\frac{3}{2}}, \frac{3}{\frac{3}{2}}, \frac{3}{\frac{1}{2}}\right) = \min\left(\frac{10}{3}, 2, 6\right) = 2$. Corresponde a la segunda fila. Así que $l = 2$. Por lo tanto el elemento pivote es $y_{22} = \frac{3}{2}$. La variable de salida es h_2.

Paso 4 Hallar una nueva solución básica adyacente a la actual que mejore el valor de la función objetivo.

Pivoteando se obtiene la siguiente tabla:

		1	1	0	0	0	
		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	0	1	-1	1	2
0	x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
1	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2
		0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4

La nueva solución es $(x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (2, 2, 2, 0, 0)$ con un valor para $z = 4$.

Ir paso 2 ¿Es óptima? Sí, porque ningún coste reducido es negativo. Por lo tanto la solución óptima de este problema es $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. El valor de las variables de holgura vale para saber qué restricciones están **saturadas** (se cumple la igualdad) con esta solución. En este caso las dos últimas restricciones están saturadas por lo que los recursos segundo y tercero se agotan y, en cambio, sobran 2 unidades del primer recurso, pues $h_1 = 2$.

2.7 Algoritmo del Simplex en forma de tabla (min)

Vamos a describir ahora el Algoritmo del Simplex en el caso minimizante.

Un procedimiento que puede seguirse es transformar la función objetivo de maximización en otra de minimización tal como se ha indicado anteriormente.

Un problema de maximización puede pasarse a otro de minimización de la siguiente forma:

$$\text{Min } z = \sum^{n} c_j x_j \iff \text{Max } z' = \sum^{n} (-c_j) x_j \quad ; \qquad z = -z'$$

De esta forma ya se podría aplicar el algoritmo anterior.

También cabe la posibilidad de usar un algoritmo específico para este caso. con ligeras modificaciones al anterior. Estas variaciones se reducen a cambios de signo en los costes reducidos. A continuación indicamos los pasos del algoritmo minimizante de Simplex. Se han subrayado los cambios que se hacen al algoritmo anterior (caso maximizante).

2.7.1 Algoritmo del simplex en forma minimizante

Construir la tabla inicial: Esta tabla se construye tomando en cada fila los coeficientes de cada restricción seguido del correspondiente término independiente de la forma estándar. Añadimos una última fila con los coeficientes que resultan si se trasponen los términos de la función objetivo hasta igualarlos a cero. Los términos de la matriz de los coeficientes se designan en general por y_{ij} y los términos independientes por x_i^0. En la parte superior de la tabla aparecen los costes y las variables. En la parte izquierda de la tabla aparecen estos mismos datos referentes a las variables básicas. La tabla inicial presentaría el siguiente aspecto:

Opt.		c_1	c_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	c_n	coef. objetivo
		x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	x_n	variables
x_1	c_1	y_{11}	y_{12}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{1n}	x_1^0
x_2	c_2	y_{21}	y_{22}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{2n}	x_2^0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m	y_{m1}	y_{m2}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{mn}	x_m^0
		r_1	r_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	r_n	Z_0

Los coeficientes r_i que aparecen en la última fila se suelen llamar **costes reducidos** de la variable correspondiente.

1. **Partir de una solución básica factible:** Suponemos que esta primera solución corresponde a una **base canónica** (La correspondiente matriz básica es la identidad). La forma de conseguir esta solución canónica inicial se detallará posteriormente.

2. **Comprobar si esta solución es óptima**. La solución actual es óptima si todos los costes reducidos son no *positivos (todos son negativos o nulos)*. Si es así, parar. En otro caso ir al paso 3.

3. **Hallar una nueva solución básica adyacente a la actual que mejore el valor de la función objetivo**:

   3a. Regla de la variable de entrada

   Seleccionar para entrar en la base la variable con r_j más *positivo*. Sea ésta la x_k. Cuando hay varias variables que tienen este mismo valor, se selecciona arbitrariamente una cualquiera de éstas.

3 b. Regla de la variable de salida

Seleccionar para salir de la base el que haga mínimo el cociente $\frac{x_i^0}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. Sea la fila l. (Si todos los $y_{ik} \leq 0$, el problema es no acotado) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$. En caso contrario ir al paso 4.

4. Realizar transformaciones en la tabla para conseguir una nueva matriz unitaria tomando y_{lk} como **pivote.** Se realizan transformaciones lineales similares a las que se usan en el método de Gauss, hasta conseguir que la columna k tenga el valor 1 en el lugar del elemento pivote y 0 en los restantes. De esta forma obtenemos una nueva solución básica factible adyacente a la anterior.

5. Con la nueva solución del paso anterior, ir al paso 2.

Ejemplo 27 *Dado el programa lineal:*

$$
\begin{array}{ll}
Min & Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl}
x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 & = & 7 \\
-2x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 12 \\
-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 & = & 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & &
\end{array}\right\}
\end{array}
$$

resolverlo usando el algoritmo del Simplex en forma minimizante.

Tomamos como variables básicas: (x_1, x_4, x_6)

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla	*I*	0	1	-3	0	2	0	sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_1	0	1	3	-1	0	2	0	7
x_4	0	0	-2	$\boxed{4}$	1	0	0	12
x_6	0	0	-4	3	0	8	1	10
		0	-1	$\boxed{3}$	0	-2	0	$Z_0 = 0$

La variable que pasa a ser básica es x_3 por ser r_3 el más positivo de los r_j. Y deja de ser básica x_4 pues $min\left\{\frac{12}{4}; \frac{10}{3}\right\} = \frac{12}{4} = 3$.

Si hacemos las transformaciones:

Multiplico la fila 2 por 1/4.

Sumo a la fila 1 la fila 2.

Resto a la fila 3 la fila 2 multiplicada por 3.

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	*II*	0	1	−3	0	2	0	sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_1	0	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	2	0	10
x_3	−3	0	−1/2	1	1/4	0	0	3
x_6	0	0	−5/2	0	−3/4	8	1	1
		0	$\boxed{1/2}$	0	−3/4	−2	0	$\hat{Z} = -9$

Entra en la base x_2 por ser el más positivo de los r_j. Y sale x_1 pues es el único y_{i2} que es positivo.

Si hacemos las transformaciones:

Multiplico la fila 1 por 2/5.

Sumo a la fila 2 la fila 1 multiplicada por 1/5.

Sumo a la fila 3 la fila 1.

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	*III*	0	1	−3	0	2	0	sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_2	1	2/5	1	0	1/10	4/5	0	4
x_3	−3	1/5	0	1	3/10	2/5	0	5
x_6	0	1	0	0	−1/2	10	1	11
		−1/5	0	0	−4/5	−12/5	0	$\tilde{Z} = -11$

La solución asociada a esta base es óptima pues todos los $r_j \leq 0$, la solución es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 11 \quad ; \qquad \tilde{Z} = -11.$$

2.8 Búsqueda de soluciones iniciales

Vamos a considerar dos casos:

- Primer caso: Hay desigualdades ($\leq$).
- Segundo caso: Hay igualdades o desigualdades ($\geq$).

Primer caso (Desigualdades $\leq$).

En este caso, las desigualdades se convierten en igualdades introduciendo variables de holgura positivas que tienen como coeficiente en la función objetivo igual a cero. Ya hemos aplicado este procedimiento anteriormente. Ilustramos la búsqueda de soluciones iniciales con varios ejemplos:

Ejemplo 28 *Dado el programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 9 \\ 2x_1 \quad + 3x_3 & \leq & 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Si introducimos las variables de holgura positivas tendremos el programa equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad + x_5 & = & 9 \\ 2x_1 \quad + 3x_3 \quad + x_6 & = & 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Tomamos como variables básicas las de holgura: x_4, x_5, x_6. Por tanto una solución básica factible inicial es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 10 \quad x_5 = 9 \quad x_6 = 12 \quad ; \qquad Z_0 = 0$$

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla	*I*	3	2	1	0	0	0	sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_4	0	1	2	1	1	0	0	10
x_5	0	1	1	2	0	1	0	9
x_6	0	$\boxed{2}$	0	3	0	0	1	12
		$\boxed{-3}$	−2	−1	0	0	0	$Z_0 = 0$

Entra en la base x_1 por ser el más negativo de los r_j.

Y sale x_6 pues: $min\left\{\frac{9}{1}; \frac{10}{1}; \frac{12}{2}\right\} = \frac{12}{2} = 6$.

Si hacemos las transformaciones:

Multiplico la fila 3 por 1/2.

Sumo a la fila 1 la fila 3 multiplicada por (-1/2).

sumo a la fila 2 la fila 3 multiplicada por (-1/2).

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla II		3	2	1	0	0	0	sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_4	0	0	$\boxed{2}$	$-1/2$	1	0	$-1/2$	4
x_5	0	0	1	$1/2$	0	1	$-1/2$	3
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	6
		0	$\boxed{-2}$	$7/2$	0	0	$3/2$	$Z = 18$

Entra en la base x_2 porque le corresponde el más negativo de los r_j. Y sale x_4 pues: $min\left\{\frac{3}{1};\frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{2} = 2.$

Si hacemos las transformaciones:

Multiplico la fila 1 por 1/2.

Sumo a la fila 2 la fila 1 multiplicada por (-1/2).

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla III		3	2	1	0	0	0	sol. b sica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_2	2	0	1	$-1/4$	$1/2$	0	$-1/4$	2
x_5	0	0	0	$3/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	1
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	6
		0	0	3	1	0	1	$\tilde{Z} = 22$

La solución asociada a esta base es óptima pues todos los $r_j \geq 0$, la solución es:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad ; \qquad \tilde{Z} = 22.$$

Las variables de holgura no se han incluido en la solución óptima.

El valor para la variable de holgura $x_5 = 1$ significa que una unidad del segundo recurso no se ha gastado.

Ejemplo 29 *Dado el programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = x_1 + 2x_2 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 - 5x_2 & \leq & 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Si introducimos las variables de holgura positivas tendremos el programa equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_4 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Y por tanto una solución básica factible inicial es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 8; \qquad Z_0 = 0$$

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla	*I*	1	2	0	0	sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	factible
x_3	0	1	-2	1	0	4
x_4	0	1	-5	0	1	8
		-1	$\boxed{-2}$	0	0	$Z_0 = 0$

La solución es no acotada o ilimitada pues todos los $y_{i2} < 0$ ya que $y_{32} = -2 < 0$, $y_{42} = -5 < 0$.

Nota: Este programa lineal puede resolverse usando el método geométrico estudiado en el Tema 1. Puede observarse entonces que la región factible es no acotada y la solución de este programa lineal también es no acotada.

Segundo caso: (Igualdades o desigualdades $\geq$).

Como en el caso anterior, vamos a estudiarlo a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 30 *Dado el programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min} & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \textit{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Si introducimos las variables de holgura positivas, y una variable artificial x_6 tendremos el programa **no** equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = 3x_1 + 5x_2 + mx_6 \\ \text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 4 \\ x_2 + x_4 & = & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 & = & 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

De esta forma hemos construido un programa no equivalente con variables artificiales, que en el caso en que todas las variables artificiales sean nulas, será un programa equivalente al inicial.

En el ejemplo anterior, el sistema es equivalente al inicial si la variable artificial $x_6 = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & \Longrightarrow & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + r_i = b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & \Longrightarrow & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - t_i + r_i = b_i \end{array} \right.$$

donde r_i son las variables artificiales, y t_i son las variables de holgura.

2.8.1 Método de las Penalizaciones

Caso Maximizante. A las variables artificiales se les pone costo muy bajo $(-m) \longrightarrow -\infty$ en la función objetivo (Z), para que salgan rápidamente de la base.

Caso Minimizante. A las variables artificiales se les pone costo muy alto $(m) \longrightarrow +\infty$ en la función objetivo (Z), para que salgan rápidamente de la base.

Teorema 6 *Dado un programa lineal con variables artificiales y dada la solución básica factible óptima $X_B = B^{-1} \cdot b$, si alguna de las variables artificiales es básica, y con valor positivo, entonces el problema original es no factible.*

Si continuamos con el ejemplo anterior, y construimos la tabla del Simplex, usando el método de las penalizaciones obtenemos:

La solución básica factible inicial es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 6 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 18; \qquad Z_0 = 18m$$

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla *Min*	*I*	3 x_1	5 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	m x_6	sol. básica factible
x_3	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	m	3	2	0	0	-1	1	18
r_j		$\boxed{3m-3}$	$2m-5$	0	0	$-m$	0	$Z_0 = 18m$

Así, entra en la base x_1 por ser r_1 el mayor y sale de la base x_3, pues hace mínimo el cociente $4/1$ y $18/3$. Si construimos la nueva tabla del Simplex obtenemos:

Tabla II		3	5	0	0	0	m	sol. básica
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_1	3	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	m	0	$\boxed{2}$	-3	0	-1	1	6
r_j		0	$\boxed{2m-5}$	$-3m+3$	0	$-m$	0	$Z = 6m + 12$

Entra en la base x_2 por ser r_2 el mayor, y sale de la base x_6 pues es el que hace mínimo el cociente $6/1$ y $6/2$. Si construimos la nueva tabla del Simplex:

Tabla III		3	5	0	0	0	m	sol. básica
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_1	3	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	3
x_2	5	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3
r_j		0	0	$-9/2$	0	$-5/2$	$5/2 - m$	$\hat{Z} = 27$

La solución óptima es $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, con $z = 27$.

La variable de holgura $x_4 = 3$ se interpreta como que el segundo recurso no se gasta, y quedan 3 unidades.

Ejemplo 31 *Dado el programa lineal:*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Min} & Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
\textit{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Si introducimos las variables artificiales x_4, x_5 tendremos el programa **no** equivalente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & \text{Z} = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + mx_4 + mx_5 \\
\text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

Así hemos construido un programa no equivalente con variables artificiales, que en el caso en que todas las variables artificiales sean nulas, será un programa equivalente al inicial.

En el ejemplo anterior, el sistema es equivalente al inicial si las variables artificiales $x_4 = x_5 = 0$.

La solución básica factible inicial es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 2 \quad x_5 = 1; \qquad Z_0 = 3m$$

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla	*I*	1	-2	3	m	m	sol. básica
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	factible
x_4	m	-2	1	3	1	0	2
x_5	m	2	3	$\boxed{4}$	0	1	1
r_j		-1	$4m+2$	$\boxed{7m-3}$	0	0	$Z_0 = 3m$

Así, entra en la base x_3 por ser r_3 el mayor y sale de la base a_5, pues hace mínimo el cociente $2/3$ y $1/4$. Si construimos la nueva tabla del Simplex obtenemos:

Tabla	*II*	1	-2	3	m	m	sol. básica
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	factible
x_4	m	$-7/2$	$-5/4$	0	1	$-3/4$	$5/4$
x_3	3	$1/2$	$3/4$	1	0	$1/4$	$1/4$
r_j		$-\frac{7}{2}m + \frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}m + \frac{17}{4}$	0	0	$-\frac{7}{4}m + \frac{3}{4}$	$Z = 5m + \frac{3}{4}$

Así, el problema original es no factible, porque he llegado a la tabla óptima, y la variable artificial x_4 no ha salido de la base, y tiene un valor positivo $x_4 = 5/4$.

2.9 Algoritmo del Simplex en forma matricial

Si partimos de la forma matricial

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Opt.} & \mathrm{Z} = c'X \\ \text{s.a.:} & AX = b \\ & X \geq 0 \end{array}\right\}$$

siendo

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Y considerando, sin perdida de generalidad, que las n primeras columnas de A corresponden a la matriz básica B asociada a una solución básica factible, N es la matriz formada por las restantes columnas y que X_B, X_N, c_B, c_N son, respectivamente, las matrices formadas por las variables básicas, las no básicas, los costes de las variables básicas y los costes de la variables no básicas, entonces el problema puede expresarse en la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & Z = (c'_B, c'_N)\binom{X_B}{X_N} = c'_B X_B + c'_N X_N \\ \text{s.a.:} & \left(B \mid N \right)\binom{X_B}{X_N} = BX_B + NX_N = b \\ & \qquad X \geq 0 \end{array}\right\}$$

Multiplicando por B^{-1} el sistema formado por las restricciones, se obtiene:

$$B^{-1}BX_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

y por tanto

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$$

Sustituyendo en la función objetivo este valor de X_B tenemos:

$$Z = (c'_B, c'_N)\binom{X_B}{X_N} = c'_B X_B + c'_N X_N = c'_B\left(B^{-1}b - B^{-1}NX_N\right) + c'_N X_N =$$
$$= c'_B B^{-1}b + \left(c'_N - c'_B B^{-1}N\right)X_N.$$

En el caso particular de la solución básica asociada a esta matriz B, $X_N = 0$, por lo que las dos últimas expresiones tomarán la forma:

$$X_B = B^{-1}b = X_B^0 \quad y \quad Z = c'_B B^{-1}b = Z^0$$

que son los valores de las variables básicas y de la función objetivo correspondiente a una solución básica factible inicial.

Por lo tanto, en general se cumplirá para cualquier otra solución factible:

$$X_B = X_B^0 - B^{-1}NX_N,$$
$$Z = Z^0 + \left(c_N - c_B B^{-1}N\right)X_N = Z^0 - \left(c_B B^{-1}N - c_N\right)X_N.$$

Dependiendo de los valores de los elementos de la matriz $\left(c_B B^{-1}N - c_N\right)$ el valor de la función objetivo, Z, se podrá mejorar o no. Así, si el problema fuera de maximización, se podría mejorar la solución anterior si algún elemento de esta matriz fuera negativo, aumentando el valor del $x_j \in X_N$ dentro de las condiciones de factibilidad $X_B^0 - B^{-1}NX_N \geqslant 0$.

2.9.1 Método del Simplex en forma matricial (caso maximizante)

Paso 1 Partir de una solución básica factible inicial. $X_B = B^{-1}b = X_B^0$ y $Z = c'_B B^{-1} b = Z^0$.

Paso 2 Regla de la variable de entrada: Seleccionar para entrar en la base la variable no básica de X_N cuyo coeficiente en $\left(c'_B B^{-1} N - c'_N\right)$ sea lo menor posible. (el más negativo). Si ninguno de estos coeficientes fuera negativo la función objetivo no podría aumentar y tendríamos la solución óptima.

Paso 3 Regla de la variable de salida: Se selecciona la variable de salida de forma que la variable de entrada considerada anteriormente pueda tomar el mayor valor posible dentro de las condiciones de factibilidad $X_B^0 - B^{-1} N X_N \geqslant 0$.

Paso 4 Tomando ahora esta nueva base ir al paso 1.

Vamos a aplicar este enfoque del método del Simplex al ejemplo que aparece a continuación.

Ejemplo 32 *Dado el programa lineal:*

$$
\begin{array}{ll}
Max & Z = 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 \\
s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \quad N = (a_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ordenamos los cálculos de la forma siguiente:

$$B^{-1}\left(B \vdots N \vdots b\right) = \left(B^{-1}B \vdots B^{-1}N \vdots B^{-1}b\right) = \left(I \vdots B^{-1}N \vdots B^{-1}b\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X_B^0 = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Z^0 = c'_B B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

¿Es esta solución óptima?

$$c'_B B^{-1} N - c'_N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - (10) = (9 - 10) = (-1) .$$

Por ser negativo, la solución puede mejorar. Entra en la base x_3.

Las condiciones de factibilidad son:

$$X_B^0 - B^{-1} N X_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3x_3 \\ 1 + x_3 \end{pmatrix} \geqslant 0 .$$

Ha de cumplirse que $2 - 3x_3 \geqslant 0$, ya que $1 + x_3$ es siempre mayor o igual que cero si lo es x_3. El mejor valor para $x_3 = \frac{2}{3}$. Si damos este valor, la variable $x_1 = 0$ y sale de la base.

Las nuevas variables básicas son x_2 y x_3. Partiendo ahora de la matriz transformada resultante

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} \frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^0 &= X_B^0 = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\ Z^0 &= c'_B B^{-1} b = \begin{pmatrix} -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$c'_B B^{-1} N - c'_N = \begin{pmatrix} -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - 2 = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto la solución actual $x_1 = 0, x_2 = 5/3, x_3 = 2/3; z = 5/3$; es óptima.

2.10 Adaptación algebraica del algoritmo del Simplex

Definimos algunas magnitudes y concretamos algunos conceptos:

Sea el programa lineal $\left.\begin{array}{ll} \text{Opt.} & Z = c^t X \\ \text{s.a.:} & AX = b \\ & X \geq 0 \end{array}\right\}$

donde $r(A) = m$ y $B = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Si tenemos algún a_j que no está en la base B, entonces podemos expresarlo como combinación lineal de los vectores de B, de la forma:

$$a_j = y_{1j}a_1 + y_{2j}a_2 + \cdots + y_{mj}a_m = B \cdot y_j \qquad \text{donde} \quad y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \cdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

Así tenemos un procedimiento, pues $y_j = B^{-1} \cdot a_j$.

Hay un caso particular muy importante, cuando la base inicial coincide con la matriz identidad tendremos que $B = I$ y por tanto $y_j = a_j$.

Definimos el escalar z_j como $z_j = c_B^t \cdot y_j. = c'_B B^{-1} \cdot a_j$.

2.10.1 Algoritmo del Simplex (enfoque algebraico)

Partimos de una solución factible básica inicial, y a partir de ella se pasa a otra solución básica factible adyacente que se consigue cambiando una sola columna de la base. Este cambio se hace mediante un criterio lógico basado en:

- Mejorar lo más posible la función objetivo.
- Mantener la factibilidad (no deben salir soluciones básicas no factibles).

Para ello necesitamos:

- Regla para la variable de salida (Mantener la factibilidad).
- Regla para la variable de entrada (Mejorar la función objetivo).

Demostración de la Regla para la variable de salida.

Suponemos que la base $B = (a_1, a_2, a_3)$ y a_j es el vector que no está en B y que va a entrar en la nueva base.

Supongamos que las variables básicas son x_1, x_2, x_3, y que x_j es variable no básica. Si las variables toman los valores:

$$x_1 = x_1^0 \qquad x_2 = x_2^0 \qquad x_3 = x_3^0 \qquad x_j = 0.$$

Al introducir a_j en la nueva base tendremos:

$$x_1 = \hat{x_1} \qquad x_2 = \hat{x_2} \qquad x_3 = \hat{x_3} \qquad x_j = \theta \geq 0.$$

siendo alguna de las variables x_1, x_2, x_3 igual a cero y el resto son mayores o iguales a cero.

Como ambas soluciones deben ser factibles tendrá que cumplirse:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + x_3^0 a_3 & = & b \\ \hat{x_1} a_1 + \hat{x_2} a_2 + \hat{x_3} a_3 + \theta a_j & = & b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + x_3^0 a_3 = \hat{x_1} a_1 + \hat{x_2} a_2 + \hat{x_3} a_3 + \theta a_j \tag{2.4}$$

Como a_j es combinación lineal de los vectores de la base, tendremos que:

$$a_j = y_{1j} a_1 + y_{2j} a_2 + y_{3j} a_3 \tag{2.5}$$

Si sustituimos (2.5) en (2.4) tenemos:

$$x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + x_3^0 a_3 = \hat{x_1} a_1 + \hat{x_2} a_2 + \hat{x_3} a_3 + \theta(y_{1j} a_1 + y_{2j} a_2 + y_{3j} a_3)$$

$$x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + x_3^0 a_3 = (\hat{x_1} + \theta y_{1j}) a_1 + (\hat{x_2} + \theta y_{2j}) a_2 + (\hat{x_3} + \theta y_{3j}) a_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^0 = \hat{x_1} + \theta y_{1j} \\ x_2^0 = \hat{x_2} + \theta y_{2j} \\ x_3^0 = \hat{x_3} + \theta y_{3j} \end{array}\right. \quad \text{y despejando queda} \quad \left\{\begin{array}{l} \hat{x_1} = x_1^0 - \theta y_{1j} \\ \hat{x_2} = x_2^0 - \theta y_{2j} \\ \hat{x_3} = x_3^0 - \theta y_{3j} \end{array}\right. \tag{2.6}$$

donde algún $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3}$ debe ser cero, esto es:

$$x_1^0 - \theta y_{1j} = 0 \qquad x_2^0 - \theta y_{2j} = 0 \qquad x_3^0 - \theta y_{3j} = 0$$

o equivalentemente

$$\theta = \frac{x_1^0}{y_{1j}} \qquad \theta = \frac{x_2^0}{y_{2j}} \qquad \theta = \frac{x_3^0}{y_{3j}} \tag{2.7}$$

Como θ ha de ser positivo o cero, y x_1^0, x_2^0, x_3^0 lo son, podemos desechar las columnas para las que $y_{ij} \leq 0$.

Para las que cumplen que $y_{ij} > 0$ tendremos que como $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3}$ han de ser mayores o iguales que cero, y por tanto de (2.6) deducimos que:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^0 - \theta y_{1j} \geq 0 \\ x_2^0 - \theta y_{2j} \geq 0 \\ x_3^0 - \theta y_{3j} \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \theta \leq \dfrac{x_1^0}{y_{1j}} \\ \theta \leq \dfrac{x_2^0}{y_{2j}} \\ \theta \leq \dfrac{x_3^0}{y_{3j}} \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

Como pretendemos que θ cumpla (2.7) y (2.8) tendremos:

$$\theta = min\left\{\frac{x_i^0}{y_{ij}}\ ;\quad y_{ij} > 0\right\}$$

Y ésta es la regla para la variable de salida, aquella que hace mínimo el cociente $\frac{x_i^0}{y_{ij}}$ tal que $y_{ij} > 0$, siendo x_j la variable de entrada en la base.

Como regla de la variable de salida tenemos que dada la solución básica factible $X_B = B^{-1} \cdot b$, siendo el vector a_j que entra en la base, $y_{ij} > 0$ para algún i, entonces saldrá de la base aquel vector a_k que verifique:

$$\frac{x_k^0}{y_{kj}} = min\left\{\frac{x_i^0}{y_{ij}}\ ;\quad y_{ij} > 0\right\}.$$

Demostración de la Regla para la variable de entrada.

Sea $B = (a_1, a_2, a_3)$ y sea a_j que no está en la base B. Si las variables toman los valores:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1^0 \\ x_2 = x_2^0 \\ x_3 = x_3^0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad Z_0 = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + c_3 x_3^0.$$

Al introducir a_j en la nueva base tendremos:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \hat{x_1} \\ x_2 = \hat{x_2} \\ x_3 = \hat{x_3} \\ x_j = \theta. \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{Z} = c_1\hat{x_1} + c_2\hat{x_2} + c_3\hat{x_3}.$$

Si usamos las relaciones obtenidas anteriormente (2.6) tendremos:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= c_1(x_1^0 - \theta y_{1j}) + c_2(x_2^0 - \theta y_{2j}) + c_3(x_3^0 - \theta y_{3j}) + \theta c_j = \\ &= c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + c_3 x_3^0 - \theta c_1 y_{1j} - \theta c_2 y_{2j} - \theta c_3 y_{3j} + \theta c_j = \\ &= Z_0 - \theta(c_1 y_{1j} + c_2 y_{2j} + c_3 y_{3j} - c_j) = Z_0 - \theta(z_j - c_j). \end{aligned} \tag{2.9}$$

pues ya hemos definido que $z_j = c_B^t \cdot y_j$ siendo $y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \dots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$.

De la expresión (2.9) se obtienen dos conclusiones:

- Para el caso maximizante: Dada la solución básica factible $X_B = B^{-1} \cdot b$ con un valor para la función objetivo $Z_0 = c_B^t \cdot X_B$, la actual solución es óptima si

$z_j - c_j \geq 0$ para toda columna a_j de A. Veamos:

$$\hat{Z} = Z_0 - \theta(z_j - c_j) \quad \text{y como} \quad \theta \geq 0 \quad \text{y} \quad z_j - c_j \geq 0 \implies$$
$$\implies \hat{Z} \leq Z_0.$$

Y por tanto Z_0 es el valor máximo.

Por tanto concluimos como regla para la variable de entrada:

Dada la solución factible básica $X_B = B^{-1} \cdot b$, la variable de entrada será aquella que proporcione un valor más negativo de $z_j - c_j$.

- Para el caso minimizante: Dada la solución básica factible $X_B = B^{-1} \cdot b$ con un valor para la función objetivo $Z_0 = c_B^t \cdot X_B$, la actual solución es óptima si $z_j - c_j \leq 0$ para toda columna a_j de A.

  Y por tanto concluimos como regla para la variable de entrada:

  Dada la solución factible básica $X_B = B^{-1} \cdot b$, la variable de entrada será aquella que proporcione un valor más positivo de $z_j - c_j$.

Soluciones óptimas alternativas.

Teorema 7 *Dada la solución básica factible $X_B = B^{-1} \cdot b$ óptima, si existe algún a_j fuera de la base para el que se cumpla que $z_j - c_j = 0$, el problema tiene soluciones alternativas.*

Caso particular: Si $z_j - c_j = 0$; a_j no está en la base B, pero no hay ningún $y_{ij} > 0$, no podemos sacar ninguna a_i de la base. Cuando ésto ocurre decimos que hay un rayo óptimo (una serie de variables que pueden tomar valores infinitos pero que dan unos valores finitos en la tabla).

Soluciones no acotadas.

En el caso maximizante tenemos que hay algún $z_j - c_j < 0$ y a_j es un vector que no está en la base y todos los $y_{ij} \leq 0$.

Teorema 8 *Dada $X_B = B^{-1} \cdot b$ solución básica factible, si para alguna columna a_j no básica es $z_j - c_j < 0$ con $y_{ij} \leq 0$ para todo i, el problema es no acotado.*

Demostración:

Supongamos que la base consta de 3 vectores, y que éstos son los tres primeros. Así:

$$B = (a_1, a_2, a_3) \quad a_j \quad \text{no bàsico} \quad z_j - c_j < 0 \quad y$$
$$y_{1j} \leq 0 \quad y_{2j} \leq 0 \quad y_{3j} \leq 0.$$

Pero como el vector a_j se puede expresar como combinación lineal de B entonces:

$$a_j = y_{1j} a_1 + y_{2j} a_2 + y_{3j} a_3 \tag{2.10}$$

Sea la solución básica factible: $x_1 = x_1^0 \quad ; \quad x_2 = x_2^0 \quad ; \quad x_3 = x_3^0$.

Expresándolo vectorialmeante tenemos:

$$x_1^0 a_1 + x_2^0 a_2 + x_3^0 a_3 = b \tag{2.11}$$

Si multiplicamos la expresión (2.10) por $\alpha > 0$ entonces:

$$\alpha y_{1j} a_1 + \alpha y_{2j} a_2 + \alpha y_{3j} a_3 = \alpha a_j \tag{2.12}$$

Si restamos (2.11) - (2.12) obtenemos:

$$(x_1^0 - \alpha y_{1j}) a_1 + (x_2^0 - \alpha y_{2j}) a_2 + (x_3^0 - \alpha y_{3j}) a_3 + \alpha a_j = b.$$

Así obtenemos una solución del sistema de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 - \alpha y_{1j} \\ x_2 &= x_2^0 - \alpha y_{2j} \\ x_3 &= x_3^0 - \alpha y_{3j} \\ x_j &= \alpha \end{aligned}$$

que es una solución factible no básica. Si buscamos la solución óptima:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= c_1(x_1^0 - \alpha y_{1j}) + c_2(x_2^0 - \alpha y_{2j}) + c_3(x_3^0 - \alpha y_{3j}) + c_j \alpha = \\ &= c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 + c_3 x_3^0 - \alpha c_1 y_{1j} - \alpha c_2 y_{2j} - \alpha c_3 y_{3j} + \alpha c_j = \\ &= Z_0 - \alpha(c_1 y_{1j} + c_2 y_{2j} + c_3 y_{3j} - c_j) = \\ &= Z_0 - \alpha(z_j - c_j) \qquad \text{como } \alpha < 0 \quad y \qquad z_j - c_j < 0 \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow & \quad \hat{Z} > Z_0. \end{aligned}$$

Como α es arbitrario, puedo hacerlo tan grande como quiera, es decir no acotarlo, la solución óptima aumentará al aumentar α.

2.10.2 Método del Simplex en forma de tabla (Usando $z_j - c_j$ en la última fila)

Opt.		c_1	c_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	c_n	coef. objetivo
		x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	x_n	variables
x_1	c_1	y_{11}	y_{12}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{1n}	x_1^0
x_2	c_2	y_{21}	y_{22}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{2n}	x_2^0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m	y_{m1}	y_{m2}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_{mn}	x_m^0
z_j-	c_j	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$z_n - c_n$	Z_0

Si $B = I_m \quad \Longrightarrow \quad y_j = B^{-1} \cdot a_j = a_j$.

Una vez que tengamos la tabla (caso maximizante), los pasos a seguir son:

Paso 0:

Construir la tabla inicial.

Paso 1:

Si todos los $z_j - c_j \geq 0$, la solución es óptima $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$

Si $z_j - c_j < 0$ para alguna variable, ir al paso 2.

Paso 2:

Seleccionar para entrar en la base la columna con $z_j - c_j$ más negativo. Sea ésta la a_k.

Paso 3:

Seleccionar para salir de la base el que haga mínimo el cociente $\dfrac{x_i^0}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. Sea la fila r.

(Si todos los $y_{ik} \leq 0$, el problema es no acotado) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$. Si no es así, ir al paso 4.

Paso 4:

Realizar transformaciones en la tabla para conseguir una nueva matriz unitaria tomando y_{rk} como **pivote.**

Paso 5:

Volver al paso 1.

Ejemplo 33 *Resolver el programa lineal, usando el método del Simplex en forma de tabla.*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Tomamos como base:

$$B = (a_3, a_4) = I_2$$

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla	*I*	3	2	−2	1	Sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	factible
x_3	−2	2	$\boxed{3}$	1	0	12
x_4	1	2	1	0	1	8
z_j-	c_j	−5	$\boxed{-7}$	0	0	$Z_0 = -16$

Entra en la base a_2 por ser el más negativo.

Y sale a_3 pues $min\left\{\frac{12}{3}; \frac{8}{1}\right\} = \frac{12}{3} = 4.$

Si hacemos las transformaciones siguientes:

Divido la fila 1 por 3 (multiplico por 1/3).

Resto a la fila 2 la fila 1.

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	*II*	3	2	−2	1	Sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	factible
x_2	2	2/3	1	1/3	0	4
x_4	1	$\boxed{4/3}$	0	−1/3	1	4
z_j-	c_j	$\boxed{-1/3}$	0	7/3	0	$Z = 12$

Entra en la base a_1 por ser $z_1 - c_1 < 0$ el único negativo. Como variable de salida hacemos:

$$min\left\{\frac{4}{2/3}; \frac{4}{4/3}\right\} = min\{6, 3\} = 3.$$

Y por tanto sale de la base a_4.

Hacemos las transformaciones siguientes:

Multiplico por 3/4 la fila 3.

Resto a la fila 1 la fila 2 por 2/3.

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	*III*	3	2	−2	1	Sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	factible
x_2	2	0	1	1/2	−1/2	2
x_1	1	1	0	−1/4	3/4	3
z_j-	c_j	0	0	9/4	1/4	$Z = 13$

La solución asociada a esta base es óptima pues todos los $z_j - c_j \geq 0$, la solución es:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad ; \qquad \tilde{Z} = 13.$$

La base óptima es

$$B = (a_2, a_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Si observamos la Tabla III del Simplex tenemos que la matriz B^{-1} son las columnas que formaban la base inicial.

Si escribimos el método del Simplex para el caso minimizante tenemos:

Paso 0:

Construir la tabla inicial.

Paso 1:

Si todos los $z_j - c_j \leq 0$, la solución es óptima $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$.

Si $z_j - c_j > 0$ para alguna variable, ir al paso 2.

Paso 2:

Seleccionar para entrar en la base la columna con $z_j - c_j$ más positivo. sea ésta la a_k.

Paso 3:

Seleccionar para salir de la base el que haga mínimo el cociente $\dfrac{x_i^0}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. Sea la fila r.

Si todos los $y_{ik} \leq 0$, el problema es no acotado. $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$. Si no es así, ir al paso 4.

Paso 4:

Realizar transformaciones en la tabla para conseguir una nueva matriz unitaria tomando y_{rk} como **pivote.**

Paso 5:

Volver al paso 1.

Ejemplo 34 *Resolver el programa lineal, usando el método del Simplex en forma de tabla.*

$$\begin{array}{ll} Min & Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 & = & 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 & = & 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & . & \end{array}\right\} \end{array}$$

Tomamos como base:

$$B = (a_1, a_4, a_6) = I_3$$

Construimos la tabla del Simplex:

Tabla	*I*	0	1	−3	0	2	0	Sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_1	0	1	3	−1	0	2	0	7
x_4	0	0	−2	$\boxed{4}$	1	0	0	12
x_6	0	0	−4	3	0	8	1	10
$z_j - c_j$		0	−1	$\boxed{3}$	0	−2	0	$Z_0 = 0$

Entra en la base a_3 por ser el más positivo de los $z_j - c_j$.

Y sale a_4 pues $min\left\{\frac{12}{4}; \frac{10}{3}\right\} = \frac{12}{4} = 3$.

Si hacemos las transformaciones siguientes:

Multiplico la fila 2 por 1/4.

Sumo a la fila 1 la fila 2.

Resto a la fila 3 la fila 2 multiplicada por 3.

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	*II*	0	1	−3	0	2	0	Sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_1	0	1	$\boxed{5/2}$	0	1/4	2	0	10
x_3	−3	0	−1/2	1	1/4	0	0	3
x_6	0	0	−5/2	0	−3/4	8	1	1
$z_j - c_j$		0	$\boxed{1/2}$	0	−3/4	−2	0	$\hat{Z} = -9$

Entra en la base a_2 por ser el más positivo de los $z_j - c_j$. Y sale a_1 pues es el único y_{i2} que es positivo.

Si hacemos las transformaciones que aparecen a continuación:

Multiplico la fila 1 por 2/5.

Sumo a la fila 2 la fila 1 multiplicada por 1/5.

Sumo a la fila 3 la fila 1.

Obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	*III*	0	1	−3	0	2	0	Sol. básica
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	factible
x_2	1	2/5	1	0	1/10	4/5	0	4
x_3	−3	1/5	0	1	3/10	2/5	0	5
x_6	0	1	0	0	−1/2	10	1	11
$z_j - c_j$		−1/5	0	0	−4/5	−12/5	0	$\tilde{Z} = -11$

La solución asociada a esta base es óptima pues todos los $z_j - c_j \leq 0$, la solución es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_6 = 11 \quad ; \qquad \tilde{Z} = -11.$$

La base óptima es

$$B = (a_2, a_3, a_6) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & 3/10 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.11 Otros algoritmos de programación lineal

Vamos a estudiar otros algoritmos de programación lineal:

2.11.1 Método de las dos fases

Este algoritmo suele utilizarse cuando hay igualdades o desigualdades del tipo $\geq$, y por tanto sería necesario añadir variables artificiales. Consta de dos fases: La primera de ellas consiste en minimizar la suma de las variables artificiales. En este problema todas las variables artificiales han de ser nulas, en caso contrario el problema no tiene solución (es infactible).

$\boxed{\text{Fase 1:}}$

Paso 0: Escribir el programa en forma estándar, añadiendo variables artificiales.

Paso 1: Modificar la función objetivo {minimizante/maximizante} Z' que se obtiene incorporando al objetivo las variables artificiales con coeficientes {1,-1} y asignando coeficiente cero al resto.

Paso 2: Aplicar el algoritmo del Simplex, con la función objetivo descrita en el paso 1. Si en la solución óptima aparecen variables artificiales con valor positivo, el problema original es no factible $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$.

Si no ocurre, ir a la fase 2.

$\boxed{\text{Fase 2:}}$

Paso 3: Considerar la función objetivo original, con coeficiente $c_j = 0$ para las variables artificiales que aparezcan en la base óptima del paso 2. Se prescindirá de las variables artificiales no básicas y se actualizarán los $z_j - c_j$.

Paso 4: Si en la función objetivo del paso 3 no hay variables artificiales aplicar el algoritmo del Simplex al nuevo programa hasta obtener la solución óptima.

Paso 5: Si en la función objetivo del paso 3 hubiera variables artificiales, aplicar el algoritmo del Simplex con esta modificación en la variable de salida:

Si x_k es la variable de entrada e $y_{ik} < 0$ para alguna variable artificial x_i, elegir x_i como variable de salida, e y_{ik} como pivote.

Ejemplo 35 *Resolver el programa lineal usando el método de las dos fases.*

$$\begin{array}{ll} Min & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 & \geq & 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Si introducimos las variables de holgura positivas, y una variable artificial x_6 tendremos el programa **no** equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \text{Z} = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.:} & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 4 \\ x_2 + x_4 & = & 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 & = & 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Este ejemplo ya lo hemos resuelto anteriormente usando el método de las penalizaciones, vamos a resolverlo ahora usando el método de las dos fases:

$\boxed{\text{Fase 1:}}$

Construimos la tabla del Simplex como indica el paso 1:

Tabla	*I*	0	0	0	0	0	1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	1	3	2	0	0	-1	1	18
$z_j - c_j$		$\boxed{3}$	2	0	0	-1	0	$Z_0 = 18$

Así, entra en la base a_1 por ser $z_1 - c_1$ el mayor y sale de la base a_3, pues hace mínimo el cociente $4/1$ y $18/3$. Si construimos la nueva tabla del Simplex obtenemos:

Tabla	*II*	0	0	0	0	0	1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	1	0	$\boxed{2}$	-3	0	-1	1	6
$z_j - c_j$		0	$\boxed{2}$	-3	0	-1	0	$Z = 6$

Entra en la base a_2 por ser $z_2 - c_2$ el mayor, y sale de la base a_6 pues es el que hace mínimo el cociente $6/1$ y $6/2$. Si construimos la nueva tabla del Simplex:

Tabla	*III*	0	0	0	0	0	1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	0	$3/2$	1	$1/2$	$-1/2$	3
x_2	5	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	3
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	-1	$Z = 0$

Fase 2

Como en la base óptima no aparece ninguna variable artificial, según el paso 3, prescindimos de esta variable. Así la nueva tabla queda:

Tabla	*IV*	3	5	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	3	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	0	$3/2$	1	$1/2$	3
x_2	5	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	3
$z_j - c_j$		0	0	$-9/2$	0	$-5/2$	$\hat{Z} = 27$

La solución óptima es $x_1 = 4 \quad x_2 = 3$, con $z = 27$.

La variable de holgura $x_4 = 3$.

2.11.2 Algoritmo revisado del Simplex (Caso maximizante)

Este algoritmo tiene ventajas desde el punto de vista de la implementación, ya que ocupa menos posiciones de memoria. Además no acumula errores, porque las operaciones se realizan siempre con los datos originales.

Paso 0: Escribir el problema en forma estándar y obtener una matriz básica inicial.

Paso 1: Evaluar B^{-1} y el vector multiplicador $\vec{s} = c_B \cdot B^{-1}$. Calcular los $z_j - c_j = \vec{s} \cdot a_j - c_j$. Si todos son mayores o iguales a cero, la solución es óptima $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Fin}}$.

Paso 2: Seleccionar el vector que entra en la base, que será el que proporcione un valor más negativo de $z_j - c_j$. Sea éste a_k.

Paso 3: Evaluar $y_k = B^{-1} \cdot a_k$ y $X_B = B^{-1} \cdot b$ y seleccionar el vector que sale de la base, será el que haga mínimo el cociente $\dfrac{x_i}{y_{ik}}$ para los $y_{ik} > 0$. Sea a_r.

Paso 4: Sustituir en B el vector a_r por a_k. Volver al paso 1.

Vamos a resolver el siguiente ejemplo usando el algoritmo revisado del Simplex. Este programa lineal ya se ha resuelto anteriormente en el ejemplo 33.

Ejemplo 36 *Dado el programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Tomamos como base:

$$B = (a_3, a_4) = I_2 \qquad \Longrightarrow \qquad B^{-1} = I_2$$

El vector multiplicador del Simplex es:

$$\vec{s} = c_B \cdot B^{-1} = c_B \cdot I_2 = c_B = (-2, 1).$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ tendremos:

$$z_1 - c_1 = (-2, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = -2 - 3 = -5$$

$$z_2 - c_2 = (-2, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = -5 - 2 = \boxed{-7}$$

Si calculamos $y_k = B^{-1} \cdot a_k$ y $x_B = B^{-1} \cdot b$ tenemos:

$$y_2 = B^{-1} \cdot a_2 = I_2 \cdot a_2 = a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x_B = B^{-1} \cdot b = b = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Entra en la base a_2 por ser el más negativo.

Y sale a_3 pues $min \left\{ \frac{12}{3}; \frac{8}{1} \right\} = \frac{12}{3} = 4.$

Iteración 1 La nueva base es:

$$B = (a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector multiplicador del Simplex es:

$$\vec{s} = c_B \cdot B^{-1} = (2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} = (1/3, 1).$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ tendremos:

$$z_1 - c_1 = (1/3, 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 = 8/3 - 3 = \boxed{-1/3}$$

$$z_3 - c_3 = (1/3, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-2) = 1/3 + 2 = 7/3.$$

Si calculamos $y_k = B^{-1} \cdot a_k$ y $x_B = B^{-1} \cdot b$ tenemos:

$$y_1 = B^{-1} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix};$$

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entra en la base a_1 por ser $z_1 - c_1 < 0$ el único negativo. Como variable de salida hacemos:

$$min \left\{ \frac{4}{2/3}; \frac{4}{4/3} \right\} = min\{6, 3\} = 3.$$

Y por tanto sale de la base a_4.

Iteración 2 La nueva base es:

$$B = (a_2, a_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

El vector multiplicador del Simplex es:

$$\vec{s} = c_B \cdot B^{-1} = (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = (1/4, 5/4).$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ tendremos:

$$z_3 - c_3 = (1/4, 5/4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-2) = 1/4 + 2 = 9/4$$

$$z_4 - c_4 = (1/4, 5/4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 5/4 - 1 = 1/4.$$

La solución ya es óptima.

Si calculamos $x_B = B^{-1} \cdot b$ tenemos:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solución asociada a esta base es óptima pues todos los $z_j - c_j \geq 0$, la solución es:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad ; \qquad \tilde{Z} = 13$$

La base óptima es

$$B = (a_2, a_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 37 *Aplicar el procedimiento anterior al programa lineal:*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Este programa lineal ya lo hemos resuelto anteriormente usando el método del Simplex en forma matricial, (ver ejemplo 32 en la página 68).

Si lo resolvemos ahora usando el algoritmo revisado del Simplex, tenemos que si tomamos como base:

$$B = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

La solución asociada a esta base es factible pues:

$$\begin{aligned} X_B &= B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow & \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0. \end{aligned}$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ usando que $z_j = c_B^t \cdot y_j$ obtenemos:

$$z_1 - c_1 = (2, -3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$z_2 - c_2 = (2, -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-3) = -3 + 3 = 0$$

$$z_3 - c_3 = (2, -3) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 10 = 9 - 10 = -1.$$

Como estamos en un problema de maximizar, entra en la base a_3 (según la regla de la variable de entrada).

$$y_3 = B^{-1} \cdot a_3 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{13} \\ y_{23} \end{pmatrix}$$

Veamos qué variable tendrá que salir (usando la regla de variable de salida)

$$\frac{x_3^0}{y_{k3}} = min \left\{ \frac{x_i^0}{y_{i3}} ; \quad y_{i3} > 0 \right\}$$

Como $y_{13} = 3$ y $y_{23} = -1$, sólo puede salir de la base a_1 pues y_{23} es negativo.

Al salir de la base a_1 tenemos:

$$B = (a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

La solución asociada a esta base es factible pues:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 5/3 \quad x_3 = 2/3.$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ usando que $z_j = c_B^t \cdot y_j$ obtenemos:

$$z_1 - c_1 = (-3, 10) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - 2 = 7/3 - 2 = 1/3$$

$$z_2 - c_2 = (-3, 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-3) = -3 + 3 = 0$$

$$z_3 - c_3 = (-3, 10) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 = 10 - 10 = 0.$$

Como estamos en un problema de maximizar, y todos los $z_j - c_j \geq 0$, por la regla de parada, la solución ya es óptima.

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 5/3 \quad x_3 = 2/3 \quad ; \qquad Z = 0 + (-3)\frac{5}{3} + 10\frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 38 *Resolver el programa lineal usando el algoritmo revisado del Simplex:*

$$\begin{array}{ll} Max & Z = x_1 - x_2 + 10x_3 - 6x_4 \\ s.a.: & \left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 + 5x_4 & = & 10 \\ x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & \end{array}\right\} \end{array}$$

Tomamos como base:

$$B = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, directamente obtengo una solución básica factible asociada a esta base pues:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 10 \quad x_2 = 15 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 0.$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ usando que $z_j = c_B^t \cdot y_j$ obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} z_1 - c_1 & = & 0 \\ z_2 - c_2 & = & 0 \\ z_3 - c_3 & = & (1, -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 10 = -3 - 10 = -13 \\ z_4 - c_4 & = & (1, -1) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - (-6) = 2 + 6 = 8. \end{array}$$

Como estamos en un problema de maximizar, entra en la base a_3 (según la regla de la variable de entrada). Veamos qué variable tendrá que salir (usando la regla de variable de salida).

$$\frac{x_3^0}{y_{k3}} = min\left\{\frac{x_i^0}{y_{i3}}\ ; \quad y_{i3} > 0 \qquad \text{en nuestro caso } j = 3.\right\}$$

Como $y_{13} = 2$ y $y_{23} = 5$:

$$\frac{x_3^0}{y_{k3}} == min\left\{\frac{10}{2};\frac{15}{5}\right\} = min\{5,3\} = 3.$$

Luego el mínimo corresponde a $\dfrac{x_2^0}{y_{23}}$, y por tanto sale de la base a_2. Al cambiar de base tenemos:

$$B = (a_1, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

La solución asociada a esta base es factible pues:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 4 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 0.$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ usando que $z_j = c_B^t \cdot y_j$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
z_1 - c_1 &= 0 \\
z_2 - c_2 &= (1,10)\begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} - (-1) = 8/5 + 1 = 13/5 \\
z_3 - c_3 &= 0 \\
z_4 - c_4 &= (1,10)\begin{pmatrix} 19/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} - (-6) = 49/5 + 6 = 79/5.
\end{aligned}$$

Como estamos en un problema de maximizar, y todos los $z_j - c_j \geq 0$, por la regla de parada, la solución ya es óptima.

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = 0 \quad ; \qquad Z = 4 - 0 + 10(3) - 0 = 34.$$

Tema 3

Dualidad en programación lineal

3.1 Formas de la dualidad

3.1.1 Forma canónica maximizante de la dualidad

Dado el programa lineal:

$$
\begin{array}{l}
\text{Max Z } = C^t \cdot X \\
\text{sujeto a} \quad AX \leq b \\
X \geq 0
\end{array}
$$

donde,

A es una matriz de dimensión $m \times n$

C es un vector columna de dimensión $n \times 1$

b es un vector columna de dimensión $m \times 1$

X es un vector columna de dimensión $n \times 1$

llamado **Programa Primal**, se llama **Programa Dual** del mismo al programa lineal:

$$
\begin{array}{l}
\text{Min W } = b^t \cdot Y \\
\text{sujeto a} \quad A^t \cdot Y \geq C \\
Y \geq 0
\end{array}
$$

donde A^t y A , C y C^t, b y b^t son matrices traspuestas entre sí. El vector columna Y, que contiene las variables del problema, ha de ser de dimensión $m \times 1$.

Ejemplo 39 *Obtener el programa dual de:*

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ &s.a.:\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 18 \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 24 \\ &\quad x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad c^t = (2,-1,2,1) \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$W = b^t \cdot Y = (18, 24) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

así que el programa dual es

$$\begin{aligned} &\text{Min W} = 18y_1 + 24y_2 \\ &\text{s.a.: } 2y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ &\quad y_1 + 4y_2 \geq -1 \\ &\quad y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ &\quad 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ &\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la práctica hacemos:

	Max				
Min	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
y_1	2	1	1	2	18
y_2	3	4	2	1	24
$\geq$	2	-1	2	1	

y_1 variable dual asociada a la primera restricción.

y_2 variable dual asociada a la segunda restricción.

Si el problema no estuviera expresado en forma canónica maximizante una forma de hallar su dual es transformarlo previamente a su forma canónica maximizante, como haremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 40 *Obtener el programa dual de:*

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\ s.a.\!: & \ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & \ x_1 - x_2 = -1 \\ & \ x_3 - x_4 \geq 46 \\ & \ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

Transformamos las restricciones segunda y tercera en desigualdades de signo $\leq$

$$x_1 - x_2 = -1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \end{array} \right.$$

$$x_3 - x_4 \geq 46 \Leftrightarrow -x_3 + x_4 \leq -46.$$

Por lo tanto el problema se expresa en forma canónica maximizante de la siguiente forma:

	Max				
Min	x_1	x_2	x_3	x_4	$\leq$
y_1	1	1	2	3	5
y_2	1	-1	0	0	-1
y_3	-1	1	0	0	1
y_4	0	0	-1	1	-46
$\geq$	3	8	2	-4	

$$\begin{aligned} \text{Min W} &= 5y_1 - y_2 + y_3 - 46y_4 \\ \text{s.a.:} & \ y_1 + y_2 - y_3 \geq 3 \\ & \ y_1 - y_2 + y_3 \geq 8 \\ & \ 2y_1 - y_4 \geq 2 \\ & \ 3y_1 + y_4 \geq -4 \\ & \ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Si se hacen los siguientes cambios:

$$\left. \begin{array}{rcl} y_2' & = & y_2 - y_3 \\ y_3' & = & -y_3 \end{array} \right\}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Min W} &= 5y_1 - y_2' + 46y_3' \\ \text{s.a.: } & y_1 + y_2' \geq 3 \\ & y_1 - y_2' \geq 8 \\ & 2y_1 + y_3' \geq 2 \\ & 3y_1 - y_3' \geq -4 \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2' \text{ no restringida}, \quad y_3' \leq 0 \end{aligned}$$

y_1 variable dual asociada a la primera restricción.

y_2' variable dual asociada a la segunda restricción.

y_3' variable dual asociada a la tercera restricción.

3.1.2 Forma estándar maximizante de la dualidad

La dualidad se puede expresar en diferentes formas.

Por ejemplo, si el programa lineal está en forma estándar

Max Z $= C^t \cdot X$ sujeto a $Ax = b$, $X \geq 0$

su dual puede expresarse en la forma siguiente:

$$\text{Min W } = b^t \cdot Y, \text{ sujeto a } A^t \cdot Y \geq C, \quad Y \text{ no restringida.}$$

En efecto, pasando la forma estándar a forma canónica maximizante obtenemos:

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases}$$

Llamando

$$A^* = \binom{A}{-A} \qquad \text{y} \qquad b^* = \binom{b}{-b}$$

El problema se transforma en

$$\text{Max Z } = C^t \cdot X \text{ sujeto a } A^* x \leq b^*, \quad X \geq 0$$

Según la definición de dualidad su dual es

$$\text{Min W } = (b^*)^t \cdot Y^*, \text{ sujeto a } (A^*)^t \cdot Y \geq C, \ \ Y \geq 0$$

Realizando operaciones

Min W $= \binom{b}{-b}^t \cdot \binom{Y_1}{Y_2}$, s. a. $\binom{A}{-A}^t \cdot \binom{Y_1}{Y_2} \geq C$, $Y \geq 0$ $\Leftrightarrow$

Min W $= \begin{pmatrix} b^t, & -b^t \end{pmatrix} \cdot \binom{Y_1}{Y_2}$, s. a. $\begin{pmatrix} A^t, & -A^t \end{pmatrix} \cdot \binom{Y_1}{Y_2} \geq C$, $Y \geq 0$ $\Leftrightarrow$

Min W $= b^tY_1 - b^tY_2$, s.a.: $A^tY_1 - A^tY_2, \geq C$, $Y_1, Y_2 \geq 0$.

Definiendo $Y = Y_1 - Y_2$ con $Y_1, Y_2 \geq 0$ hacen que Y no esté restringida en signo, resultando que el programa dual puede expresarse en la forma:

Min W $= b^t \cdot Y$, sujeto a $A^t \cdot Y \geq C$, Y no restringida.

Ejemplo 41 *Hallar el dual del siguiente programa lineal:*

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ &s.a.: x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ &\qquad x_1 - x_2 \geq 2 \\ &\qquad x_1 + x_2 = 1 \\ &\qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \ libre \end{aligned}$$

Para ponerlo en forma canónica maximizante realizamos primero los cambios necesarios para que todas las variables sean no negativas:

$$x_2 = -x_2', \qquad x_3 = x_3' - x_4'$$

$$\begin{aligned} &\text{Max Z} = 2x_1 - 3x_2' + 4x_3' - 4x_4' \\ &\text{s.a.: } x_1 - x_2' + x_3' - x_4' \leq 3 \\ &\qquad x_1 + x_2' \geq 2 \\ &\qquad x_1 - x_2' = 1 \\ &\qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3' \geq 0, \quad x_4' \geq 0 \end{aligned}$$

Realizamos ahora las transformaciones para que todas las restricciones sean de signo $\leq$

$$\begin{aligned} &\text{Max Z} = 2x_1 - 3x_2' + 4x_3' - 4x_4' \\ &\text{s.a.: } x_1 - x_2' + x_3' - x_4' \leq 3 \\ &\qquad -x_1 - x_2' \qquad \leq -2 \\ &\qquad x_1 - x_2' \qquad \leq 1 \\ &\qquad -x_1 + x_2' \qquad \leq -1 \\ &\qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3' \geq 0, \quad x_4' \geq 0 \end{aligned}$$

Su dual es

$$\begin{aligned}
\text{Min W} &= 3y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4\\
\text{s.a.: } & y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq 2\\
& -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq -3\\
& y_1 \geq 4\\
& -y_1 \geq -4\\
& y_1, y_2, y_3 . y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Realizando los cambios

$$y_3 - y_4 = y_3', \qquad y_2' = -y_2$$

Obtenemos que el problema dual es:

$$\begin{aligned}
\text{Min W} &= 3y_1 + 2y_2' + y_3'\\
\text{s.a.: } & y_1 + y_2' + y_3' \geq 2\\
& y_1 - y_2 + y_3' \leq 3\\
& y_1 = 4\\
& y_1 \geq 0, \;\; y_2' \leq 0, \;\; y_3' \;\; \textit{libre}
\end{aligned}$$

Ejemplo 42 *Obtener el programa dual de:*

$$\begin{aligned}
\textit{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 - x_3\\
\textit{s.a.: } & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 3\\
& 3x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 7\\
& x_1 \geq 0, \;\; x_2 \textit{ no restringida}, \;\; x_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Hago los siguientes cambios:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1' - x_2''\\
x_3 &= -x_3'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Max Z} &= 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3'\\
\text{s.a.: } & 3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - 2x_3' \leq 3\\
& 3x_1 - 2x_2' + 2x_2'' + x_3' \leq 7\\
& x_1, x_2', x_2'', x_3' \geq 0
\end{aligned}$$

	Max				
Min	x_1	x_2'	x_2''	x_3'	$\leq$
y_1	3	4	-4	-2	3
y_2	3	-2	2	1	7
$\geq$	2	3	-3	1	

$$\begin{aligned} \text{Min W} &= 3y_1 + 7y_2 \\ \text{s.a.: } & 3y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & 4y_1 - 2y_2 \geq 3 \\ & -4y_1 + 2y_2 \geq -3 \\ & -2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Buscamos el programa dual:

$$-2y_1 + y_2 \geq 1 \Leftrightarrow 2y_1 - y_2 \leq -1$$

$$\left.\begin{array}{rcrcc} 4y_1 & - & 2y_2 & \geq & 3 \\ 4y_1 & - & 2y_2 & \leq & 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 4y_1 - 2y_2 = 3$$

El programa dual quedaría:

$$\begin{aligned} \text{Min W} &= 3y_1 + 7y_2 \\ \text{s.a.: } & 3y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ & 4y_1 - 2y_2 = 3 \\ & 2y_1 - y_2 \leq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.1.3 Reglas para escribir el problema dual

Con el objeto de no tener que realizar todas estas transformaciones en cada problema conviene tener una serie de reglas para escribir el problema dual conociendo el primal. Las reglas de conversión son las siguientes:

1. Función objetivo:

   (a) El dual de un problema de maximización es un problema de minimización.

   (b) El dual de un problema de minimización es un problema de maximización.

2. Número de incógnitas y de restricciones:

(a) El número de incógnitas del dual es el número de restricciones del primal.

(b) El número de restricciones del dual es el número de incógnitas del primal.

3. Coeficientes de coste y términos independientes de las restricciones.

   (a) Los coeficientes de coste del dual son los términos independientes de las restricciones del primal.

   (b) Los términos independientes de las restricciones del dual son los coeficientes de coste del primal.

4. Las matrices tecnológicas del primal y dual son traspuestas entre sí.

5. Signo de las restricciones y de las variables.

   A cada restricción de un problema viene asociado una variable del otro.

   Las reglas para escribir los signos de las restricciones y de las variables correspondientes vienen resumidas en la tabla siguiente:

<table>
<tr><th colspan="2">Primal de Maximización</th><th colspan="2">Dual de Minimización</th></tr>
<tr><td rowspan="3">restricción</td><td>$\leq$</td><td>≥ 0</td><td rowspan="3">variables</td></tr>
<tr><td>$\geq$</td><td>≤ 0</td></tr>
<tr><td>$=$</td><td>libre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">variable</td><td>≥ 0</td><td>$\geq$</td><td rowspan="3">restricción</td></tr>
<tr><td>≤ 0</td><td>$\leq$</td></tr>
<tr><td>libre</td><td>$=$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dual de Maximización</td><td colspan="2">Primal de Minimización</td></tr>
</table>

3.1.4 Forma canónica minimizante de la dualidad

La siguiente expresión enuncia la dualidad en forma canónica minimizante.

Dado el programa lineal Min Z $= c^t \cdot X$, sujeto a $A^t \cdot X \geq b$, $X \geq 0$ su dual es Max W $= b^t \cdot Y$, sujeto a $A^t \cdot Y \leq c$, $Y \geq 0$.

Se puede comprobar que en este enunciado se cumplen las reglas para determinar el programa dual dadas en la tabla anterior.

Ejemplo 43 *Obtener el dual del problema:*

$$\begin{aligned} \textit{Min } Z &= 3x_1 + 9x_2 \\ \textit{s.a.: } & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual que se obtiene con ayuda de la siguiente tabla y de las reglas de signo de variables y restricciones es:

	Max		
Min	x_1	x_2	$\geq$
y_1	1	-1	1
y_2	2	1	3
y_3	3	-1	5
$\leq$	3	9	

$$\begin{aligned} \text{Max W} &= y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ \text{s.a.: } & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ & -y_1 + y_2 - y_3 \leq 9 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 44 *Hallar el dual del problema siguiente realizando previamente las transformaciones necesarias para expresarlo en la forma canónica minimizante. Comprobar a posteriori que se cumplen las reglas de los signos.*

$$\begin{aligned} Min\ Z &= 2x_1 - x_2 \\ s.a.: & 4x_1 + 7x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 - 4x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ no restringida} \end{aligned}$$

Llamamos $x_2 = x_2' - x_2''$:

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= 2x_1 - x_2' + x_2'' \\ \text{s.a.: } & 4x_1 + 7x_2' - 7x_2'' \leq 10 \\ & 3x_1 - 4x_2' + 4x_2'' \geq 8 \\ & x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{aligned}$$

$$4x_1 + 7x_2' - 7x_2'' \leq 10 \Leftrightarrow -4x_1 - 7x_2' + 7x_2'' \geq -10$$

Escribimos ahora el dual

	Max			
Min	x_1	x_2'	x_2''	$\geq$
y_1	-4	-7	7	-10
y_2	3	-4	4	8
$\leq$	2	-1	1	

$$\begin{aligned} \text{Max W} &= -10y_1 + 8y_2 \\ \text{s.a.: } & -4y_1 + 3y_2 \leq 2 \\ & -7y_1 - 4y_2 \leq -1 \\ & 7y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si llamamos $y_1' = -y_1$ tenemos:

$$\begin{array}{l} \text{Max W} = 10y_1' + 8y_2 \\ \text{s.a.: } 4y_1' + 3y_2 \le 2 \\ \qquad 7y_1' - 4y_2 \le -1 \\ \qquad -7y_1' + 4y_2 \le 1 \\ \qquad y_1 \le 0, y_2 \le 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 7y_1' - 4y_2 & \ge & -1 \\ 7y_1' - 4y_2 & \le & -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 7y_1' - 4y_2 = -1$$

El dual será:

$$\begin{array}{l} \text{Max W} = 10y_1' + 8y_2 \\ \text{s.a.: } 4y_1' + 3y_2 \le 2 \\ \qquad 7y_1' - 4y_2 = -1 \\ \qquad y_1' \le 0, \quad y_2 \ge 0 \end{array}$$

En la siguiente tabla están indicados los cambios efectuados:

restricción del dual	$1^a \le$ $2^a =$	$x_1 \ge 0$ x_2 libre	variables del primal
variable del dual	$y_2 \ge 0$ $y_1' \le 0$	$\ge 2^a$ $\le 1^a$	restricción del primal
Dual de Maximización		Primal de Minimización	

3.2 Propiedades de la relación de dualidad

1.- El dual del dual es el primal.

Demostración.

$$\begin{array}{l} \text{Max Z } = C^t \cdot X \\ \text{sujeto a } AX \le b \\ X \ge 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de dimensión $m \times n$ y X un vector de dimensión $n \times 1$. Su dual es:

$$\begin{array}{l} \text{Min W } = b^t \cdot Y \\ \text{sujeto a } A^t Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{array}$$

Como no hemos demostrado las reglas de los signos su uso no puede ser considerado una demostración, no obstante si las aplicáramos se obtendría este resultado de inmediato. Así tendremos que el problema dual de este último es el primitivo:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max Z } = C^t \cdot X & & \text{Max Z } = C^t \cdot X \\ \text{sujeto a } (A^t)^t X \leq b & \Leftrightarrow & \text{sujeto a } AX \leq b \\ X \geq 0 & & X \geq 0 \end{array}$$

A continuación exponemos una demostración de esta propiedad.

Para calcular el dual de

$$\begin{array}{l} \text{min W } = b^t \cdot Y \\ \text{sujeto a } A^t Y \geq C \\ y \geq 0 \end{array}$$

que es el dual del primitivo, lo expresamos en forma canónica maximizante

$$W' = -W = -b^t \cdot Y$$

$$\begin{array}{l} \text{max W'=max (-W) } = -b^t \cdot Y \\ \text{sujeto a } -A^t Y \leq -C \\ y \geq 0 \end{array}$$

Su dual es:

$$\begin{array}{l} \text{min (-Z) } = -C^t \cdot X \\ \text{sujeto a } -AX \leq -b \\ X \geq 0 \end{array}$$

es decir:

$$\begin{array}{l} \text{max Z} = C^t \cdot X \\ \text{sujeto a } AX \geq b \\ X \geq 0 \end{array}$$

que es el problema primitivo.

2.- Teorema de dualidad débil.

Si x_0 e y_0 son soluciones factibles para el programa primal y el programa dual respectivamente, entonces se cumple que $C^t \cdot x_0 \leq b^t \cdot y_0$.

Demostración.

Los problemas son:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max Z } = c^t \cdot X & & \text{Min W } = b^t \cdot Y \\ \text{sujeto a } AX \leq b & \text{y su dual} & \text{sujeto a } A^t \cdot Y \geq c \\ X \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Como x_0 es factible se verifica:

$$Ax_0 \leq b; \quad x_0 \geq 0 \tag{3.1}$$

Como y_0 es factible se cumple:

$$A^t y_0 \geq c; \quad y_0 \geq 0 \tag{3.2}$$

Si multiplico (3.1) por la izquierda por y_0^t tenemos:

$$y_0^t A x_0 \leq y_0^t b \tag{3.3}$$

Si multiplico (3.2) por x_0^t tenemos:

$$x_0^t A^t y_0 \geq x_0^t c \tag{3.4}$$

Si hallo la traspuesta de (3.4) tenemos:

$$y_0^t A x_0 \geq c^t x_0 \tag{3.5}$$

Considerando (3.5) y (3.3) $c^t x_0 \leq y_0^t A x_0$ y $y_0^t A x_0 \leq y_0^t b$.

Por tanto $c^t x_0 \leq y_0^t b = b^t y_0$ puesto que

$$y_0 b = (y_1^0, y_2^0 ... y_m^0) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2 ... b_m) \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^0) \end{pmatrix} = b^t \cdot y_0$$

Consecuencias del teorema de dualidad débil.

Esta desigualdad tiene las consecuencias inmediatas siguientes:

a) Cualquier valor que tenga la función objetivo primal es cota inferior para la función objetivo dual.

b) Cualquier valor que tenga la función objetivo dual es cota superior para la función objetivo primal.

También se deducen las siguientes propiedades

c) Si el primal es factible y no acotado, entonces el dual es no factible.

Demostración.

$Z = c^t \cdot X \longrightarrow +\infty \quad$ y $\quad C^t \cdot x_0 \leq b^t \cdot y_0$.

Si el dual fuera factible existe y_0 que cumple las restricciones y la no negatividad, entonces: $W_0 = b^t y_0 \Longrightarrow Z \leq W_0$. Pero si el primal tiene cota superior no puede ser no acotado.

d) Si el dual es factible y no acotado, entonces el primal es no factible.

Si el primal fuera factible entonces existe un x_0 que cumple las restricciones y la no negatividad, por tanto $Z_0 = c^t x_0 \Longrightarrow Z_0 \leq W$. Pero si tiene una cota inferior no puede ser no acotada.

e) Si existen soluciones factibles para los problemas primales y duales que dan el mismo valor para las respectivas funciones objetivo entonces dichas soluciones son óptimas para sus respectivos problemas.

Demostración.

Supongamos dos soluciones factibles para cada uno de los problemas primal y dual respectivamente x^* e y^*, llamamos $Z^* = c^t \cdot x^*$ e $W^* = b^t \cdot y^*$. y $Z^* = W^*$.

Primal: Sea x cualquier otra solución factible entonces $c^t \cdot x \leq b^t y^* = c^t \cdot x^* \Longrightarrow c^t x \leq c^t x^* \; \forall x$

x^* es el valor mas alto al que puede llegar el objetivo por tanto x^* es óptima.

Dual: Sea y cualquier otra solución factible entonces $c^t X^* \leq b^t y \Longrightarrow b^t y^* \leq b^t y \; \forall Y$

$b^t y^*$es el valor mínimo al que llega la función objetivo por tanto y^* es óptima.

3.- Teorema de dualidad principal.

Si el problema primal tiene solución óptima finita correspondiente a la base B, entonces el problema dual también tiene solución óptima finita y dicha solución es $Y^{*t} = C_B^t B^{-1}$ (vector multiplicador simplex de la base óptima).

Demostración.

$$\begin{array}{lcl} \text{Max Z } = C^t \cdot X & & \text{Min W } = b^t \cdot Y \\ \text{sujeto a } Ax \leq b & \text{y su dual} & \text{sujeto a } A^t \cdot Y \geq C \\ X \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo al primal variables de holgura (X_n) resulta

$$AX + IX_n = b \quad (AI) = (a_1 a_2 .. a_n e_1, e_2 .. e_m)$$

B base óptima $\Longrightarrow X_B = B^{-1}b$ y $C_B^t B^{-1}(A \mid I) - (C^t \mid 0) \geq 0$ porque los costes reducidos son no negativos si la base es óptima.

Separando los costes reducidos de las variables primitivas y de las variables de holgura tenemos:

$$C_B^t B^{-1} A - C^t \geq 0.$$

Transponiendo la primera de estas desigualdades resulta

$$A^t \left(C_B^t B^{-1}\right)^t - C \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^t Y^* \geq C$$

De la segunda obtenemos

$$C_B^t B^{-1} I = C_B^t B^{-1} = (Y^*)^t \geq 0$$

Luego Y^* es una solución factible del problema dual. Veamos que es además óptima:

$$W^* \;\; = \;\; b^t Y^* = Y^{*t} b = C_B^t B^{-1} \cdot b = C_B^t t X_B = Z^*$$

Por la consecuencia e) del teorema de dualidad débil, Y^* también es óptima.

Consecuencias:

Si el primal es factible el dual es factible.

Si el dual es infactible entonces el primal es no acotado o es también infactible.

Si el primal es infactible entonces el dual es no acotado o es también infactible.

Solución del problema dual en la resolución del dual

- Si se emplea el algoritmo revisado del simplex ya tenemos la solución de la dualidad:

$$Y^{*t} = C_B^t \cdot B^{-1} = S \quad \text{(vector multiplicador del simplex)}$$

- Si se emplea el algoritmo del simplex la solución coincide con los costes reducidos de las variables de holgura:

$$Y^{*t} = C_B^t \cdot B^{-1}.$$

Ejemplo 45 *Dado el P.L.*

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 5x_1 + 3x_2 \\ s.a.:\ & x_1 \leq 2 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Hallar su dual y obtener las soluciones primal y dual.

El dual es:

$$\begin{aligned} \text{Min W} &= 2y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ \text{s.a.:}\ & y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ & 2y_2 + 8y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución del primal:

		5	3	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1*	0	1	0	0	2
x_4	0	5	2	0	1	0	12
x_5	0	3	8	0	0	1	12
$Z_j - c_j$		-5	-3	0	0	0	z=0

		5	3	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	5	1	0	1	0	0	2
x_4	0	0	2	-5	1	0	2
x_5	0	0	8*	-3	0	1	6
$Z_j - c_j$		0	-3	5	0	0	z=10

		5	3	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	5	1	0	1	0	0	2
x_4	0	0	0	-17/4	1	-1/4	1/2
x_2	3	0	1	-3/8	0	1/8	3/4
$Z_j - c_j$		0	0	31/8	0	3/8	z=49/4

Solución óptima del programa primal: $x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{4}, Z^* = \frac{49}{4}$.

Solución óptima del dual: $y_1 = \frac{31}{8}, y_2 = 0, y_3 = \frac{3}{8}, W^* = \frac{49}{4}$.

Nota: Si la base unitaria primitiva no procede de una variable de holgura puede tener algún coste no nulo en el objetivo.

Por ejemplo, si hubiese tenido x_4 costo 5 unidades, es decir que $c_4 = 5$ entonces al valor resultante en el coste reducido correspondiente $Z_4 - c_4$ habría que añadirle $c_4 = 5$ para obtener el valor de y_1 pues el valor y_1 coincidiría con el de Z_4. Este caso, lo veremos al resolver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 46 *Dado el P.L.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3\\
&\textit{s.a.: } 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2\\
&\qquad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6\\
&\qquad x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 10\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \textit{ no restringida}
\end{aligned}$$

Deducir su problema dual. Resolver el problema primal y hallar la solución del dual a partir de la tabla del primal.

Hacemos el cambio $x_3 = x_3' - x_3''$

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= 2x_1 + 3x_2 - x_3' + x_3'' \\ \text{s.a.: } & 2x_1 + x_2 - x_3' + x_3'' \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 10 \\ & x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0 \end{aligned}$$

Pasando a la forma canónica minimizante

$$\begin{aligned} \text{Min Z} &= 2x_1 + 3x_2 - x_3' + x_3'' \\ \text{s.a.: } & 2x_1 + x_2 - x_3' + x_3'' \geq 2 \\ & x_1 - 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \geq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \geq -6 \\ & -x_1 - 3x_2 - 4x_3' + 4x_3'' \geq -10 \\ & x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0 \end{aligned}$$

	Max				
Min	x_1	x_2	x_3'	x_3''	$\geq$
y_1	2	1	-1	1	2
y_2	1	-2	3	-3	6
y_3	-1	2	-3	3	-6
y_4	-1	-3	-4	4	-10
$\leq$	2	3	-1	1	

El problema dual es

$$\begin{aligned} \text{Max W} &= 2y_1 + 6y_2 - 6y_3 - 10y_4 \\ \text{s.a.: } & 2y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \leq 2 \\ & y_1 - 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 \leq 3 \\ & -y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 4y_4 \leq -1 \\ & y_1 - 3y_2 + 3y_3 + 4y_4 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} -y_1 & + & 3y_2 & - & 3y_3 & - & 4y_4 & \leq & -1 \\ y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 & + & 4y_4 & \leq & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow y_1 - 3y_2 + 3y_3 + 4y_4 = 1.$$

Si hacemos el cambio:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_2' & = & y_2 - y_3 \\ y_4 & = & -y_4 \end{array}\right\}$$

El programa dual será:

$$\begin{aligned} &\text{Max W} = 2y_1 + 6y_2' + 10y_4' \\ &\text{s.a.: } 2y_1 + y_2' + y_4' \leq 2 \\ &\qquad y_1 - 2y_2' + 3y_4' \leq 3 \\ &\qquad -y_1 + 3y_2' + 4y_4' = -1 \\ &\qquad y_1 \geq 0, \;\; y_2' \text{ no restringida } y_4' \leq 0 \end{aligned}$$

Hallamos ahora la solución del primal. Añadiendo variables de holgura y artificiales y transformando las variables en no negativas tenemos:

$$\begin{aligned} &\text{Min Z} = 2x_1 + 3x_2 - x_3' + x_3'' + mx_5 + mx_6 \\ &\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 - x_3' + x_3'' - x_4 + x_5 \geq 2 \\ &\qquad x_1 - 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + x_6 = 6 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3'' + x_7 \leq -10 \\ &\qquad x_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, .., 7 \end{aligned}$$

		2	3	-1	1	0	m	m	0	
Min		x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	m	$2*$	1	-1	1	-1	1	0	0	2
x_6	m	1	-2	3	-3	0	0	1	0	6
x_7	0	1	3	4	-4	0	0	0	1	10
$Z_j - c_j$		$3m-2$	$-m-3$	$2m+1$	$-2m-1$	$-m$	0	0	0	$8m$

		2	3	-1	1	0	m	m	0	
Min		x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	2	1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	0	0	1
x_6	m	0	$-5/2$	$7/2*$	$-7/2$	$1/2$	$-1/2$	1	0	5
x_7	0	0	$5/2$	$9/2$	$-9/2$	$1/2$	$-1/2$	0	1	9
$Z_j - c_j$		0	$\frac{-5m}{2}-2$	$\frac{7m}{2}$	$\frac{-7m}{2}$	$\frac{m}{2}-1$	$\frac{-3m}{2}+1$	0	0	$5m+2$

		2	3	-1	1	0	m	m	0	
Min		x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	2	1	$1/7$	0	0	$-3/7$	$3/7$	$1/7$	0	$12/7$
x_3'	-1	0	$-5/7$	1	-1	$1/7$	$-1/7$	$2/7$	0	$10/7$
x_7	0	0	$40/7$	0	0	$-1/7$	$1/7$	$-9/7$	1	$18/7$
$Z_j - c_j$		0	-2	0	0	-1	$1-m$	$-m$	0	2

Solución óptima del programa primal:

$$x_1 = \tfrac{12}{7}, x_2 = 0, x_3 = \tfrac{10}{7}, Z^* = 2.$$

Solución óptima del dual:

$$y_1 = (1-m) + m = 1, \;\; y_2 = -m + m = 0, \;\; y_3 = 0, W^* = 2.$$

4.- Teorema de Holgura Complementaria.

Sean $X^* = (x_j)$ e $Y^* = (y_i)$ soluciones factibles de los problemas primal y dual repectivamente, y sean $U^* = (u_i)$ y $V^* = (v_j)$ los valores respectivos de las variables de holgura para las soluciones X^* e Y^*, entonces, X^* e Y^* son óptimas si y solo si se cumple que:

$$u_i y_i = 0 \quad i = 1, 2, .., m \qquad v_j x_j = 0 \quad j = 1, 2, .., n$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ Supongamos que X^* e Y^* son óptimas. Partimos de:

$$\begin{array}{lcl} \text{Max Z } = C^t \cdot X & & \text{Min W } = b^t \cdot Y \\ \text{sujeto a } AX \leq b & \text{y su dual} & \text{sujeto a } A^t \cdot Y \geq C \\ X \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Tenemos:

$$AX^* + U^* = b \Longrightarrow \text{multiplicamos por } Y^{*t} \text{ por la izquierda}$$

$$\begin{array}{l} Y^{*t}AX^* + Y^{*t}U^* = Y^{*t}b \\ Y^{*t}U^* = Y^{*t}b - Y^{*t}AX^* \end{array} \tag{3.6}$$

y

$$A^tY^* - V^* = C \Longrightarrow \text{multiplicamos por } \quad X^*$$

$$\begin{array}{l} Y^{*t}AX^* - V^{*t}X^* = V^{*t}X^* \quad , \\ -V^{*t}X^* = C^tX^* - Y^{*t}AX^* \end{array} \tag{3.7}$$

Por ser óptimas se cumple que

$$C^tX^* = b^tY^*. \tag{3.8}$$

Pero cuando además $Y^{*t}b = b^tY^*$ de (3.6) (3.7) y (3.8) tenemos:

$$Y^{*t}U^* = -V^{*t}\cdot X^* \Longrightarrow Y^{*t}U^* + V^{*t}X^* = 0$$

$$(y_1, y_2, .., y_m)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix} + (v_1, v_2, .., v_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j x_j = 0$$

Como todos los sumandos son no negativos ha de ser:

$$\begin{array}{ll} y_i \cdot u_i = 0 & i = 1, 2, .., m \\ v_j \cdot x_j = 0 & j = 1, 2, .., n \end{array}$$

$\Longleftarrow$ Supongamos que X^*,Y^* verifican $u_i y_i = 0$; $v_j x_j = 0$ y además son factibles

$\sum_{i=1}^{m} y_i u_i = 0$; $\sum_{j=1}^{n} v_j x_j = 0$, luego,

$$\sum_{i=1}^{m} y_i u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j x_j = 0$$

$$Y^{*t}U^* + V^{*t}X^* = 0$$

pero

$$\begin{array}{lllll} AX^* + U^* & = & b & \Longrightarrow & U^* = b - AX^*(1) \\ AY^* - V^* & = & C & \Longrightarrow & Y^{*t}A - V^{*t} = C^t \quad \Longrightarrow \quad V^{*t} = Y^{*t}A - C^t. \end{array}$$

Usando las tres relaciones últimas tenemos:

$$\begin{aligned} Y^{*t}(b - AX^*) + (Y^{*t}A - C^t)X^* &= 0 \\ Y^{*t}b - Y^{*t}AX^* + Y^{*t}AX^* - C^tX^* &= 0 \\ Y^{*t}b &= C^tX^* \end{aligned}$$

Por la consecuencia e) del teorema de dualidad débil, entonces son óptimas.

Nota: Este teorema puede utilizarse para deducir la solución del dual conociendo la del primal, veámoslo por medio del siguiente ejemplo:

Ejemplo 47 *Dado el programa lineal siguiente, determine la solución óptima del programa dual.*

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 5x_1 + 3x_2 \\ &s.a.: x_1 \leq 2 \\ &\quad 5x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ &\quad 3x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima del primal es: $x_1 = 2,\ \ x_2 = \frac{3}{4},\ Z = \frac{49}{4}$.

Introduciendo variables de holgura, el sistema de restricciones será:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \quad u_1 \qquad\qquad & = & 2 \\ 5x_1 + 2x_2 \quad + u_2 \qquad & = & 12 \\ 3x_1 + 8x_2 \qquad\quad + u_3 & = & 12 \end{array}$$

El dual será:

$$\begin{aligned} &\text{Min W: } = 2y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ &\text{s.a.:} y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 5 \\ &\quad 2y_2 + 8y_3 \geq 3 \\ &\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

y el sistema de restricciones del dual con variables de holgura es:

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 5y_2 + 3y_3 - v_1 \quad & = & 5 \\ 2y_2 + 8y_3 \qquad - v_2 & = & 3 \end{array}$$

$$v_j x_j^* \quad = \quad 0 \left\{ \begin{array}{rcl} v_1 x_1 & = & 0 \\ v_2 x_2 & = & 0 \end{array} \right. \text{y como} \left\{ \begin{array}{rcccc} x_1 & = & 2 & > & 0 \\ x_2 & = & 3/4 & > & 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{array} \quad y \quad \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = \frac{1}{2} \\ u_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$u_iy_i = 0 \begin{cases} u_1y_1 = 0 \\ u_2y_2 = 0 \\ u_3y_3 = 0 \end{cases} \text{ y como } \quad y_2 \quad = \quad 0$$

Sustituyendo los valores $v_1 = 0,\ v_2 = 0,\ y_2 = 0$ en el problema dual, se obtiene su solución resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1 + 3y_3 & = & 5 \\ 8y_3 & = & 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow y_3 = \frac{8}{3},\quad y_1 = \frac{31}{8}$$

Es decir la solución óptima del problema dual es:

$y_1 = \frac{31}{8},\ y_2 = 0,\ y_3 = \frac{8}{3},\ v_1 = 0,\ v_2 = 0,\ W = \frac{49}{4}.$

3.3 Interpretación económica de la dualidad

Las variables duales nos indican como varía la función objetivo al cambiar los recursos.

Si la base óptima es B; $X_B^* = B^{-1}b$; $\quad Z^* = C_B^tX_B^*$

Si cambian los recursos a $b + \delta b$ entonces:

$$X_B' = B^{-1}(b + \delta b) = B^{-1}b + B^{-1}(\delta b)$$

$$Z' = C_B^tX_B' = C_B^tB^{-1}b + C_BB^{-1}(\delta b) = Z^* + Y^{*t}(\delta b) =$$

$$= Z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^*(\delta b_i) = Z^* + y_1^*(\delta b_1) + y_2^*(\delta b_2) + \cdots + y_m^*(\delta b_m)$$

Esto sólo es cierto si la corrección de b es lo suficientemente pequeña para que no haya cambio de base óptima.

Ejemplo 48 *En el siguiente problema*

$$\begin{array}{l} \textit{Max } Z: = 5x_1 + 3x_2 \\ s.a.{:}x_1 \leq 2 \\ \qquad 5x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ \qquad 3x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

la solución óptima primal: $x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{4},\ Z = \frac{49}{4}$ *y la solución óptima dual es* $y_1^* = \frac{31}{8},\ y_2^* = 0,\ y_3^* = \frac{3}{8};.W = \frac{49}{4}.$

Si $b_1 = 2$ aumenta una unidad $\Longrightarrow Z$ aumenta $\frac{31}{8}$. Si $b_2 = 12$ aumenta una unidad $\Longrightarrow Z$ aumenta 0. Si $b_3 = 12$ aumenta una unidad $\Longrightarrow Z$ aumenta $\frac{3}{8}$. Este resultado sólo es válido si los cambios en b no implican un cambio de la base óptima y por tanto de la matriz óptima B.

En resumen, ¿cuándo conviene resolver el programa dual?

- Cuando el dual sea más fácil de resolver.
- Cuando necesitamos aplicar su interpretación económica.
- En aquellas ramas de la Investigación Operativa en las que la dualidad aparezca de modo natural, por ejemplo en los problemas de transporte y asignación.

Ejemplo 49 (Interpretación económica del dual) *Una fábrica hace muebles: pupitres, mesas y sillas. Cada pupitre supone una ganancia de 60 euros, cada mesa 30, y cada silla 20. El material y horas de sueldo necesarios para realizar cada uno de estos muebles viene expresado en la siguiente tabla, donde también se indica la cantidad de recursos disponibles actualmente:*

Gasto por unidad y mueble	*pupitres*	*mesas*	*sillas*	*Disponibilidad*
En material (madera)	*8*	*6*	*1*	*48*
En carpintería (horas trabajo)	*4*	*2*	*1.5*	*20*
En acabado y transporte	*2*	*1.5*	*0.5*	*8*
ganancia por unidad	*60*	*30*	*20*	

¿Cuántos muebles hará de cada clase para maximizar la ganancia? Plantear este problema y hallar una interpretación del problema dual.

Planteamiento:

Sean las variables de decisión para el problema:

x_1 = número de pupitres,

x_2 = número de mesas,

x_3 = número de sillas.

$$\begin{aligned} \text{Max Z} &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.a.: } & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

Supongamos que un empresario desea adquirir la fábrica. Lo que puede adquirir son los materiales y las horas de trabajo disponibles, y debe hacer una oferta que no sea rechazada por el anterior propietario, pero que al mismo tiempo sea para él lo más ventajosa posible. ¿Cuanto deberá pagar por la madera y las horas de trabajo?

Sean y_1, y_2, y_3 los precios a los que va a pagar la unidad de madera, la hora de trabajo de los carpinteros y la hora de trabajo de acabado, respectivamente. Lo que debería pagar el comprador será $48y_1 + 20y_2 + 8y_3$, y naturalmente deseará que esta cantidad sea lo menor posible, pero supone, que como es de esperar, el actual dueño no se la venderá si esto le supone alguna pérdida. Por eso, el precio que pague por el material y horas que permitan hacer cada mueble deberá ser al menos igual que la ganancia que el dueño actual saca por este mueble. En resumen el problema que el comprador ha de resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} min & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\ s.a. & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 \text{ (precio de un pupitre)} \\ & 6y_1 + 2y_2 + 1.5y \geq 30 \text{ (precio de una mesa)} \\ & y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \text{ (precio de una silla)} \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

que como se ve es el dual del primero. Las variables del problema dual deben ser interpretadas como los precios por unidad de cada recurso. Se suelen llamar "precios-sombra de los recursos", ya que, no es un precio real o de mercado, sino asociado al problema primal.

3.4 Algoritmo Dual del Simplex. (Caso maximizante)

Este método es útil a veces para no tener que introducir variables artificiales. Este algoritmo se aplica cuando puede obtenerse una solución básica, que tiene costes reducidos positivos, pero que no es factible porque tiene algunas soluciones negativas. Es decir, se aplica en el caso de una tabla en la que todos los $z_j - c_j \geq 0$, pero con algún $x_i < 0$. Este tipo de soluciones se llaman *dual factible.*

Paso 1

Si x_B solución básica factible cumple $x_B \geq 0$, entonces la solución es óptima.

Paso 2 (Selección de la variable de salida)

Seleccionar como variable de salida aquella variable básica con valor más negativo. Sea x_r.

Paso 3 (Selección de la variable de entrada)

Determinar para las columnas no básicas los cocientes $p_j = \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}$ para los $y_{rj} < 0$. Entra la variable de mayor cociente (o menor valor absoluto). Sea x_k.

Paso 4

Establecer una nueva tabla con y_{rk} como pivote y volver al Paso 1.

Nota 1: Si tódos los $y_{rj} \geq 0$ el programa dual es no acotado y el primal es no factible.

Nota 2: En el caso minimizante todo es igual salvo:

- Paso 1. Hay que partir de una tabla en la que $z_j - c_j \leq 0$.
- Paso 3. Se selecciona la variable de entrada que de mínimo el cociente (o mayor valor absoluto).

Ejemplo 50 *Resolver el programa lineal siguiente y su programa dual:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.:} & x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

El problema dual sería

	x_1	x_2	x_3	$\geq$
y_1	1	-1	3	1
y_2	2	-1	1	0
y_3	1	1	-1	2
$\leq$	1	1	1	

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max} & W = y_1 + 2y_3 \\ \text{s.a.:} & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1 \\ & -y_1 - y_2 + y_3 \leq 1 \\ & 3y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Para calcular la solución del primal cambiamos previamente el signo de las desigualdades, lo que va a implicar un cambio de signo en las variables duales:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.:} & -x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -1 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 0 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a.:} & -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}\right\}$$

		1	1	1	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	-1	1	-3	1	0	0	-1
x_5	0	-2	1	-1	0	1	0	0
x_6	0	$\boxed{-1}$	-1	1	0	0	1	-2
$z_j - c_j$		-1	-1	-1	0	0	0	$z = 0$

Sale x_6 pues tiene el valor más pequeño $x_6 = -2$, y entra x_1, pues en la tercera fila $\min\{\frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-1}\} = 1$. Así, haciendo las transformaciones correspondientes, usando -1 como pivote, tenemos la siguiente tabla:

		1	1	1	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	$\boxed{2}$	-4	1	0	-1	1
x_5	0	0	3	-3	0	1	-2	4
x_1	1	1	1	-1	0	0	-1	2
$z_j - c_j$		0	0	-2	0	0	-1	$z = 2$

Como el valor $z_2 - c_2 = 0$ y x_2 no está en la base, indica que hay soluciones múltiples. Como $x_B \geq 0$, tenemos que una solución óptima del primal es:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad z = 2.$$

Como hemos cambiado de signo las restricciones del primal tenemos que la solución óptima del dual es:

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 1 \quad , \quad w = 2.$$

Como hemos dicho hay un coste reducido cero en una variable no básica ($z_2 - c_2 = 0$), y por tanto si se introduce la variable x_2 sale x_4. Si se hacen las transformaciones correspondientes usando como pivote 2, obtenemos la nueva tabla:

		1	1	1	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	1	0	1	-4	$1/2$	0	$-1/2$	$1/2$
x_5	0	0	0	-3	$-3/2$	1	$-1/2$	$5/2$
x_1	1	1	0	-1	$-1/2$	0	$-1/2$	$3/2$
$z_j - c_j$		0	0	-2	0	0	-1	$z = 2$

Así obtenemos que otra solución óptima para el primal es:

$$x_1 = 3/2 \quad , \quad x_2 = 1/2 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad z = 2.$$

Y la solución óptima para el dual, coincide con la obtenida en la tabla anterior. Por tanto, el problema primal tiene infinitas soluciones, sin embargo, el problema dual tiene solución única.

Ejemplo 51 *Resolver el programa lineal:*

$$\left.\begin{array}{rr} \textit{Min} & Z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \textit{s.a.:} & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Si escribimos el problema en forma maximizante, ($z\prime = -z$) obtenemos el problema equivalente:

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Max} & Z' = -2x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a.:} & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -8 \\ & -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = -7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Así pues, se cumplen las condiciones para poder aplicar el algoritmo dual del simplex, pues el primal es infactible ($x_B < 0$); y el dual es factible pues $z_j - c_j \geq 0$. Si construimos la tabla y aplicamos el algoritmo dual del simplex obtenemos:

		-2	-1	-4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	0	$-2*$	1	-3	1	0	-8
x_5	0	-1	-3	-2	0	1	-7
$z_j - c_j$		2	1	4	0	0	$z' = 0$

Sale x_4 pues tiene el valor más pequeño $x_4 = -8$, y entra x_1, pues en la primera fila $\min\{\left|\frac{2}{-2}\right|, \left|\frac{4}{-3}\right|\} = 1$. Así haciendo las transformaciones correspondientes, si usamos -2 como pivote, tenemos la siguiente tabla:

		-2	-1	-4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-2	1	$-1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	4
x_5	0	0	$-7/2*$	$-1/2$	$-1/2$	1	-3
$z_j - c_j$		0	2	1	1	0	$z' = -8$

Sale x_5 pues tiene el valor más pequeño $x_5 = -3$, y entra x_2, pues en la segunda fila $\min\{\left|\frac{2}{-7/2}\right|, \left|\frac{1}{-1/2}\right|, \left|\frac{1}{-1/2}\right|\} = 4/7$. Así haciendo las transformaciones correspondientes, usando $-7/2$ como pivote, tenemos la siguiente tabla:

		-2	-1	-4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	-2	1	0	$23/14$	$22/14$	$1/7$	$31/7$
x_2	-1	0	1	$1/7$	$1/7$	$-2/7$	$6/7$
$z_j - c_j$		0	0	$5/7$	$5/7$	$4/7$	$z' = -68/7$

Como $x_B \geq 0$, tenemos que una solución óptima del primal es:

$$x_1 = 31/7 \quad , \quad x_2 = 6/7 \quad , \quad z = -z' = 68/7.$$

Y la solución óptima del dual es:

$$y_1 = 5/7 \quad , \quad y_2 = 4/7 \quad , \quad w = 68/7.$$

Tema 4

Análisis de sensibilidad

4.1 Introducción gráfica

Consideraremos en el siguiente ejemplo

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.:} & \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

cuya solución óptima es $x_1 = 20,\ x_2 = 60$, con $Z = 180$.

¿Qué ocurriría si se realizaran cambios en los coeficientes de la función objetivo?

Observando la representación gráfica de este problema en la figura 4.1 de la página 118, puede deducirse que si se hicieran pequeñas modificaciones de los coeficientes de la función objetivo el resultado sería un ligero giro en la representación gráfica de la función objetivo, sin que se altere, el valor del punto donde se alcanza el valor óptimo, aunque si se alteraría el valor de Z. En el Análisis de Sensibilidad, que iniciamos en este capítulo, se estudiarán los efectos producidos por algunas modificaciones en los datos iniciales. En el caso que estamos tratando, un cambio en los costes, c_i, podría mantener la solución óptima para ciertos intervalos de variación, aunque variaría el valor del objetivo.

Si lo que cambian son los recursos, bi, algunas aristas de la región factible se desplazarán paralelamente. En este caso, puede que se mantenga la base óptima pero en muchos casos, como en el de nuestro ejemplo, variará la solución óptima y por tanto también el objetivo. Más complicado es ver qué ocurriría cuando cambien los coeficientes tecnológicos (a_{ij}) aunque también pueden obtenerse algunas simplificaciones.

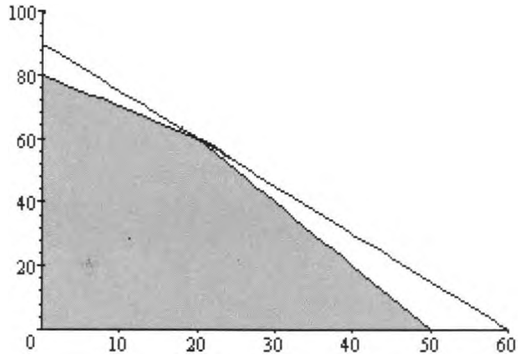


Figura 4.1: Región factible problema sensibilidad.

Para realizar este estudio se supone que se tiene una solución óptima del problema, y que debido a las fluctuaciones del mercado han variado los precios de alguno de los productos, o se han producido cambios en los recursos disponibles. Partimos de una solución óptima del problema precedente, pero es necesario realizar algunas modificaciones debido a los cambios producidos. Por este motivo, el Análisis de Sensibilidad se conoce también con el nombre de *Análisis de Post-optimalidad.*

4.2 Cambios discretos

4.2.1 Variación en un coste de una variable no básica

Ejemplo 52 *Consideramos el problema*

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3, \\ & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\ s.a. & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \textit{ no negativos} \end{array}$$

La tabla de simplex inicial es

	cB	x_1	x_2	x_2	h_1	h_2	h_3	
h_1	0	8	6	1	1	0	0	48
h_2	0	4	2	1.5	0	1	0	20
h_3	0	2	1.5	0.5	0	0	1	8
		-60	-30	-20	0	0	0	$Z = 0$

La tabla de simplex que da la solución óptima es:

		60	30	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
60	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
		0	5	0	0	10	10	$Z = 280$

Consideremos que vamos a realizar un cambio en el coste de x_2, cuyo valor es 30 a $30 + \triangle$, de modo que se conserve la matriz óptima actual. ¿Qué cambios se producirían en la tabla anterior?

Recordamos que las filas correspondientes a las restricciones pueden obtenerse ordenando los cálculos de la forma siguiente:

$$B^{-1}\left(B \vdots N \vdots b\right) = \left(B^{-1}B \vdots B^{-1}N \vdots B^{-1}b\right) = \left(I \vdots B^{-1}N \vdots B^{-1}b\right)$$

y que los costes reducidos de las variables no básicas son $c'_B B^{-1}N - c'_N$, siendo nulos los costes reducidos de las variables básicas. La solución del problema es:

$$X_B^0 = B^{-1} \cdot b \qquad Z^0 = c'_B B^{-1} b$$

qué era óptima si

$$c'_B B^{-1} N - c'_N \geq 0.$$

Por lo tanto, como sólo vamos a cambiar una variable no básica sólo puede cambiar, en todo el proceso anterior esta última expresión. Únicamente tendremos que recalcular $z_2 - c_2$, resultaría:

$$z_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1.25 \end{pmatrix} - (30 + \triangle) = 5.0 - \triangle.$$

La tabla quedaría en este caso en la siguiente forma:

		60	$30 + \triangle$	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
60	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
		0	$5 - \triangle$	0	0	10	10	280

Se observa que la tabla permanecerá óptima si $5-\triangle \geq 0$, es decir si $\triangle \leq 5$. Este hecho pone de manifiesto que el coste reducido, 5, de una variable no básica, x_2, en la tabla óptima es la cantidad máxima en que puede aumentar el coste de esta variable en la función objetivo sin que varié la actual solución óptima. Por tanto el valor de c_2, puede aumentar hasta 35. También el valor de la función objetivo será en este caso el mismo ya que $Z^0 = c'_B B^{-1} b$ y ninguna de estas matrices cambia si $c_2 \leq 35$. Igualmente, c_2 puede disminuir todo lo que se quiera, pues no hay restricción para $\triangle$ por la izquierda.

Si no se cumpliera esta condición y c_2 pasara a ser, por ejemplo 40, la tabla final del simplex quedaría:

Max		60	40	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
60	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
		0	-5	0	0	10	10	280

y habría que continuar hasta obtener de nuevo optimalidad. Sale x_1 y entra x_2, con lo que la nueva tabla quedará:

Max		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	27.2
20	x_3	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	11.2
30	x_2	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	1.6
		4	0	0	0	8	16	$Z = 288$

que ya es la tabla óptima.

La nueva solución óptima con la variación en $c_2 = 40$ es:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1.6,\ x_3 = 11.2 \qquad Z = 288.$$

4.2.2 Variación en un coste de una variable básica

Supongamos que el cambio lo realizamos ahora en $c_1 = 60$ que va a tomar el valor $60+\triangle$. En este caso puede haber cambios en los costes reducidos de todas las variables no básicas:

$c'_B B^{-1} N - c'_N =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 20 & 60+\triangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1.25 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\; 5.0 + 1.25\triangle \quad 10.0 - .5\triangle \quad 10.0 + 1.5\triangle \; \right).$$

La tabla ahora tomaría el siguiente aspecto:

		$60+\triangle$	30	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
$60+\triangle$	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
		0	$5+1.25\triangle$	0	0	$10-0.5\triangle$	$10+1.5\triangle$	$280+2$

La base se mantiene óptima si se verifica que todos las componentes del vector

$$\left(\; 5.0 + 1.25\triangle \quad 10.0 - .5\triangle \quad 10.0 + 1.5\triangle \; \right)$$

son no negativas:

$$\left\{ \begin{array}{c} 5.0 + 1.25\triangle \geq 0 \\ 10 - 0.5\triangle \geq 0 \\ 10.0 + 1.5\triangle \geq 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{c} \triangle \geq -\frac{5}{1.25} = -4.0 \\ \triangle \leq 20 \\ \triangle \geq \frac{-10}{1.5} = -6.6667 \end{array} \right. \implies$$

$$\implies -4 \leq \triangle \leq 20$$

Es decir que c_1 puede variar entre 56 y 80 manteniéndose óptima la base y la solución anterior.

El valor del objetivo será:

$$Z = (60 + \triangle) * 2 + 30 * 0 + 20 * 8 = 280 = 280 + 2\triangle.$$

Si pasamos estos límites la solución deja de ser óptima. Supongamos que c_1 toma el valor 100 y por tanto $\triangle = 40$. La tabla sería:

		100	30	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
100	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
		0	55	0	0	-10	70	360

que no es óptima.

Habría que continuar el problema a partir de esta tabla hasta obtener todos los costes reducidos positivos.

Entra h_2 y sale x_3, y aplicamos el algoritmo del simplex:

		100	30	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-2	1	0	2^*	-4	8
100	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
		0	55	0	0	-10	70	360

La solución óptima del nuevo problema es:

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, \text{ con } z = 400.$$

4.2.3 Cambios en los recursos

Ahora vamos a cambiar un recurso sin cambiar la base, por lo tanto permanece el valor de B. Revisando las formulas que nos dan la evolución de la tabla observamos que los cambios sólo pueden darse en la última columna, ya que $X_B^0 = B^{-1} \cdot b$ y $Z^0 = c_B' B^{-1} b$ son las únicas fórmulas donde intervienen los recursos. En concreto si el cambio se realiza en el segundo recurso:

Lo que varía es

$$X_B^0 = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+2\Delta \\ 8+2\Delta \\ 2-0.5\Delta \end{pmatrix},$$

que tendría que tomar todos los valores positivos si queremos que se mantenga la base actual.

$$\begin{cases} 24+2\Delta \geq 0 \\ 8+2\Delta \geq 0 \\ 2-0.5\Delta \geq 0 \end{cases}$$

Si no cumple la restricción anterior, por ejemplo $\Delta = 10$, la tabla resultante sería

		60	30	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	44
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	28
60	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	-3
		0	5	0	0	10	10	280

Esta solución es dual factible, pero no primal factible y deberemos aplicar el algoritmo dual del Simplex para continuar la resolución del problema. Tras hacer una iteración del algoritmo dual del simplex, se obtiene que la solución óptima del programa modificado, con $b_2 = 20 + \Delta = 30$, es la siguiente:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 16, \text{ con } z = 320.$$

4.2.4 Cambios en los coeficientes tecnológicos

En una columna de una variable no básica

Si en el ejemplo anterior, cambiamos la segunda columna de la matriz de coeficientes tecnológicos, y ésta pasa a ser $(5,2,2)^t$, entonces la tabla inicial quedaría:

	c_B	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	
h_1	0	8	5	1	1	0	0	48
h_2	0	4	2	1.5	0	1	0	20
h_3	0	2	2	0,5	0	0	1	8
		-60	-43	-20	0	0	0	$z=0$

Esto sólo originaría un cambio en la columna 2 de la tabla final, que quedaría como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y en el coste reducido de esta columna sería:

$$z_2 - c_2 = (0,20,60) * \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - 43 = -3.$$

Y por tanto la tabla quedaría:

		60	30	20	0	0	0	
		x_1	x_2	x_2	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	-7	0	1	2	-8	24
20	x_3	0	-4	1	0	2	-4	8
60	x_1	1	2	0	0	-0.5	1.5	2
		0	-3	0	0	10	10	$z=280$

En este caso cambia la base óptima, ya que hay un coste reducido positivo y continuamos aplicando el método del Simplex, hasta obtener todos los costes reducidos no negativos.

Si aplicamos el algoritmo del Simplex a la última tabla, obtenemos la solución óptima del programa modificado, con los cambios en la columna de la segunda variable. Dicha solución óptima es:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 16$, con $z = 320$.

Si lo que cambia es la columna de una variable básica el problema es absolutamente distinto, porque ya no se mantiene la matriz básica, por lo que hay que resolver el problema completamente desde el principio.

4.3 Incorporación de una nueva actividad

Incluimos en este caso una nueva variable en el problema con sus correspondientes características. Esto equivale a añadir una nueva columna en la tabla de simplex inicial, que es la única que va a cambiar. Por ejemplo, añadiendo una nueva variable x_4 con $c_4 = 15$ y $a_4^t = (1, 1, 1)$, tenemos:

	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3	
h_1	0	8	6	1	1	1	0	0	48
h_2	0	4	2	1.5	1	0	1	0	20
h_3	0	2	1.5	0,5	1	0	0	1	8
		−60	−30	−20	−15	0	0	0	

Si partimos de la misma base sólo hay que cambiar la columna nueva. Permanece la solución si

$$z_4 - c_4 = c'_B B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 15 \text{ resulta no negativo.}$$

En este caso podemos usar la solución del dual $c'_B B^{-1} = (0, 10, 10)$. Así que

$$z_4 - c_4 = (0, 10, 10) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 15 = 5,$$ la solución sigue siendo óptima y no hace falta introducir la nueva actividad en la base.

Si no fuera así calcularíamos la nueva columna de coeficientes. En este caso no es necesario calcular dicha columna. No obstante, para ilustrar lo que sería necesario hacer si el coste reducido de la nueva actividad resultara negativo, la calculamos de todos modos. Entonces la cuarta columna quedaría:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La nueva tabla quedaría:

		60	30	20	15	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	h_3	
0	h_1	0	−2	0	−6	1	2	−8	24
20	x_3	0	−2	1	−2	0	2	−4	8
60	x_1	1	1.25	0	1	0	−0.5	1.5	2
		0	5	0	5	0	10	10	$z = 280$

4.4 Incorporación de nuevas restricciones

Incluimos restricciones, si la solución anterior verifica las nuevas restricciones entonces sigue siendo óptima. Si no verifica alguna restricción hay que incluirla en la tabla.

Para ilustrarlo, proponemos el ejemplo anterior, en el que incluimos la restricción: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + h_4 = 7$, donde h_4 es una variable de holgura.

Como la solución óptima X_B del problema original es: $x_1 = 2, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 8$, y no verifica la restricción anterior, entonces hay que incluirla:

Tabla	I	60	30	20	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
60	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2
0	h_4	1*	1	1*	0	0	0	1	7
		0	5	0	0	10	10		280

Para conservar x_1 y x_3 en la base hay que hacer nulos los elementos señalados con asterisco en la tabla anterior. Para conseguirlo, basta restar a la fila cuarta la suma de las dos anteriores. Posteriormente actualizamos la fila de costes reducidos, obteniendo la Tabla II, que aparece a continuación.

Tabla	II	60	30	20	0	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	
0	h_1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
20	x_3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
60	x_1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2
0	h_4	0	1.75	0	0	$\boxed{-1.5}$	2.5	1	-3
		0	5	0	0	10	10	0	280

Para continuar el problema hay que emplear el algoritmo dual del simplex. El único elemento que puede hacer de pivote es el señalado con un recuadro en la tabla anterior.

Realizando las transformaciones correspondientes, llegamos a la solución óptima.

La solución óptima es $x_1 = 3, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 4, \;\; Z = 260$.

4.5 Programación Paramétrica

4.5.1 Parametrización de los coeficientes de coste

Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Max Z } = \left(C^t + \lambda C^{0^t}\right) \cdot X \\ \text{sujeto a } AX \leq b \\ X \geq 0 \end{array}$$

El problema consiste en optimizar Z según los valores de λ.

Los valores anteriores representan:

λ parámetro real,

C^t coeficientes independientes de la función objetivo,

C^{0^t} vector de coeficientes del parámetro en la función objetivo.

Ejemplo 53 *Si tenemos el problema paramétrico siguiente, escribir los coeficientes del objetivo.*

$$Z = (3-\lambda)x_1 + (2+3\lambda)x_2 = [(3,2) + \lambda(-1,3)] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, los coeficientes del objetivo, siguiendo la notación anterior son:

$$c^t = (3,2) \;\; c^{0^t} = (-1,3)$$

Los costes reducidos para un problema paramétrico se podrán escribir de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} (\hat{Z}_j - \widehat{C}_j)(\lambda) &= (C_B^t + \lambda C_B^{0^t})y_j - (C_j + \lambda C_j^0) = \\ &= C_B^t y_j - C_j + \lambda(C_B^{0^t} y_j - C_j) = \\ &= Z_j - C_j + \lambda(Z_j^0 - C_j^0). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Y el valor de la función objetivo se escribirá

$$\hat{Z}(\lambda) = (C_B^t + \lambda C_B^{0^t})x_B = C_B^t x_B + \lambda C_B^{0^t} x_B = Z + \lambda Z^0. \tag{4.2}$$

Hemos denominado:

$$\begin{aligned} Z_j^0 - C_j^0 &= C_B^{t^0} y_j - C_j \\ Z^0 &= C_B^{t^0} x_B \end{aligned}$$

Vamos ahora a concretar cuales son los pasos a seguir para aplicar el algoritmo de programación paramétrica. Este algoritmo viene sugerido por las expresiones (4.1) y (4.2) para los costes reducidos y la función objetivo, que marcan una separación entre la parte paramétrica y la no paramétrica.

Algoritmo de programación paramétrica.

Paso 0: Calcular la solución óptima para $\lambda = 0$ y añadir a la tabla final una fila con los $Z_j^0 - C_j^0 \geq 0$ y Z_0.

Paso 1: Imponer a la tabla la condición de optimalidad $\hat{Z}_j - \widehat{C}_j \geq 0$ (caso maximizante), determinando el recorrido del parámetro para el cual la tabla permanece óptima.

Paso 2: Sustituir λ por aquellos valores extremos que sean finitos y aplicar el algoritmo del simplex. introduciendo las columnas no básicas con $\hat{Z}_j - \widehat{C}_j = 0$.

Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 hasta que no puedan hallarse nuevas soluciones.

Ejemplo 54 *Resolver el programa lineal paramétrico:*

$$\begin{aligned} &Max\ Z = (4+\lambda)x_1 + (7-\lambda)x_2 + (3+\lambda)x_3 \\ &s.a.:\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ &\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos que $C^t = (4,7,3) \quad C^{0^t} = (1,-1,1)$

Paso 0: Si lo revolvemos para $\lambda = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\text{Max Z} = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ &\text{s.a.: } 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\ &\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 45 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

		4	7	3	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_4	0	2	1	2	1	0	30
x_5	0	1	2*	2	0	1	45
$Z_j - C_j$		-4	-7	-3	0	0	$Z = 0$

$min = \{\frac{30}{1}, \frac{45}{2}\} = \frac{45}{2}.$

		4	7	3	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_4	0	3/2*	0	1	1	-1/2	15/2
x_2	7	1/2	1	1	0	1/2	45/2
$Z_j - C_j$		$-1/2$	0	4	0	7/2	$Z = 315/2$

$min = \{\frac{15/2}{3/2}, \frac{45/2}{1/2}\} = 5.$ Entra x_1 y sale x_4.

Y obtenemos la tabla óptima para $\lambda = 0$ que aparece a continuación:

Tabla	I	C^{0^t}	1	-1	1	0	0	
		C^t	4	7	3	0	0	
$C_B^{0^t}$		C_B^t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
1	x_1	4	1	0	2/3	2/3	-1/3	5
-1	x_2	7	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
		$Z_j - C_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	$Z = 160$
		$Z_j^0 - C_j^0$	0	0	-1	1	-1	$Z(\lambda) = -15$

Paso 1:Si calculamos $(\hat{Z}_j - \widehat{C}_j)(\lambda)$ tenemos:

$$\begin{array}{rcllcll}
(\hat{Z}_j - \widehat{C}_j)(\lambda) & = & (Z_j - C_j) + \lambda(Z_j^0 - C_j^0) & & & & \\
(\hat{Z}_3 - \widehat{C}_3)(\lambda) & = & 13/3 + (-1)\lambda & = & 13/3 - \lambda & \geq & 0 \\
(\hat{Z}_4 - \widehat{C}_4)(\lambda) & = & 1/3 + (1)\lambda & = & 1/3 + \lambda & \geq & 0 \\
(\hat{Z}_5 - \widehat{C}_5)(\lambda) & = & 10/3 + (-1)\lambda & = & 10/3 - \lambda & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\lambda & \leq & 13/3 \\
\lambda & \geq & -1/3 \\
\lambda & \leq & 10/3
\end{array}$$

Para $-\frac{1}{3} \leq \lambda \leq \frac{10}{3}$ la solución óptima es :

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 20, \quad x_3 = 0, \quad z = 160 - 15\lambda.$$

Paso 2:

Para $\lambda = -1/3$ hay una solución múltiple provocada por la cuarta columna, que corresponde a una variable no básica con coste reducido nulo.

$\hat{Z}_j - \widehat{C}_j = (0, 0, 13/3 - 1/3, 1/3 - 1/3, 10/3 - (-1/3)) = (0, 0, \frac{14}{3}, 0, \frac{11}{3})$

Veamos la otra solución básica que corresponde a $\lambda = -1/3$. Introduciendo en la base x_4 sale x_1 pues

$$y_4 = \begin{pmatrix} 2/3^* \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Tabla	II	C^{0^t}	1	−1	1	0	0	
		C^t	4	7	3	0	0	
$C_B^{0^t}$		C_B^t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
0	x_4	0	3/2	0	1	1	−1/2	15/2
−1	x_2	7	1/2	1	1	0	1/2	45/2
		$Z_j - C_j$	−1/2	0	4	0	7/2	$Z = 315/2$
		$Z_j^0 - C_j^0$	−3/2	0	−2	0	−1/2	$Z(\lambda) = -45/2$

$$\begin{array}{rcll} (\hat{Z}_j - \widehat{C}_j)(\lambda) & = & (Z_j - C_j) + \lambda(Z_j^0 - C_j^0) & \\ (\hat{Z}_1 - \widehat{C}_1)(\lambda) & = & -1/2 - 3/2\lambda & \geq 0 \\ (\hat{Z}_3 - \widehat{C}_3)(\lambda) & = & 4 - 2\lambda & \geq 0 \\ (\hat{Z}_5 - \widehat{C}_5)(\lambda) & = & 7/2 - 1/2\lambda & \geq 0 \end{array}$$

Todos estos costes reducidos son no negativos. Si $\lambda \leq -1/3$, así que en este caso la solución óptima es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 45/2, \quad x_3 = 0, \quad Z = 315/2 - (45/2)\lambda.$$

Para $\lambda = 10/3$ hay una solución múltiple provocada por la quinta columna, que corresponde a una variable no básica con coste reducido nulo.

$Z_j - C_j = (0, 0, \frac{13}{3} - \frac{10}{3}, \frac{1}{3} + \frac{10}{3}, \frac{10}{3} - \frac{10}{3})) = (0, 0, 1, \frac{11}{3}, 0).$

Si a partir de la Tabla I, entra en la base x_5 por x_2 pues

$$y_5 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3^* \end{pmatrix}$$

Tabla	III	C^{0^t}	1	−1	1	0	0	
		C^t	4	7	3	0	0	
$C_B^{0^t}$		C_B^t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
1	x_1	4	1	1/2	1	1/2	0	15
0	x_5	0	0	3/2	1	−1/2	1	30
		$Z_j - C_j$	0	−5	1	2	0	$Z = 60$
		$Z_j^0 - C_j^0$	0	3/2	0	1/2	0	$Z(\lambda) = 15$

$$\begin{array}{rcll}
(\hat{Z}_j - \widehat{C}_j)(\lambda) & = & (Z_j - C_j) + \lambda(Z_j^0 - C_j^0) & \\
(\hat{Z}_2 - \widehat{C}_2)(\lambda) & = & -5 + (3/2)\lambda & \geq 0 \\
(\hat{Z}_3 - \widehat{C}_3)(\lambda) & = & 1 & \geq 0 \\
(\hat{Z}_4 - \widehat{C}_4)(\lambda) & = & 2 + (1/2)\lambda & \geq 0
\end{array}$$

De aquí se obtiene que $\lambda \geq 10/3$ y $\lambda \geq -4$ (Redundante).

Para $\lambda \geq 10/3$ la solución óptima es:

$$x_1 = 15, \ \ x_2 = 0, \ \ x_3 = 0, \ \ Z = 60 + 15\lambda.$$

Resumiendo:

$$\text{Si } -\infty \leq \lambda \leq -\frac{1}{3} \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \frac{45}{2} \\ x_3 & = & 0 \\ Z & = & \frac{315}{2} - \frac{45}{2}\lambda \end{array} \right.$$

$$\text{Si } -\frac{1}{3} \leq \lambda \leq \frac{10}{3} \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & 20 \\ x_3 & = & 0 \\ Z & = & 160 - 15\lambda \end{array} \right.$$

$$\text{Si } \frac{10}{3} \leq \lambda \leq \infty \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 15 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ Z & = & 60 + 15\lambda \end{array} \right.$$

4.5.2 Parametrización de los recursos

Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{l}
\text{Max Z } = C^t \cdot X \\
\text{sujeto a } AX \leq b + \lambda b^0 \\
X \geq 0
\end{array}$$

Si definimos

$\hat{X}_B(\lambda) = B^{-1}(b + \lambda b^0) = B^{-1}b + \lambda B^{-1}b^0 = X_B + \lambda X_B^0 \longrightarrow X_B^0 = B^{-1}b^0$
$\hat{Z}(\lambda) = C_B^t \hat{X}_B = C_B^t(X_B + \lambda X_B^0) = C_B^t X_B + \lambda C_B^t X_B^0 = Z + \lambda Z^0 \rightarrow$
siendo $\longrightarrow Z^0 = C_B^t X_B^0$.

Algoritmo de programación paramétrica.

Paso 0: Calcular la solución óptima para $\lambda = 0$ y añadir a la tabla final una columna con los x_B^0 y z^0.

Paso 1: Imponer a la tabla la condición de factibilidad $X_B(\lambda) \geq 0$ (tanto para el caso maximizante como para el caso minimizante) determinando el recorrido del parámetro para el cual la tabla permanece óptima.

Paso 2: Sustituir λ por aquellos valores extremos que sean finitos y aplicar el algoritmo dual del simplex a las filas con $X_B(\lambda) = 0$.

Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 hasta que no puedan hallarse nuevas soluciones.

$$\begin{aligned} \text{Max Z} &= 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.: } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 - \lambda \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 45 - 2\lambda \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$b = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \end{pmatrix} \qquad b^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Paso 0: La tabla final con $\lambda = 0$ es la que aparece en el ejemplo anterior.

	C^t	4	7	3	0	0	
	C_B^t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_1	4	1	0	2/3	2/3	-1/3	5
x_2	7	0	1	2/3	-1/3	2/3	20
	$Z_j - C_j$	0	0	13/3	1/3	10/3	$Z = 160$

Paso 1: Tenemos por tanto que la matriz B^{-1} es la siguiente:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Y por tanto tendremos que

$$X_B^0 = B^{-1} \cdot b^0 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_B(\lambda) = X_B + \lambda X_B^0$$

Si imponemos la condición de factibilidad $\hat{X}_B(\lambda) \geq 0$ tendremos

$$\hat{X}_B(\lambda) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} 5 \geq 0 \\ 20 - \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \leq 20.$$

Así para $\lambda \leq 20$ tendremos que la solución óptima será:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 20 - \lambda \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad Z = 160 - 7\lambda.$$

Paso 2: Para $\lambda = 20$ obtenemos que $\hat{X}_B(\lambda) = (5, 0)$. Por lo que hay solución múltiple. Entra en la base la variable x_4 y sale de la base x_2. Si Aplicamos el algoritmo dual del simplex, la nueva tabla queda:

	C^t	4	7	3	0	0		
	C_B^t	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B	X_B^0
x_1	4	1	2	2	0	1	45	-2
x_4	0	0	-3	-2	1	-2	-60	3
	$Z_j - C_j$	0	1	5	0	4	$Z = 60$	Z^0=-8

Así tendremos que imponiendo la condición de factibilidad

$$\hat{X}_B(\lambda) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} 45 - 2\lambda \geq 0 \\ -60 + 3\lambda \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} \lambda \leq 45/2 \\ \lambda \geq 20 \end{array}\right\}$$

Por tanto si $20 \leq \lambda \leq 45/2$. la solución óptima que se obtiene es:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 45 - 2\lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad z = 180 - 8\lambda.$$

Para $\lambda = 45/2$ el dual es ilimitado, y por tanto el programa primal es infactible.

$$\hat{X}_B(\lambda) = (0, 15/2)$$

Por tanto para $\lambda > 45/2$ el problema de programación paramétrica es infactible.

Tema 5

El problema de transporte

5.1 Introducción

Este problema se plantea cuando han de distribuirse bienes o servicios que se producen en diferentes lugares (orígenes) y que son demandados en diferentes ubicaciones (destinos). El propósito del problema de transporte es minimizar los gastos que se producen al transportar los artículos desde los orígenes a los destinos.

Ilustramos el problema con el esquema del siguiente ejemplo (ver figura 5.1):

Ejemplo 55 *A y B son los puntos de origen con disponibilidad de 30 y 15 unidades para transportar. Los destinos están representados por los nodos 1, 2, 3 que demandan 15, 5, 25 unidades respectivamente. Los números sobre las líneas indican el coste que se produce al transportar una unidad por esa ruta.*

También se suelen resumir los datos en una tabla, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 56 *Una empresa eléctrica dispone de tres plantas de producción que suministra energía eléctrica a 4 ciudades. La demanda de cada ciudad, la capacidad de producción de cada planta y el coste de enviar un $Kw \times h$ desde cada planta a cada una de las ciudades vienen dados en la tabla:*

	Ciudad 1	*Ciudad 2*	*Ciudad 3*	*Ciudad 4*	*Producción*
Planta 1	*9*	*5*	*11*	*8*	*30*
Planta 2	*8*	*11*	*12*	*8*	*55*
Planta 3	*12*	*7*	*15*	*5*	*40*
Demanda	*43*	*22*	*20*	*40*	*125*

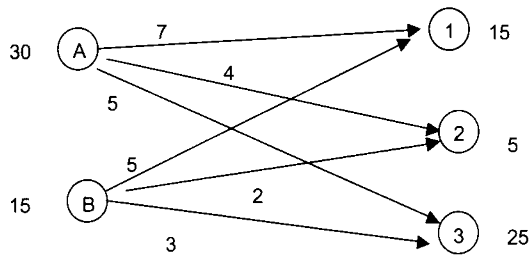


Figura 5.1: Diagrama de transporte.

5.2 Planteamiento como un problema de programación lineal

Este problema del ejemplo anterior es *balanceado o equilibrado*. Esto significa que la suma de las unidades producidas es igual a la suma de las unidades demandadas. En este caso la producción total es $30 + 55 + 40 = 125\ Kw \times h$ y la demanda total es $43 + 22 + 20 + 40 = 125\ Kw \times h$. El problema tiene $4 + 3 = 7$ restricciones y 12 variables. Llamando x_{ij} la cantidad enviada desde la planta i a la ciudad j, el problema consiste en minimizar los costes de transporte, esto es:

$$\begin{gathered}\min\ 9x_{11}+5x_{12}+11x_{13}+8x_{14}+8x_{21}+11x_{22}+12x_{23}+8x_{24}+12x_{31}\\ +7x_{32}+15x_{33}+5x_{34}\\ \textit{s.a.:}\end{gathered}$$

$$\left\{\begin{array}{llllllllllllll}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & & & & & & & & & & =30\\
 & & & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & & & & & & & =55\\
 & & & & & & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & & & & =40\\
x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & & =43\\
 & x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & & =22\\
 & & x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & & =20\\
 & & & x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & & =40\\
 & & & & \multicolumn{4}{l}{\textit{con } x_{ij}\geq 0} & & & & & &
\end{array}\right.$$

Aunque hay 7 restricciones solo 6 de ellas son independientes (cualquiera de ellas puede obtenerse por combinación lineal de las restantes). Por ejemplo la última ecuación puede obtenerse restando a la suma de las tres primeras la suma de las tres siguientes. Por este motivo la base está formada por 6 elementos. Obsérvese que por la forma del sistema el problema dual solo tiene dos incógnitas en cada ecuación. Este hecho es el que se utiliza para simplificar el método de Simplex dando lugar al *Algoritmo de Transporte* que describiremos en este tema.

5.3 Problema no equilibrado

Cuando el problema no es balanceado (equilibrado), se transforma en uno balanceado creando un origen ficticio o un destino ficticio:

Si la demanda es mayor que la oferta creamos un origen ficticio con

producción = demanda total - oferta total.

Si la demanda es menor que la oferta creamos un destino ficticio con

demanda = oferta total - demanda total

Normalmente, en ambos casos se asigna un coste de transporte nulo, ya que las unidades no se mueven desde origen ficticio o hacia destino ficticio. No obstante, en ocasiones, pueden asignarse costes no nulos al origen ficticio, que puede interpretarse como el coste de almacenamiento debido al exceso de oferta. De forma análoga, se puede asignar un coste no nulo al destino ficticio, que se supone equivalente a la estimación del gasto asociado al hecho de no atender la demanda, ya que este hecho puede acarrear como consecuencia la pérdida de clientes.

5.4 Propiedades del problema de transporte

1. El problema de transporte tiene una solución factible: $x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{M}$ donde M es la cantidad total transportada, a_i la disponibilidad del origen i y b_j la demanda del destino j.

2. Si las demandas y disponibilidades son enteras se llama *solución básica factible* de un problema de transporte a una solución entera que verifica las restricciones de disponibilidad y demanda con a lo sumo $m + n - 1$ variables distintas de cero ($m =$ n^{o}de orígenes, $n =$ n^{o}de destinos). El problema de transporte tiene una solución básica factible.

3. Si para un problema de transporte se determina una solución básica factible inicial, entonces todas las que se obtengan de ella por el método de simplex son básicas factibles.

4. El problema de transporte es acotado.

5.5 Determinación de una solución inicial

Como cualquier método de simplex, el algoritmo de transporte precisa de una solución básica factible inicial. Exponemos a continuación varios métodos que nos permiten hallar esta solución de partida.

5.5.1 Método de la esquina Noroeste

Este método nos conduce a una solución factible con, a lo sumo, $m+n-1$ soluciones no negativas.

Hay que aplicar el siguiente algoritmo:

1) Partiendo de la esquina superior izquierda de la tabla (la esquina NW) con $i = j = 1$ hacer $x_{ij} = min(a_i, b_j)$ y restar esta cantidad a a_i, b_j de modo que bien una fila o una columna de la tabla quede satisfecha. Se elimina esta fila o columna de la tabla.

2) Si no queda fila o columna parar. En caso contrario aplicar de nuevo el paso 1 a la tabla resultante

3) Igualad a ceros las x_{ij} que no tienen valor asignado.

Aplicamos este método al problema dado en la tabla siguiente.

Ejemplo 57

	Destino 1	*Destino 2*	*Destino 3*	*Destino 4*	*Producción*
Origen1	*8*	*6*	*10*	*9*	*35*
Origen 2	*9*	*12*	*13*	*7*	*50*
Origen 3	*14*	*9*	*16*	*5*	*40*
Demanda	*45*	*20*	*30*	*30*	*125*

Los elementos recuadrados son los que se van eliminando.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Producción
Origen 1	35				$\boxed{35}$ 0
Origen 2					
Origen 3					
Demanda	$\boxed{45}$ 10	20	30	30	

Se elimina la primera fila de la tabla reducida

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Producción
Origen 2	10				$\boxed{50}$ 40
Origen 3					40
Demanda	$\boxed{45}$ $\boxed{10}$ 0	20	30	30	

Se elimina la primera columna y se para el algoritmo.

	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Producción
Origen 2	20			$\boxed{50}$ $\boxed{40}$ 20
Origen 3				40
Demanda	$\boxed{20}$ 0	30	30	

Se elimina la primera columna de la tabla reducida

	Destino 3	Destino 4	Producción
Origen 2	20		$\boxed{50}$ $\boxed{40}$ $\boxed{20}$ 0
Origen 3			40
Demanda	$\boxed{30}$ 10	30	

Se elimina la primera fila

	Destino 3	Destino 4	Producción
Origen 3	10		$\boxed{40}$ 30
Demanda	$\boxed{30}$ $\boxed{10}$, 0	30	

Se elimina la primera columna

	Destino 4	Producción
Origen 3	30	$\boxed{40}$ $\boxed{30}$ 0
Demanda	$\boxed{30}$ 0	

La solución inicial será

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Producción
Origen 1	35				35
Origen2	10	20	20		50
Origen 3			10	30	40
Demanda	45	20	30	30	

Las casillas en blanco contendrían los valores nulos.

Esta solución, que tiene $3 + 4 - 1 = 6$ variable no nulas, es una solución básica factible.

El valor del objetivo para esta solución es:

$$8 \times 35 + 9 \times 10 + 12 \times 20 + 13 \times 20 + 16 \times 10 + 5 \times 30 = 1180 \text{ u.m.}$$

5.5.2 Método de costo mínimo

En este método se tiene en cuenta el costo correspondiente a cada celda.

Consiste en la aplicación del siguiente algoritmo:

1. Localizar la celda que tenga asignado el menor costo y asignarle la mayor cantidad posible de flujo (como se hace en la celda superior izquierda en el método de la Esquina Noroeste). Si hay empate en el mínimo coste, elegir la celda a la que pueda asignarse una mayor cantidad de flujo. Si hay empate en el costo y en el flujo elegir una cualquiera arbitrariamente.
2. Reducir la oferta y la demanda en la cantidad de flujo que se ha asignado a la celda seleccionada, desechando la fila o columna que quede saturada.
3. Si se han agotado todas las ofertas o demandas igualad a cero las x_{ij} que no tienen valor asignado. Y por tanto ya tenemos la solución básica factible inicial. En caso de que no fuera así, volver al paso 1.

En las siguientes tablas mostramos la aplicación de este algoritmo al caso del ejemplo 57.

En el primer paso elegimos la celda (3,4), por ser la de coste mínimo, y le asignamos un flujo de 30,

8	6	10	9	35
9	12	13	7	50
14	9	16	$(30)_5$	$\boxed{40}$,10
45	20	30	$\boxed{30}$, 0	

dejando de considerar la cuarta columna. Seleccionamos ahora la (1,2) de coste 6, la de menor coste entre las celdas que permanecen, asignándole el valor $20 = min(35, 20)$, con lo que se elimina la segunda columna.

8	$(20)_6$	10	$\boxed{35}$, 15
9	12	13	50
14	9	16	$\boxed{40}$,10
45	$\boxed{20}$, 0	30	

En la tabla resultante se selecciona la celda (1,1) con coste 8, asignandole el valor 15, lo que permite eliminar la primera fila.

$(15)_8$	10	$\boxed{35}$, $\boxed{15}$, 0
9	13	50
14	16	$\boxed{40}$,10
$\boxed{45}$, 30	30	

Prosiguiendo el proceso conseguimos por este método la solución inicial:

15_8	20_6	$_{10}$	$_9$
30_9	$_{12}$	20_{13}	$_7$
$_{14}$	$_9$	10_{16}	30_5

El valor de la función objetivo para esta solución es:

$$8 \times 15 + 6 \times 20 + 9 \times 30 + 13 \times 20 + 16 \times 10 + 5 \times 30 = 1080 \text{ u.m.}$$

que es menor que la solución obtenida previamente por el método de la esquina noroeste (ENO).

5.5.3 Método de Vogel

Aunque requiere más esfuerzo inicial da, por lo general, una solución más cercana a la óptima.

Seguimos los siguientes pasos:

1. Definimos la *Penalización por fila y columna* como la diferencia (en valor absoluto) entre los dos costes menores de esta fila o columna..

2. Elegir la fila o columna de mayor penalización (en caso de empate seleccionar cualquiera de ellas arbitrariamente) y situar en la celda de menor coste el mayor número posible de unidades, disminuyendo las demandas y ofertas en la cantidad situada en esta celda. Eliminar la fila o columna cuya disponibilidad o demanda sea 0.

3. Repetir los pasos 1 y 2 con la tabla restante.

4. Igualar a cero las incógnitas no definidas por el algoritmo anterior.

Aplicamos el método de Vogel al mismo problema de los métodos anteriores:

1. Las penalizaciones correspondientes a las filas y columnas están indicadas en la última columna y fila de la siguiente tabla:

	D 1	D 2	D 3	D 4	Producción	Pen. fil
O 1	8	6	10	9	35	2
O 2	9	12	13	7	50	2
O 3	14	9	16	5	40	4
Demanda	45	20	30	30		
Pen. col	1	3	3	2		

2. Seleccionamos la fila tercera (penalización 4) y la celda correspondiente a la ciudad 4 cuyo coste (5) es el menor de esta fila. Aquí colocamos el valor 30 y actuamos de forma similar al método de la esquina noroeste

	D 1	D 2	D 3	D 4	Producción	Pen fil
O 1	8	6	10	9	35	2
O 2	9	12	13	7	50	2
O 3	14	9	16	(30)$_5$	$\boxed{40}$ 10	4
Demanda	45	20	30	$\boxed{30}$ 0		
Pen col	1	3	3	2		

Suprimo la columna cuarta y volvemos al paso 1 calculando de nuevo las penalizaciones

	D 1	D 2	D 3	Producción	Pen fil
O 1	8	6	10	35	2
O 2	9	12	13	50	3
O 3	14	9	16	10	5
Demanda	45	20	30		
Pen col	1	3	3		

Seleccionamos ahora la fila tercera (penalización 5) y la celda correspondiente a la D2 cuyo coste 9, es el menor de la fila. Aquí colocamos el valor 10, que es el máximo posible.

	D 1	D 2	D 3	Producción	Pen fil
O 1	8	6	10	35	2
O 2	9	12	13	50	3
O 3	14	(10)$_9$	16	0	5
Demanda	45	10	30		
Pen col	1	3	3		

Eliminamos la fila tercera y calculamos de nuevo las penalizaciones. La mayor penalización corresponde a la columna C2 (penalización 6). Seleccionamos casilla primera de la columna D2, su coste 6 es el mínimo de esta columna, y asignamos el valor $10 = min(35, 10)$. Suprimimos despues la columna segunda.

	D 1	D 2	D 3	Producción	Pen fil
O 1	8	10$_6$	10	$\boxed{35}$ 25	2
O 2	9	12	13	50	3
Demanda	45	$\boxed{10}$, 0	30		
Pen col	1	6	3		

En la fila 2 (mayor penalización), selecciono la D1 de coste 9, y colocamos el valor 45.

	D 1	D 3	Producción	Pen fil
O 1	8	10	25	2
O 2	45_9	13	$\boxed{50}$ 5	4
Demanda	$\boxed{45}$,0	30		
Pen col	1	3		

Por último obtenemos la solución inicial de Vogel usando las casillas seleccionadas y las asignaciones a estas casillas que se han hecho en los pasos sucesivos del algoritmo.

	D 1	D 2	D 3	D 4	Producción
O 1	8	10_6	25_{10}	9	35
O 2	45_9	12	5_{13}	7	50
O 3	14	10_9	16	30_5	40
Demanda	45	20	30	30	

El valor de la función objetivo correspondiente a la solución inicial de Vogel es:

$$6 \times 10 + 10 \times 25 + 9 \times 45 + 13 \times 5 + 9 \times 10 + 5 \times 30 = 1020 \quad \text{u.m.}$$

Una vez se conoce alguna solución básica factible, obtenida por uno de los tres métodos anteriores, o por cualquier otro, se puede iniciar, el algoritmo de transporte, de igual forma que se hace en el método de simplex, aceptando la solución actual si es la óptima, o hallando una solución mejorada si este no fuera el caso. Para pasar de una solución básica a otra es importante el concepto de ciclo que se da en el siguiente apartado.

5.6 Definición de Ciclo

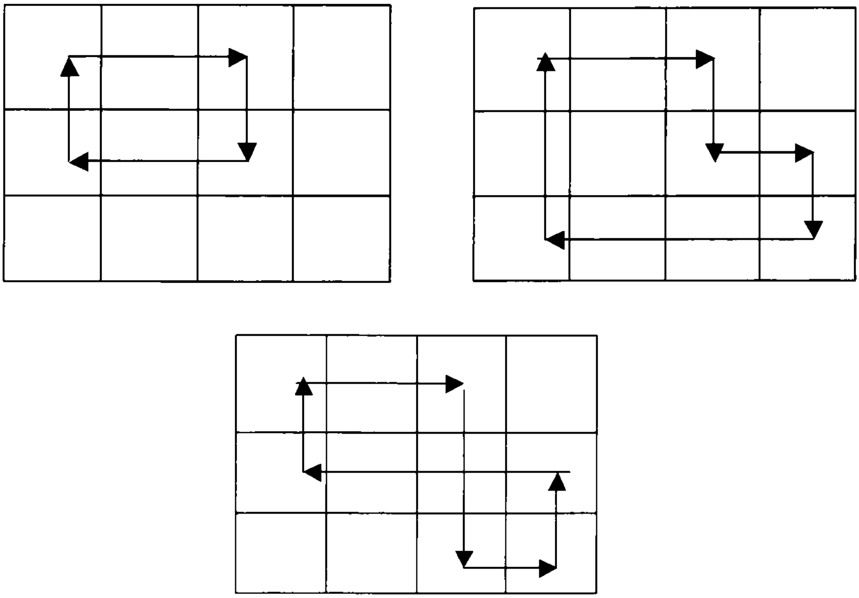
Un *ciclo* es una sucesión de al menos 4 celdas cumpliendo las condiciones siguientes:

1. Dos celdas consecutivas están en la misma fila o en la misma columna.

2. Tres celdas consecutivas no están en la misma fila o columna.

3. La primera y la ultima celda están, bien en la misma fila, bien en la misma columna.

Los esquemas que siguen representan distintos modelos de ciclos. Las celdas que forman el ciclo son las que contienen las puntas de flecha. Se puede comenzar el ciclo por cualquiera de estas celdas.



Ejemplos de diversos tipos de ciclos.

Teorema 9 *En un problema de transporte con m orígenes y n destinos, un conjunto de $m+n-1$ celdas no contiene ciclos si y solo si las $m+n-1$ variables correspondientes a estas celdas son básicas.*

5.7 Algoritmo de transporte (forma minimizante)

Es una adaptación del método de Simplex y es aplicable a problemas balanceados. Si el problema no fuera equilibrado hay que equilibrarlo previamente, añadiendo un origen o un destino ficticio según proceda. Suponemos que las soluciones obtenidas en todos los pasos del algoritmo no son degeneradas, es decir que hay $m+n-1$ posiciones localizadas distintas de cero. La forma de actuar en el caso de que la solución sea degenerada se tratará más adelante.

El algoritmo de transporte consta de los siguientes pasos.

1. Construir una solución básica factible.

2. Analizar si la solución actual es la óptima o mejorarla en su caso:

   (a) Resolver el sistema $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ (una ecuación para cada una de las variables básicas de la solución actual). Las incógnitas de este sistema son u_i y v_j, siendo c_{ij} el coste asignado al transporte en la celda (i,j) de la base. Dar arbitrariamente el valor 0 a una de las incógnitas.

(b) Determinar el coste reducido ($u_i + v_j - c_{ij}$) de las variables no básicas usando las soluciones del sistema resuelto en el paso 2.a. Si todos estos valores son no positivos (valores nulos o negativos) la solución actual es óptima y hemos resuelto el problema. Si no es así la variable que entra en la base es la que corresponde al mayor coste reducido.

(c) Construcción de una nueva solución básica: Partiendo de la posición de la variable de entrada hallada en el paso anterior construir un ciclo que incluya esta variable y alguna de las variables de la solución básica actual. Usar a continuación sobre este ciclo el siguiente procedimiento: A la celda de la variable de entrada le asignaremos + y a las restantes del ciclo alternativamente los signos $+, -, +, -, \ldots$ El menor valor de las celdas señaladas con $-$ se lo restamos al valor de éstas y se lo sumamos al de las marcadas con +. Si más de una celda tuviera este menor valor de x_{ij}, elegir la de menor costo. Con esto una variable quedará a nivel 0 y por tanto saldrá de la base. Hemos obtenido de esta forma una nueva solución básica.

3. Ir al paso 2

Aplicamos el algoritmo de transporte al mismo problema, usando como solución inicial la que hemos hallado por el método de la esquina noroeste (ENO), que era:

	D 1	D 2	D 3	D 4	Producción
O 1	35				35
O 2	10	20	20		50
O 3			10	30	40
Demanda	45	20	30	30	

Esta solución tiene $3+4-1 = 6$ variable no nulas, por lo tanto no es degenerada.

El valor del objetivo es:

$$8 * 35 + 9 * 10 + 12 * 20 + 13 * 20 + 16 * 10 + 5 * 30 = 1180 \quad \text{u.m.}$$

Fijamos 4 posiciones en cada celda, con objeto de incorporar ordenadamente la información que va obteniéndose a lo largo del algoritmo. Cada celda tendrá:

solución	coste reducido
signo	precio unitario

En la última fila o columna ponemos la solución u_i, v_j del sistema correspondiente. El coste reducido máximo, que en este caso es 6, lo marcamos con un asterisco. En esta celda va a estar la variable que entra en la base. El ciclo está marcado con flechas.

	D 1	D 2	D 3	D 4	u_i
O 1	(35) 8	5 6	2 10	-8 9	0
O 2	(10) 9	(20) - 12 $\downdownarrows$	(20) + 13 $\leftleftarrows$	-5 7	1
O 3	-2 14	6* + 9 $\rightrightarrows$	(10) - 16 $\upuparrows$	(30) 5	4
v_j	8	11	12	1	

El sistema correspondiente está formado por las siguientes 3+4−1 = 6 ecuaciones:

$$u_1 + v_1 = 8,\ u_2 + v_1 = 9\ , u_2 + v_2 = 12,\ u_2 + v_3 = 13,\ u_3 + v_3 = 16,\ u_3 + v_4 = 5$$

Tomando $u_1 = 0$, se obtiene sucesivamente:

$$v_1 = 8,\ u_2 = 1,\ v_2 = 11,\ v_3 = 12,\ u_3 = 4,\ v_4 = 1$$

El coste reducido más positivo corresponde a la posición (3,2) cuyo coste reducido es 6. Esta variable es la que va a salir de la base. Para determinar la variable que va a entrar construyo el ciclo: (3,2),(3,3),(2,3),(2,2). Los signos asignados son respectivamente +, −, +, −. En las casillas señaladas con − la variable toma los valores 10 y 20. Siendo 10 el menor valor. Es por tanto x_{33} la variable que va a salir de la base. Resto 10 a las casillas señaladas con − y sumo 10 a las señaladas con más, obteniéndose la nueva solución.

En la tabla que sigue se incluye la nueva solución y se recogen los resultados de los cálculos efectuados para aplicar el siguiente ciclo del algoritmo de transporte.

	D 1	D 2	D 3	D 4	u_i
O 1	(35) - 8 $\rightrightarrows$	5* + 6 $\downdownarrows$	2 10	−2 9	0
O 2	(10) + 9 $\upuparrows$	(10) - 12 $\leftleftarrows$	(30) 13	1 7	1
O 3	−8 14	(10) 9	−6 16	(30) 5	−2
v_j	8	11	12	7	

El valor del objetivo para esta solución es ahora:

$$8 * 35 + 9 * 10 + 12 * 10 + 13 * 30 + 9 * 10 + 5 * 30 = 1120 \text{ u.m.}$$

y el sistema correspondiente:

$$u_1 + v_1 = 8,\ u_2 + v_1 = 9,\ u_2 + v_2 = 12,\ u_2 + v_3 = 13,\ u_3 + v_2 = 9,\ u_3 + v_4 = 5.$$

Ahora el pivote está en la posición (1,2) correspondiente al coste reducido máximo, y la variable que entra es x_{12}, y la que sale x_{22}. Restamos 10 a los valores de las celdas (2,2), (1,1), que están señaladas con el signo menos, y sumamos 10 a los de las celdas (1,2), (2,1) que están marcadas con el signo más. Obtenemos una solución básica factible mejorada:

	D 1	D 2	D 3	D 4
O 1	25	10		
O 2	20		30	
O 3		10		30

con valor del objetivo 1070 u.m.

Repitiendo el proceso llegamos a la tabla siguiente que tampoco es óptima por tener valor 2 en la posición (1,3), con coste reducido 2, que como es el más positivo resulta ser el pivote. El ciclo y las asignaciones de signo también están señaladas en la tabla:

	D 1	D 2	D 3	D 4	u_i
O 1	(25) - 8 ⇉	10 6	2* + 10 ⇊	−7 9	0
O 2	(20) + 9 ⇈	−5 12	(30) - 13 ⇇	−4 7	1
O 3	−3 14	(10) 9	−1 16	(30) 5	3
v_j	8	6	12	2	

Ahora el valor mínimo de las celdas señaladas con - es 25. Este valor se resta a las marcadas con − y se le suma a las marcadas con +, obteniéndose la nueva solución:

	D 1	D 2	D 3	D 4
O 1		10	25	
O 2	45		5	
O 3		10		30

El valor del objetivo es 1020 u.m.

Esta solución es ya optima, pues obtenemos, como puede verse en la siguiente tabla, todos los costes reducidos negativos.

	D 1	D 2	D 3	D 4	u_i
O 1	−2 8	10 6	25 10	−7 9	0
O 2	(45) 9	−3 12	5 13	−2 7	3
O 3	−5 14	(10) 9	−3 16	(30) 5	3
v_j	6	6	10	2	

5.8 Soluciones degeneradas

Una solución básica se llama degenerada cuando contiene menos de $m+n-1$ variables básicas no nulas.

Para aplicar el algoritmo anterior es necesario partir de una solución no degenerada, que contenga $m+n-1$ celdas no nulas. En el caso de que la solución disponible sea degenerada, es preciso completar la base con algunas celdas hasta completar las $m+n-1$ posiciones requeridas. Para ello se actúa del siguiente modo:

Intentar construir un ciclo comenzando en una celda vacía. Asignar la variable correspondiente a esta celda a la base si no es posible construir un ciclo. Si hay varias posibilidades es mejor seleccionar las de precio más bajo y asignar a esta posición el valor ε, que se supone que es un número positivo muy pequeño. Usar esta posición y el valor de la ε asignado como si fuera una variable básica. Cuando los costes reducidos son todos no positivos se llega igualmente a la solución óptima y entonces damos a ε el valor 0.

Ejemplo 58 *Si un problema tiene la solución inicial indicada en la tabla siguiente (los únicos valores no nulos están indicados entre paréntesis y el coste del transporte está indicado con el número más pequeño).*

	Ciudad 1	*Ciudad 2*	*Ciudad 3*	*Ciudad 4*
Planta 1	$(5)_3$	$(3)_4$	NO_1	$_2$
Planta 2	NO_1	$(2)_5$	$(7)_3$	$_7$
Planta 3	$_2$	$_1$	$_1$	$(6)_3$

Sólo hay 5 posiciones no nulas, por lo que es preciso seleccionar una celda donde localizar una nueva variable que, con las de las 5 posiciones no nulas, complete una solución básica factible.

Comenzamos seleccionando una celda que se añadirá a las de la base de forma que no puedan formarse ciclos con esta celda añadida y las 5 celdas no nulas de la solución anterior. Las posiciones prohibidas, aquellas que permiten formar ciclos, están indicadas (con NO) en la tabla anterior. Elegimos entre las posiciones posibles la (3,2), que es una de las más baratas, y le daremos el valor ε, y hallamos los costes reducidos como anteriormente.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	u_i
Planta 1	(5) 3	(3) − 4 ⇉	1 1	4* + 2 ⇊	0
Planta 2	3 1	(2) 5	(7) 3	0 7	1
Planta 3	−2 2	(ε) + 1 ⇈	−2 1	(6) − 3 ⇇	−3
v_j	3	4	2	6	

El costo reducido más positivo es la posición (1,4) el valor más pequeño señalado con el signo menos es 3 en la posición (1,2). La nueva solución está en la siguiente tabla donde también se indican los cálculos realizados en el ciclo correspondiente en el algoritmo de transporte.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	u_i
Planta 1	(5) $-$ 3 ⇉	-4 4	-3 1	(3) + 2 ⇊	0
Planta 2	*7 + 1 ⇈	(2) $-$ 5 ⇇	(7) 3	0 7	5
Planta 3	2 2	$(\varepsilon+3)$ + 1 ⇈	-2 1	(3) $-$ 3 ⇇	1
v_j	3	0	-2	2	

El mayor valor es 7 que está en la posición (2,1) que entrará en la base. En el ciclo marcado los valores señalados con signo menos son (5,2,3) de los cuales el menor coste es 2 por lo que sale de la base la variable de la posición (2,2), quedando la nueva tabla, cuyo pivote resulta en la celda (3,3). Esta variable entrará en la base saliendo la de la posición (3,4) con menor valor (1) marcado con signo menos.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	u_i
Planta 1	3 $-$ 3 ⇉	-4 4	4 1	5 + 2 ⇊	0
Planta 2	2 + 1 ⇈	-7 5	7 $-$ 3 ⇇	-7 7	-2
Planta 3	2 2	$\varepsilon+5$ 1	*5 + 1 ⇈	(1) $-$ 3 ⇇	-1
v_j	3	0	5	2	

El pivote resulta en la celda (3,3). Esta variable entrará en la base saliendo la de la posición (3,4) con menor valor (1) marcado con signo menos.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	u_i
Planta 1	2 $-$ 3 ⇉	1 4	*4 + 1 ⇊	6 + 2	0
Planta 2	3 + 1 ⇈	-2 5	6 $-$ 3 ⇇	-7 7	-2
Planta 3	-3 2	$\varepsilon+5$ 1	1 1 ⇈	-5 3 ⇇	-4
v_j	3	5	5	2	

En esta última tabla el pivote está en (1,3) que entra en la base saliendo la (1,1) con menor valor (2) entre las marcadas con signo menos.

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	u_i
Planta 1	-4 3	−3 4	2 1	6 2	0
Planta 2	5 1	-2 5	4 3	-3 7	2
Planta 3	-3 2	$\varepsilon + 5$ 1	1 1	-1 3	0
v_j	-1	1	1	2	

Todos los costes reducidos son no positivos. La solución optima resulta por tanto:

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4
Planta 1			2	6
Planta 2	5		4	
Planta 3		5	1	

obtenida trás poner a 0 el valor de ε.

El valor del objetivo es de 37 u.m.

5.9 Otras variaciones del problema de transporte

Si el problema que hemos de resolver tuviera una función objetivo que maximizar, se puede resolver con el algoritmo anterior sin más que cambiar los signos de los costes. Otra opción es sustituir cada coste por la diferencia entre el mayor valor de ellos y su propio valor. De esta forma los precios unitarios siguen siendo no negativos. El motivo de que esta transformación esté permitida se debe al siguiente teorema:

Teorema 10 *En un problema de transporte se puede sumar o restar cualquier constante a los costes sin que varíe la solución óptima, aunque lo que sí varía es el valor del objetivo.*

Demostración:

$$\min\left[\sum_{i,j} (k - c_{ij})\, x_{ij}\right] \equiv \min\left[\sum_{i,j} \left(kx_{ij}\right) + \sum_{i,j}(-c_{ij}\right) x_{ij}\right] \equiv$$

$$\equiv \min\left[k \sum_{i,j} (x_{ij}) + \sum_{i,j}(-c_{ij})x_{ij}\right] \equiv \min\left[\text{constante} + \sum_{i,j}(-c_{ij})x_{ij}\right]$$

La última igualdad se deduce del hecho de que la suma de todas las variables es igual a la oferta o demanda total. Así que el problema es equivalente a minimizar $\sum_{i,j} (-c_{ij})\, x_{ij}$ y por tanto a maximizar $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$.

Otra variación de este problema se presenta cuando alguna de las rutas no tenga asignado flujo, es decir que alguna de las rutas directas desde un cierto origen a un

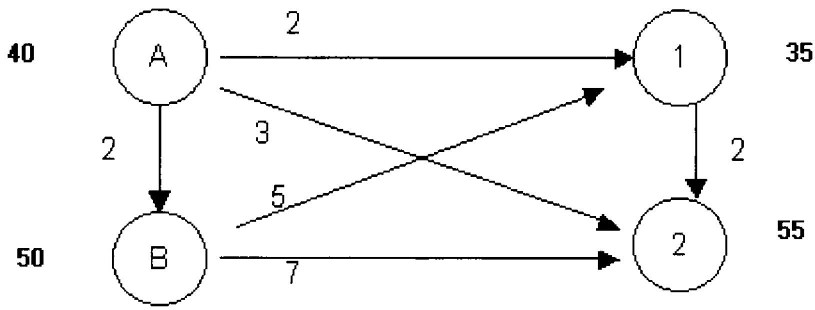


Figura 5.2: Ejemplo de problema de transbordo.

destino esté prohibida. En este caso, si el problema es de minimización, se le asigna un coste muy alto (en relación con los restantes costos) al correspondiente arco. Si el problema es de maximización se asignará un coste muy pequeño.

5.10 El problema de transbordo

Un problema de transbordo es un problema de transporte modificado, donde algunos nodos pueden ser a la vez lugares de demanda de mercancía y orígenes para otros destinos.

Ejemplo 59 *En el gráfico de la figura 5.2 se muestra un ejemplo en el que los nodos A y B son orígenes y los nodos 1 y 2 destinos con las disponibilidades y demandas que se indican. Consideraremos además que B es a su vez un lugar de transbordo y que el gasto por unidad transportada desde A hasta B es 2 u.m. También consideraremos que el destino 1 es un punto de transbordo y que el gasto de transporte desde 1 a 2 es también 2 u.m.*

El problema se resuelve partiendo de la tabla siguiente:

	1	2	B	DISP
A	2	3	2	40
B	5	7	0	50+90
1	0	2	∞	0+90
DEM.	35+90	55	0+90	

Esta tabla se ha construido cumpliendo las siguientes normas:

a) Se añade como origen el destino 1 que actúa como transbordo y que por tanto puede funcionar como origen. De igual forma se añade como destino B que es un nodo de transbordo.

b) Las disponibilidades de los puntos de transbordo, si actúan como orígenes, son las que tienen de por sí, más la cantidad total que se transporta (35+55 = 40+50 = 90). Las demandas de los puntos de transbordo cuando actúan como destinos son las cantidades demandadas realmente, más la cantidad total que hay que transportar.

c) Si algunos pasos no estuvieran permitidos, se pone en la casilla correspondiente un costo grande en relación con los demás. Se supone que el transporte de un nodo a sí mismo tiene coste nulo, si no se indica otra cosa.

Resolviendo el problema de transporte correspondiente a esta tabla se obtiene la solución óptima siguiente.

	1	2	B	DISP
A		40		40
B	50		$\boxed{90}$	50+90
1	$\boxed{75}$	15		0+90
DEM.	35+90	55	0+90	

Para interpretar la solución se ignoran los elementos que conectan un nodo consigo mismo, que aparecen enmarcados en la tabla. Leyendo en horizontal obtenemos la interpretación de la solución: pasamos 40 de A a 2 y 50 unidades desde B al destino 1 y desde este destino (1) pasamos 15 al destino 2.

5.11 El problema de asignación

Este problema consiste en asignar n individuos a n tareas de modo que todos los individuos realicen una tarea y todas ellas se realicen con un costo mínimo.

Ejemplo 60 *Una empresa tiene 4 máquinas y debe completar cuatro tareas. Cada máquina puede realizar cualquier tarea, y cada una ha de realizar una de estas tareas. La tabla siguiente nos da el tiempo que tarda cada máquina en completar cada trabajo.*

	tarea 1	*tarea 2*	*tarea 3*	*tarea 4*
máquina 1	*11*	*1*	*2*	*3*
máquina 2	*3*	*12*	*4*	*5*
máquina 3	*8*	*8*	*1*	*9*
máquina 4	*3*	*4*	*4*	*10*

Asignar una tarea a cada máquina de modo que el tiempo total consumido sea mínimo.

Este problema se puede resolver por el algoritmo de transporte, ya que las máquinas pueden ser interpretados como orígenes con una oferta de 1 y las tareas como destinos con una demanda de 1, puesto que cada individuo sólo hace una tarea y todas las tareas han de ser realizadas. Las soluciones de este problema sólo pueden ser 0 ó 1. Un 1 en la celda (i, j) significa que al individuo i se asigna la tarea j. Aunque puede hacerse por el algoritmo de transporte, se presenta un alto grado de degeneración. Para el problema de asignación es más eficiente usar el método Húngaro, que exponemos a continuación.

5.11.1 El algoritmo Húngaro (Forma minimizante)

Paso 1: Encontrar el mínimo de cada fila. Construir una nueva matriz restando de cada fila el mínimo coste de ésta. Para esta nueva matriz realizar la misma operación por columnas. Esta nueva matriz se llama matriz de coste reducido.

Paso 2: Considerando esta última matriz y comenzando por las filas o columnas con menor número de ceros se recuadra un cero en cada fila y columna y se tachan los demás ceros de estas filas o columnas. Se repite este proceso hasta que no queden ceros sin tachar o recuadrar.

Paso 3: Si el número de ceros recuadrados es igual que el número de filas (también será igual que el número de columnas), las posiciones de los ceros recuadrados marcan la solución óptima. Si no es así, continuar con el Paso 4.

Paso 4: Tachar con el menor número de líneas (filas o columnas) todos los ceros de la matriz.

Para conseguirlo se puede seguir el siguiente procedimiento:

a) Se marcan la filas que no tengan ningún cero recuadrado.

b) Se marcan las columnas que tengan algún cero tachado en las filas marcadas.

c) Considerando únicamente las columnas marcadas se marcan las filas que tengan algún cero recuadrado en estas columnas marcadas.

d) Se repite b y c hasta que no se puedan marcar más filas o columnas.

e) Se tachan las filas no marcadas y las columnas marcadas.

Paso 5: Se resta a todos los elementos sin tachar el menor de ellos. Los elementos de la parte tachada se dejan igual salvo los que están tachados dos veces, a los que se les suma ese número.

Paso 6: Volver al paso 2

5.11.2 Ejemplo de aplicación del algoritmo Húngaro

Lo vamos a aplicar al ejemplo 60 enunciado anteriormente.

Se usarán los siguientes símbolos:

x = cero tachado, $\boxed{0}$ = cero recuadrado,

xxx = fila o columna tachada, *** = fila o columna marcada.

Paso 1:

11	1	2	3	1
3	12	4	5	3
8	8	1	9	1
3	4	4	10	3
				min

→

10	0	1	2
0	9	1	2
7	7	0	8
0	1	1	7

10	0	1	2	
0	9	1	2	
7	7	0	8	
0	1	1	7	
			2	min

→

10	0	1	0
0	9	1	0
7	7	0	6
0	1	1	5

Matriz de costes reducidos:

10	0	1	0
0	9	1	0
7	7	0	6
0	1	1	5

Paso 2:

10	$\boxed{0}$ 3^o	1	0x
0x	9	1	$\boxed{0}$ 4^o
7	7	$\boxed{0}$ 1^o	6
$\boxed{0}$ 2^o	1	1	5

Como hay 4 ceros recuadrados, sus posiciones marcan la solución óptima. En este caso consiste en que la máquina 1 hace la tarea 2, la máquina 2 la tarea 4, la 3 la tarea 3 y la 4 la tarea 1. El tiempo total requerido será $1 + 5 + 1 + 3 = 10$.

Con el objeto de ilustrar el resto del algoritmo lo aplicamos a la matriz del siguiente ejemplo.

Ejemplo 61 *Hallar la solución óptima en el problema de asignación cuya matriz de costes reducidos es:*

18	*0*	*6*	*0*
0	*20*	*8*	*2*
8	*10*	*0*	*8*
0	*4*	*8*	*12*

Como ya tenemos realizado el paso 1 comenzamos el siguiente.

Paso 2

18	$\boxed{0}$ 2^o	6	0 x
$\boxed{0}$ 3^o	20	8	2
8	10	$\boxed{0}$ 1^o	8
0 x	4	8	12

Paso 4 a, b, c.

Está indicado en la tabla el orden en que se han marcado las filas y columnas.

18	$\boxed{0}$	6	0 x	
$\boxed{0}$	20	8	2	***3^o
8	10	$\boxed{0}$	8	
0 x	4	6	12	***1^o
***2^o				

Paso 4e

18	$\boxed{0}$	6	0 x	xxx
$\boxed{0}$	20	8	2	
8	10	$\boxed{0}$	8	xxx
0 x	4	8	12	
xxx				

Paso 5

20	0	6	0 x
0	18	6	0
10	10	0	8
0	2	6	10

Vuelta al paso 2.

Se indica el orden en que se han recuadrado los ceros.

20	$\boxed{0}\,4^o$	6	0 x
0 x	18	6	$\boxed{0}\,3^o$
10	10	$\boxed{0}\,1^o$	8
$\boxed{0}\,2^o$	2	6	10

Ahora hay 4 ceros recuadrados que marcan una solución óptima.

5.12 Problema de emparejamiento

Un problema de este tipo podría ser el siguiente. Disponemos de m individuos que deben realizar n tareas. Se supone que cada individuo puede realizar alguna de las tareas, pero no todas. Se pretende asignar a cada individuo una tarea de modo que se realicen el mayor número posible de tareas. Este problema se puede interpretar como un problema de transporte. Si se supone que cada individuo sólo va a realizar una tarea, las demandas son todas 1 y las disponibilidades 1. Los costos de cada celda son 1 ó 0. Un 1 significa que el individuo puede hacer esa tarea y un 0 que no puede hacerla. El problema se transforma en uno de asignación añadiendo individuos ficticios (que pueden hacer todas las tareas), o tareas ficticias (que puede hacerlas cualquier individuo).

Ejemplo 62 *Asignar 6 tareas a 5 individuos de modo que se realice el mayor número posible de tareas. Las tareas que puede realizar cada individuo están marcadas con un 1.*

	T1	*T2*	*T3*	*T4*	*T5*	*T6*
1	*1*			*1*		
2	*1*	*1*				
3				*1*		
4		*1*	*1*			*1*
5				*1*	*1*	
Ind. ficticio	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

Esta es la matriz de los costos ($c_{ij} = 1$ si el individuo i puede realizar la tarea j y es 0 en caso contrario). Realizar el mayor número de tareas es equivalente a maximizar $\sum\limits_{i,j} c_{ij}\, x_{ij}$. Para las demandas y disponibilidades se debe tomar el valor de los costes igual a 1.

En este caso el problema de transporte asociado es de maximización, que puede convertirse en uno de minimización intercambiando los ceros de los costes con 1, ya que minimizar $\sum_{i,j}(1-c_{ij})\,x_{ij}$, es equivalente a minimizar $\sum_{i,j}(-c_{ij})\,x_{ij}$ o a maximizar $\sum_{i,j} c_{ij}\,x_{ij}$ que es lo que se pretende en este caso. Esta propiedad es una aplicación inmediata del teorema 10 cuyo enunciado aparece en la página 148.

Por lo tanto, para resolver este problema usando el algoritmo húngaro cambiamos los 1 por ceros y recíprocamente, teniendo como matriz de costo reducido la siguiente, donde se ha indicado los ceros recuadrados (en el orden indicado) que conducen a la solución óptima:

$\boxed{0}$ 2º	1	1	0	1	1
0	$\boxed{0}$ 3º	1	1	1	1
1	1	1	$\boxed{0}$ 1º	1	1
1	0	$\boxed{0}$ 4º	1	1	0
1	1	1	0	$\boxed{0}$ 5º	1
0	0	0	0	0	$\boxed{0}$ 6º

Así que el individuo 1 hace la tarea 1, el individuo 2 hace la tarea 2, el individuo 3 hace la tarea 4, el individuo 4 hace la tarea 3, el individuo 5 hace la tarea 5. La tarea 6 no la realiza ninguno de los 5 individuos.

5.13 Problema de planificación de la producción

Este es otro tipo de problemas que puede resolverse por el algoritmo de transporte. Se dispone de un producto que puede producirse en n periodos de tiempo, y que puede ser inmediatamente vendido o, por el contrario, puede ser almacenado para venderlo posteriormente. En este caso se suele asignar un coste que viene justificado por el gasto de almacenaje, posible deterioro del producto, producto obsoleto o en desuso, etc.

Consideraremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 63 *Un fabricante desea planificar su producción para los cuatro meses siguientes. La producción máxima, la demanda y el gasto de producción por unidad en cada mes está resumido en la siguiente tabla.*

Mes	*Costo*	*Oferta*	*Demanda*
1º	*100*	*2000*	*900*
2º	*100*	*2500*	*2000*
3º	*200*	*4000*	*5000*
4º	*300*	*2500*	*2000*

Además cada unidad no vendida en un mes tiene un encarecimiento de 100 unidades por cada mes de almacenamiento. Elaborar un plan óptimo de producción.

En la tabla de transporte siguiente se consideran los periodos de tiempo como orígenes y destinos. Los orígenes tienen como producción la oferta del periodo y los destinos una demanda que es la que corresponde a cada periodo. Se han dividido todos los valores del problema por 100 para simplificar la escritura. En cada celda (i, j) está indicado el costo de una unidad de producto fabricado en el mes i y vendido en el mes j. No puede venderse un producto antes de ser fabricado, por este motivo las celdas correspondientes tienen asignado un coste alto (M). Se ha añadido una demanda ficticia para conseguir un problema de transporte equilibrado.

	T1	T2	T3	T4	T. Fic.	Ofer.
T1	1	2	3	4	0	20
T2	M	1	2	3	0	25
T3	M	M	2	3	0	40
T4	M	M	M	3	0	25
Dem.	9	20	50	20	11	

Una solución inicial por el método de Vogel es:

	T1	T2	T3	T4	T. Fic.	
T1	9		5	6		20
T2		20	5			25
T3			40			40
T4				14	11	25
	9	20	50	20	11	

Aplicando el algoritmo de transporte, se obtiene la tabla siguiente:

	T1	T2	T3	T4	T.Fic	u_i
T1	(9) - 1	 2	(5) + 3	(6) - 4 ⇉	1* + 0 ⇊	0
T2	-M M	(20) 1	(5) - 2	 + 3	 0	-1
T3	-M + M	1-M M	(40) 2	 - 3	 0	-1
T_4	-M M	1-M M	2-M M	(14) + 3 ⇈	(11) - 0 ⇇	-1
v_j	1	2	3	4	1	

Tomo como pivote la posición (1,5) que es la única con coste reducido positivo. Esto nos lleva a la solución:

	T1	T2	T3	T4	T. Fic.	
T1	9		5		6	20
T2		20	5			25
T3			40			40
T4				20	5	25
	9	20	50	20	11	

Los costos reducidos correspondientes a esta solución, así como los valores de u_i, v_j se dan en la siguiente tabla. Se han dejado en blanco las casillas correspondientes a la presente base (como se sabe los costos reducidos de las variables básicas son nulos).

	T1	T2	T3	T4	T. Fic.	
T1		0		-1		0
T2	$-M$			-1	-1	-1
T3	$-M$	$1-M$		-1	-1	-1
T4	$1-M$	$2-M$	$3-M$			0
	1	2	3	3	0	

La solución actual es óptima, ya que los costos reducidos son no positivos. Esta solución no es única, ya que hay una variable no básica con costo reducido nulo (la de la posición (1,2)). Introduciendo esta variable en la base pueden hallarse soluciones alternativas.

Un plan de producción óptimo, aunque no el único, se obtiene multiplicando la solución obtenida por 100 para recuperar la escala inicial de los valores:

Primer mes : fabricar 1400 unidades (las unidades correspondientes a la demanda ficticia no se fabrican). Con ellas se cubre la demanda del primer trimestre (900) y se almacena 500 unidades hasta el tercer trimestre.

Segundo mes : fabricar 2500, 2000 de ellas cubren la demanda del trimestre y 500 se guardan para el siguiente trimestre.

Tercer mes : fabricar 4000 y vender las almacenadas de los meses anteriores (500 + 500), completando la demanda que es 5000.

Cuarto mes : se fabrican 2000, que coincide con la demanda de este trimestre. No se alcanza la producción máxima, ya que hay 500 unidades asignadas a una demanda ficticia).

El coste de producción y almacenamiento con esta solución es:

$$900 \times 100 + 2000 \times 100 + 4000 \times 200 + 2000 \times 300 + 500 \times 200 + 500 \times 300 =$$

$$= 1940\,000 \quad \text{u.m.}$$

Si introducimos en la base la variable de la posición (1, 2) se obtiene la solución alternativa:

	T1	T2	T3	T4	T. Fic.	
T1	900	500			600	2000
T2		1500	1000			2500
T3			4000			4000
T4				2000	500	2500
	900	2000	5000	2000	1100	

cuyo coste es $900 \times 100 + 500 \times 200 + 1500 \times 100 + 1000 \times 200 + 4000 \times 200 + 2000 \times 300 = 1940\,000$ u.m. que, como es natural, es idéntico al anterior.

Tema 6

Modelos de Redes

6.1 Redes. Conceptos básicos

Grafo: Llamaremos *grafo* a un par $\{V, A\}$ donde V es un conjunto de elementos llamados vértices o nodos y $A \subset V \times V$ otro conjunto cuyos elementos son los arcos. Si (a, b) es un elemento de A, a se llama origen y b extremo. Así, un grafo cuyos vértices son $V = \{0, 1, 2, n\}$ y cuyos arcos son $A = \{(0,1)(0,2)(1,2)(2,1)(1,n)(2,n)\}$ puede venir representado como en la figura 6.1.

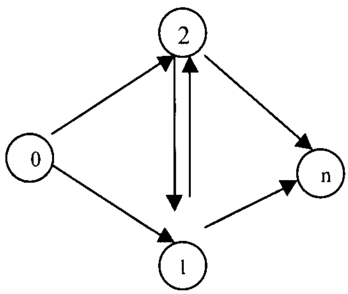


Figura 6.1: Ejemplo de un grafo.

A veces se describe un Grafo por medio de una **matriz de incidencia** que es una matriz con tantas columnas como arcos y tantas filas como elementos.

Así el mismo grafo de la figura 6.1 cuyos vértices son $V = \{0, 1, 2, n\}$ y cuyos arcos son $A = \{(0,1)\ (0,2)\ (1,2)\ (2,1)\ (1,n)\ (2,n)\}$, puede también venir expresado por medio de esta matriz de incidencia:

	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(2,1)	(1,n)	(2,n)
0	1	1	0	0	0	0
1	-1	0	1	-1	1	0
2	0	-1	-1	1	0	1
n	0	0	0	0	-1	-1

Cada celda se marca con 1 si el vértice de su fila es el origen del arco de su columna y con -1 si es el extremo. Se rellenan con ceros el resto de las celdas.

Otro tipo de matriz de incidencia más simple se construye de la forma siguiente: si existe el arco (i, j) hay un 1 en el elemento (i, j) de la matriz. En caso contrario hay un 0

	0	1	2	n
0		1	1	
1			1	1
2		1		1
n				

Una **red** es un grafo cuyos arcos tienen asociada alguna medida.

Red bilateral: es una red que admite ambas orientaciones en los arcos. En este caso los arcos se llaman *aristas*. Una red sin aristas (no admite ambas orientaciones en los arcos) se llama **Red Dirigida**. Una red con aristas puede transformarse en una red dirigida por medio de la transformación indicada en la figura 6.2.

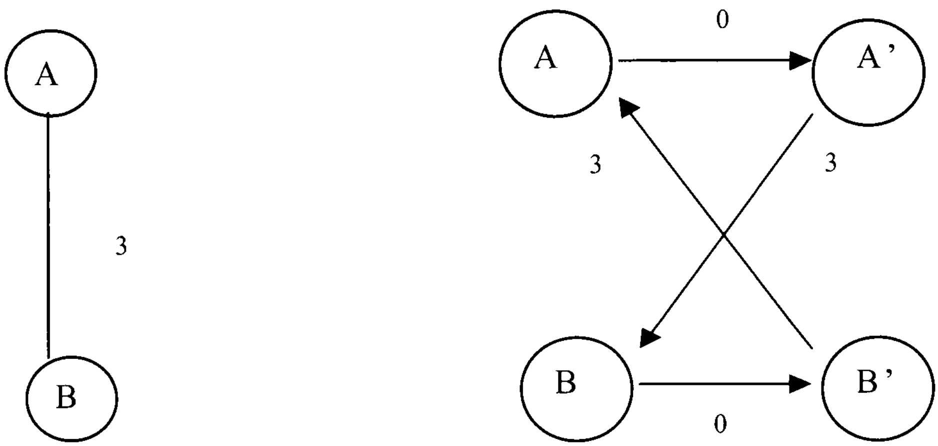


Figura 6.2: Diagrama de transformación en red dirigida.

Un vértice sin arco se llama **aislado.**

Un lazo es un arco cuyo origen y extremo coinciden.

Una cadena: es una sucesión de arcos adyacentes (arcos consecutivos que tienen en común un vértice).

Un camino o ruta es una sucesión de arcos *adyacentes* del mismo sentido (el extremo de un arco es el origen del siguiente).

Un ciclo, circuito o camino cerrado es un camino en el cual el último extremo coincide con el primer origen.

6.2 Caminos de longitud mínima

Suponemos que cada arco de la red tiene asociado un número que podría interpretarse como la distancia entre su origen y extremo, o la longitud del arco. La *longitud* de un camino es la suma de las longitudes de sus arcos. El problema de camino de longitud mínima consiste en seleccionar entre todos los caminos que unen dos nodos concretos, el camino más corto para ir de uno de los nodos al otro.

En el problema de longitud mínima, el número asociado a cada arco puede tener otras interpretaciones (tiempo, coste, etc...).

El Problema de longitud mínima puede interpretarse como un problema de transbordo de la forma expresada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 64 *Una compañía quiere enviar un pedido desde la planta de producción a un cliente. Los nodos son cruces por donde pueden circular sus camiones y los números de los arcos el coste de enviar cada camión por el trayecto representado por este arco. ¿Cuál es el camino más barato? La red asociada es la que aparece en la figura 6.3.*

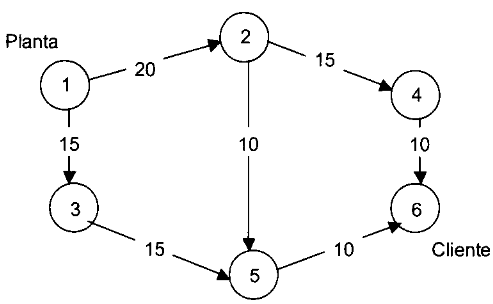


Figura 6.3: Red de distribución del ejemplo.

Con está interpretación se ve que el problema de la ruta mínima puede verse como un problema de transbordo donde hay que transportar una unidad desde la planta de producción (Origen) al cliente(Destino). Los cruces de carretera (Vértices de la red) son puntos de transbordo. En este caso la tabla inicial sería:

Nodos	2	3	4	5	6	dispon.
1	20	15	M	M	M	1
2	0	M	15	10	M	1
3	M	0	M	15	M	1
4	M	M	0	M	10	1
5	M	M	M	0	10	1
deman.	1	1	1	1	1	

Como las disponibilidades y las demandas son siempre 1 también puede interpretarse como un problema de asignación.

También puede plantearse como un problema de Programación lineal Binario:

$$\min \quad 4x_{12} + 3x_{13} + +3x_{24} + 2x_{25} + 3x_{35} + 2x_{46} + 2x_{56}$$

s.a.:

$x_{12} + x_{13} = 1$ (Sólo un arco del camino parte del vértice ORIGEN)
$x_{46} + x_{56} = 1$ (Sólo un arco del camino llega al vértice FINAL)
$x_{12} - (x_{24} + x_{25}) = 0$ (Si un arco del camino llega al nodo 2 ha de salir de él)
$x_{13} - x_{35} = 0$ (Idem nodo 3)
$x_{24} - x_{46} = 0$ (Idem nodo 4)
$(x_{25} + x_{35}) - x_{56} = 0$ (Idem nodo 5)
$x_{ij} = 0, 1$

El camino mínimo esta formado por los arcos cuyo valor en la solución sea 1. Es posible que el problema tenga varias soluciones.

6.3 Algoritmos de ordenación y de etiquetación

El algoritmo de etiquetación es un algoritmo específico para calcular el camino mínimo. Sólo es válido para redes dirigidas que no contengan ciclos.

Paso 1: Numerar los nodos en orden creciente 1, 2, 3,...., n. Sea 1 el origen y n el destino. Se debe cumplir que si un arco lleva la orientación (i, j) entonces $i < j$. Para ordenar los nodos podemos emplear el siguiente *algoritmo de ordenación*:

a) Partir del modelo más simple de matriz de incidencia.

b) Añadir una columna en la que anotamos el número de unos de la fila correspondiente, anotando en su parte inferior el nodo o nodos que tienen un cero en esta columna.

c) Se tachan en la matriz de incidencia los unos de las columnas cuyos nodos se acaban de anotar. Si todos los vértices han sido ya anotados ir al Paso 1.d. En caso contrario ir al Paso 1.b.

d) Para numerar los nodos comenzamos numerando el último que se haya anotado en la última fila, continuaremos numerando los restantes en orden inverso al que han sido anotados.

Paso 2: Poner una etiqueta a cada vértice E_i por orden ascendente de numeración del modo siguiente:

$E_1 = 0, \ \ E_j = \min(E_i + d_{ij}, \ i = 1, \ 2, ..j - 1)$

considerando sólo los arcos directamente unidos al nodo i para $j = 2, 3, ...n$.

Paso 3: E_n es la longitud del camino mínimo. Para determinar el camino se traza hacia atrás a partir del nodo n. Los arcos que lo forman son los que cumplen la fórmula de etiquetación : $E_j = E_i + d_{ij}$. Si se desea hallar caminos de longitud máxima (que sólo tiene sentido en redes acíclicas) se emplea el algoritmo anterior sin más que modificar en el paso 2 min por max, es decir:

$$E_j = \max(E_i + d_{ij}, i = 1, 2, ..j - 1).$$

Aplicamos el algoritmo de Ordenación al siguiente ejemplo:

Ejemplo 65 *Ordenar el grafo de la figura 6.4.*

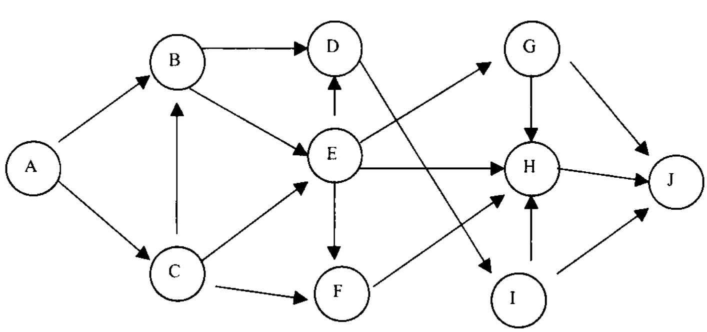


Figura 6.4: Ejemplo de algoritmo de ordenación.

La tabla de aplicación del algoritmo es la siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	nº de unos							
A		1	1								2						1	0
B				1	1						2				1	0	-	
C		1			1	1					3			2		1	0	-
D									1		1			0	-			
E				1		1	1	1			4		3	1	0	-		
F								1			1	1	0	-				
G								1		1	2	1	0	-				
H										1	1	0	-					
I								1		1	2	1	0	-				
J											0	-						
											J	H	F G I	D	E	B	C	A
											10	9	6 7 8	5	4	3	2	1

Los nodos F, G, I que están en la misma casilla pueden numerarse en distinto orden.

Por lo tanto una ordenación posible es la de la figura 6.5.

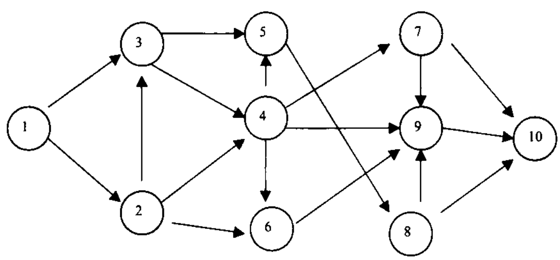


Figura 6.5: Ejemplo de grafo ordenado.

Ejemplo 66 *Hallar el camino mínimo desde el nodo 1 al 10 aplicando el algoritmo de etiquetación. La red, incluyendo las medidas de los arcos, está representada en la figura 6.6.*

Las etiquetas resultantes de aplicar el algoritmo están indicadas en cada nodo.

La longitud del camino mínimo es 11 (la etiqueta del vértice 10).

El camino mínimo es: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 10$.

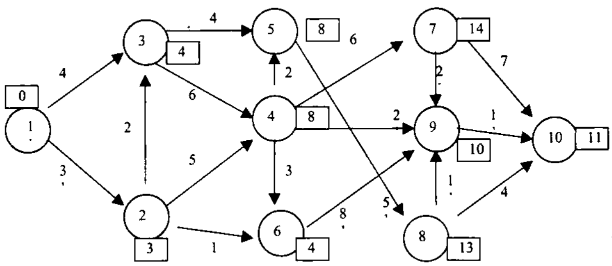


Figura 6.6: Ejemplo de Algoritmo de Etiquetación.

6.4 Algoritmo de Dijkstra

Este algoritmo es válido para redes con arcos no negativos. No necesita ser acíclica, aunque sí dirigida. Si no lo es, puede hacerse la transformación indicada en el principio del tema.

Para determinar el camino mínimo de 1 a n suponiendo que 1 es el origen y n el destino, podemos usar el siguiente algoritmo de Dijkstra:

Paso1

Asignamos al vértice 1 (origen de camino) una etiqueta permanente igual a 0.

Paso 2

Asignamos a los otros vértices etiquetas temporales igual a su distancia directa a 1, si existe el arco directo desde el vértice a 1. Si no es así, le asignamos la etiqueta temporal ∞.

Paso 3

Elegir como permanente la mínima de las etiquetas temporales. Si hay varias que coincidan, elegir una de ellas arbitrariamente.

Paso 4

Sea j el vértice que ha recibido etiqueta permanente en el paso anterior. La nueva etiqueta temporal de los vértices que no la tengan permanente, es el mínimo entre la anterior etiqueta temporal y la suma de la etiqueta permanente del vértice j más la distancia directa del vértice en consideración al vértice j, si existe arco directo. Si no es así, se mantiene la anterior.

Paso 5

Hacer permanente la mínima de todas las etiquetas temporales. Si hay varias iguales elegir una de ellas arbitrariamente. Si la última etiqueta permanente es la n, parar. En otro caso, volver al paso 4.

La etiqueta de n es la distancia mínima. Para localizar el camino se parte del vértice n y se resta su etiqueta de las distancia de los arcos que confluyen en n. Cuando esta diferencia coincide con la etiqueta anterior, éste es el vértice precedente en el camino mínimo. Aplicar esta condición sucesivamente hasta alcanzar el origen.

Ejemplo 67 *Dada la red representada en la figura 6.7. Hallar el camino mínimo desde el nodo 0 al 5 y la longitud de este camino.*

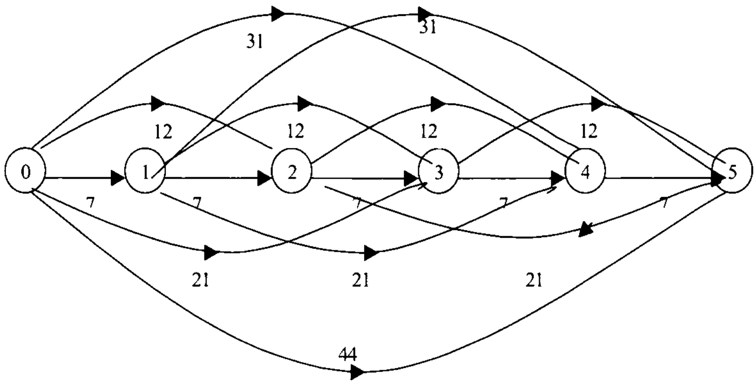


Figura 6.7: Ejemplo de camino mínimo.

En las siguientes tablas se registran los pasos del algoritmo de Dijkstra, indicando con * la etiqueta temporal y con $\square$ la etiqueta permanente de cada vértice.

	1	2	3	4	5	
0	7	12	21	31	44	
1		7	12	21	31	
2			7	12	21	
3				7	12	
4					7	

Etiquetas	$\boxed{7}$	$12*$	$21*$	$31*$	$44*$	
	$\boxed{7}$	$12*, 14$	$21, 19*$	$31, 28*$	$44, 38*$	
	$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	$19*, 19$	$28, 24*$	$38, 33*$	
	$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	$\boxed{19}$	$24*, 26$	$33, 31*$	
	$\boxed{7}$	$\boxed{12}$	$\boxed{19}$	$\boxed{24}$	$31, 31*$	
	$\boxed{7}*$	$\boxed{12}*$	$\boxed{19}*$	$\boxed{24}*$	$\boxed{31}*$	

Como podemos observar, 31 es la distancia mínima entre los nodos 0 y 5, que en este caso se interpreta como gasto mínimo.

En lo que sigue, esquematizamos los pasos que se siguen para obtener el camino mínimo.

En este caso el problema tiene varias soluciones.

vértice 5 $(31 - 7 = 24)$, vértice 4 , $(24 - 12 = 12)$,

vértice 2, $(12 - 12 = 0)$, vértice 0

Camino obtenido $0 \to 2 \to 4 \to 5$. **Longitud**: $12 + 12 + 7 = 31$.

vértice 5 $(31 - 12 = 19)$, vértice 3 $(19 - 7 = 12)$,

vértice 2 $(12 - 12 = 0)$ vértice 0

Camino $0 \to 2 \to 3 \to 5$. **Longitud**: $12 + 12 + 7 = 31$.

vértice 5 $(31 - 12 = 19)$, vértice 3 $(19 - 12 = 7)$,

vértice 1 $(7 - 7 = 0)$ vértice 0

Camino $0 \to 1 \to 3 \to 5$. **Longitud**: $12 + 12 + 7 = 31$.

6.5 Problema del flujo máximo

En este problema los arcos tienen asignados números que significan la cantidad máxima de producto que puede enviarse a través de él desde uno de los nodos (nodo *fuente*) a otro que denominamos *sumidero*. Este valor, que se asigna a cada arco, se denomina *capacidad* del arco.

Ejemplo 68 *En la red de la figura 6.8, deseamos calcular el flujo máximo que puede enviarse de F a S.*

Para formular este problema como un problema de programación lineal, tomamos como variables el flujo que debe pasar por cada arco. Creamos el arco ficticio a = (S,F) de capacidad ilimitada. Llamamos x_{n0} el flujo que pasa por a. Queremos maximizar la cantidad de flujo que pase por el arco ficticio a.

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_{n0} \\
s.a.: & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{ij} \leq a_{ij} \ \text{(El flujo de un arco no puede exceder su capacidad)} \\ \sum\limits_{i,} x_{il} - \sum\limits_{j} x_{lj} = 0. \ \forall l \ \text{(El flujo que entra en cada nodo es igual al que sale)} \end{array} \right.
\end{array}
$$

En nuestro problema el planteamiento sería

$$\max z = x_{no}$$

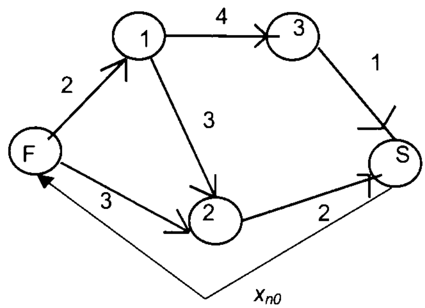


Figura 6.8: Ejemplo de flujo máximo.

$$
\text{s.a.:}\begin{cases} x_{01} \ \leq 2,\ x_{02} \ \leq 3,\ x_{13} \ \leq 4,\ x_{12} \ \leq 3,\ x_{2n} \ \leq 2,\ x_{3n} \ \leq 1 \\ x_{no} - (x_{01} + x_{02}) = 0 \\ x_{01} - (x_{13} + x_{12}) = 0 \\ x_{12} + x_{o2} - x_{2n} = 0 \\ x_{13} - x_{3n} = 0 \\ x_{3n} + x_{2n} - x_{no} = 0 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}
$$

La solución óptima es $z = 3$ con $x_{01} = 2$, $x_{13} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{02} = 1$, $x_{3n} = 1$, $x_{2n} = 2$, $x_{n0} = 3$.

El problema admite otras soluciones óptimas.

El problema de emparejamiento puede interpretarse como un problema de flujo máximo. Veamos cómo se puede conseguir un problema de flujo máximo equivalente al problema de emparejamiento del tema anterior:

Ejemplo 69 *Asignar 6 tareas a 5 individuos de modo que se realice el mayor número posible de tareas. Las tareas que puede realizar cada individuo están marcadas con un 1.*

	T1	*T2*	*T3*	*T4*	*T5*	*T6*
1	*1*			*1*		
2	*1*	*1*				
3				*1*		
4		*1*	*1*			*1*
5				*1*	*1*	
Ind. ficticio	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*

El grafo correspondiente es el de la figura 6.9.

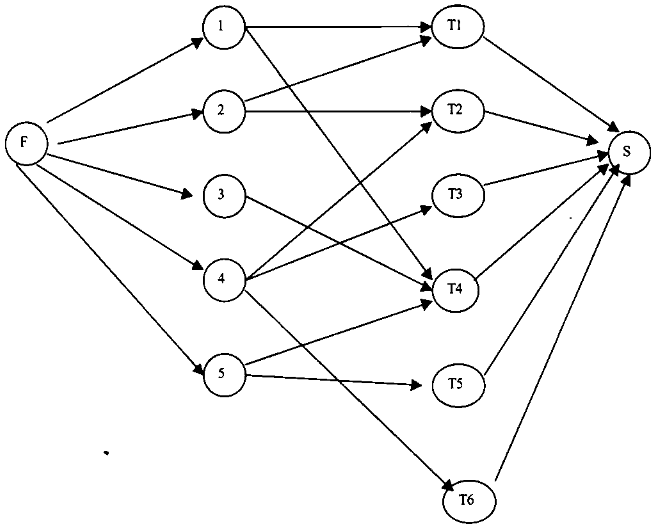


Figura 6.9: Grafo del problema de emparejamiento.

Todos los arcos tienen 1 de capacidad. El problema consiste en enviar la mayor cantidad de flujo de la fuente al sumidero.

6.6 Algoritmo de Ford-Fulkerson

6.6.1 Flujo de un corte

Si consideramos una partición (X, X') en el conjunto de los vértices de la red de modo que la fuente pertenece a X y el sumidero a X' llamamos **corte** al conjunto de los arcos que unen un vértice de X con uno de X'.

Se define **flujo de X a X'**, $f(X, X')$, como la suma de los flujos de los arcos que tienen su origen en X y su extremo en X'.

Se define **capacidad del corte**, $q(X, X')$, como la suma de las capacidades de los arcos que tienen su origen en X y su extremo en X'.

Se cumplen las propiedades siguientes:

Teorema 11 *El flujo desde la fuente al sumidero para cualquier solución factible es menor o igual que la capacidad de cualquier corte.*

Teorema 12 (de Ford Fulkerson) *El flujo máximo coincide con la capacidad del* *corte que tenga menor capacidad.*

6.6.2 Algoritmo de Ford-Fulkerson

Dada una solución factible del problema de flujo máximo se definen como **arcos A** los arcos no saturados (que no aprovechan al máximo su capacidad y podrían tomar valores más altos) y como **arcos D** los arcos cuyo flujo es positivo (por lo tanto pueden tomar valores más bajos).

El Algoritmo de Ford-Fulkerson consiste en:

Paso 0

Obtener una solución factible. Se puede comenzar poniendo todos los flujos x_{ij}=0. Es preferible comenzar con una solución mejor que se puede conseguir recorriendo caminos y asignando el flujo máximo permitido a sus arcos (los arcos saturados no intervendrán en nuevos caminos a los efectos de formar esta solución inicial).

Paso 1

Señalar los arcos con A y/o D según la regla anterior. Etiquetar la fuente con la etiqueta (+0).

Paso 2

Etiquetar los nodos de la forma siguiente:

Si el arco (i, j) es miembro de A, el nodo i tiene etiqueta y el nodo j no la tiene, etiquetar el nodo j con $+i$ (arco directo).

Si el arco (i, j) es miembro de D, el nodo j tiene etiqueta y el nodo i no la tiene, etiquetar el nodo i con $-j$ (arco inverso).

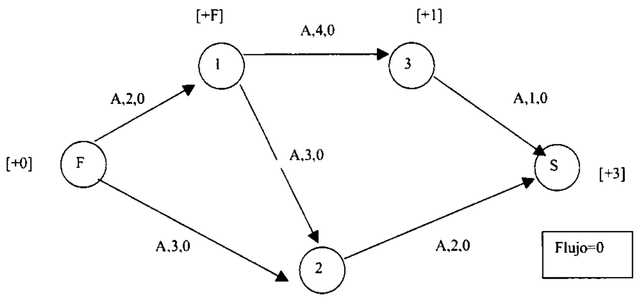
Continuar así hasta que se etiquete el sumidero o no haya más vértices sin etiqueta. Si no se puede alcanzar el sumidero la presente solución es óptima. En caso contrario ir al paso 3.

Paso 3

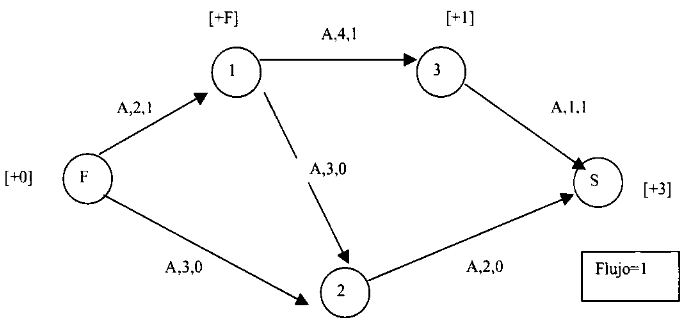
Si se ha alcanzado el sumidero, tendremos una cadena etiquetada. Mejoramos la solución anterior del modo siguiente: Calculamos para cada arco directo de la cadena marcada la cantidad $(a_{ij} - x_{ij})$ en que el flujo puede ser aumentado y para los arcos inversos la cantidad en que puede disminuir que es x_{ij}. Sea k el mínimo de todas estas cantidades asignadas a los arcos de la cadena. Sumamos k al flujo de los arcos directos y se lo restamos al flujo de los arcos inversos teniendo una nueva solución factible que mejora la anterior. Volver al paso 1 con esta nueva solución.

Resolvemos ahora el ejemplo de la figura siguiente con este algoritmo.

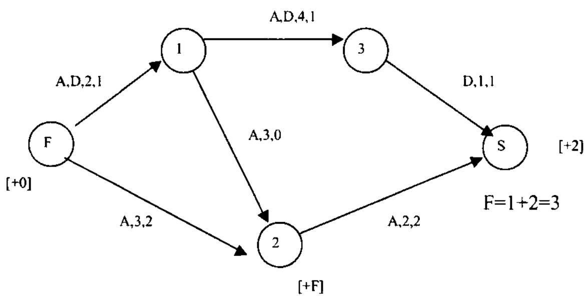
Partimos de una solución en que todos los flujos son nulos. En el grafo vienen marcados los arcos A y D, y se han puesto las etiquetas que marcan el camino $F \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow S$.



En este camino todos los arcos pueden aumentarse en 1. Por tanto, obtenemos la solución de la figura mejorada con flujo 1.

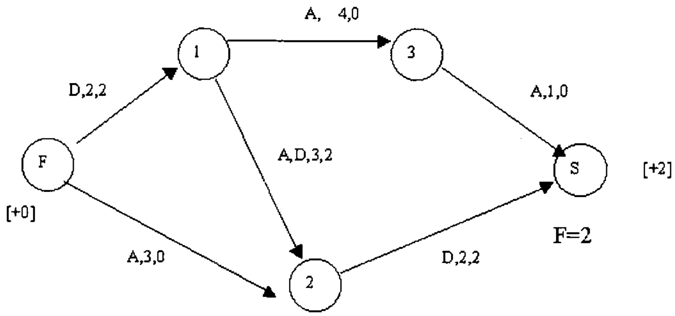


Ahora se procede a marcar el camino $F \longrightarrow 2 \longrightarrow S$. Por este camino se pueden enviar 2 unidades como máximo. Por lo tanto el flujo permitido que se puede aumentar en este camino es de 2 unidades y como consecuencia el flujo total es ahora 3.

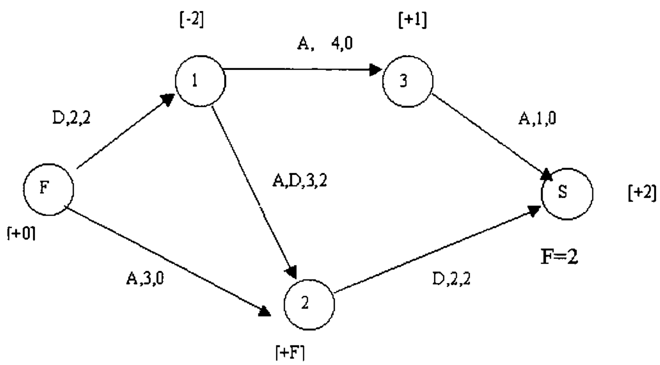


Si empleamos de nuevo el algoritmo veremos que ya no se puede alcanzar el sumidero, puesto que el corte $X = \{F, 1, 2, 3\}, X' = \{S\}$ tiene una capacidad 3, así que el flujo no puede ser superior a 3. Tenemos la solución óptima indicada en la figura anterior.

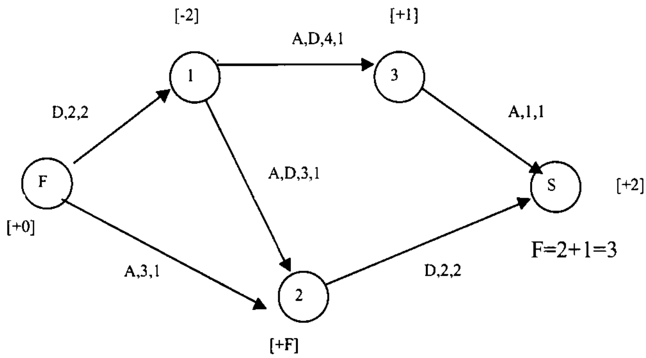
Hacemos ahora el problema de otra forma para mostrar un ejemplo del uso de arcos inversos. Partimos de la solución de la figura:



Marcamos ahora la cadena $F \longmapsto 2 \longleftarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow S$.



En la cadena marcada podemos añadir 1 en los arcos directos y restar 1 en los inversos. Una vez modificados los flujos de la cadena marcada con las etiquetas obtenemos una solución mejorada que es otra solución óptima:



6.7 CPM y PERT

Los modelos de redes pueden servir para esquematizar y ayudar en la resolución de problemas complejos que requieren un gran número de actividades, y que se caracterizan porque para realizar algunas de ellas tienen que haber sido realizadas otras (que llamaremos actividades precedentes o predecesoras). Si se conoce con certeza la duración de estas actividades se usa el procedimiento CPM (Critical Path Method). Si la duración de ejecución de las actividades no es conocida con certeza, el método PERT (Program Evaluation and Review Technique) nos dará la probabilidad de que el proyecto sea realizado en un cierto tiempo. Ambos métodos fueron empleados en 1950 en relación con el desarrollo de los misiles Polaris. Gracias a estos, el proyecto se concluyó dos años antes de lo que en principio se había estimado.

Para aplicar uno de estos métodos se requiere conocer la lista de las actividades que forman el proyecto. Un proyecto está terminado cuando lo están todas sus actividades. Para cada actividad hay un conjunto de actividades (sus predecesoras) que deben ser completadas antes que la actividad considerada comience. Las redes se utilizan para representar la relación de precedencia entre las actividades. En este caso, los arcos representan las actividades. Los nodos indican el comienzo de las actividades que tienen en él su origen y la terminación de las actividades que lo tienen por extremo.

Las redes de proyectos han de cumplir las normas siguientes:

1. Debe haber un nodo inicial (1) que representa el comienzo del proyecto. Los arcos que parten del nodo 1 representan las actividades que no tienen predecesoras.

2. Debe haber un nodo final (n) que representa la terminación del proyecto.

3. La numeración de los nodos debe cumplir la condición de que el nodo que representa el fin de una actividad debe ser nombrado con un número mayor que el que representa su inicio.

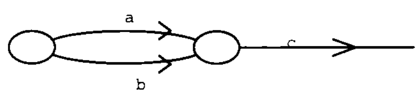
4. Cada actividad estará representada en la red por un solo arco.

5. Dos nodos no pueden ser conectados por más de un arco.

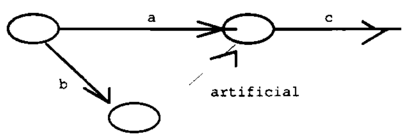
Para respetar las reglas 4 y 5 a veces es necesario utilizar actividades ficticias con duración 0.

Un ejemplo de aplicación de estas normas:

Si las actividades A y B comienzan al mismo tiempo y ambas preceden a C no se representa en la forma:



sino de la forma:

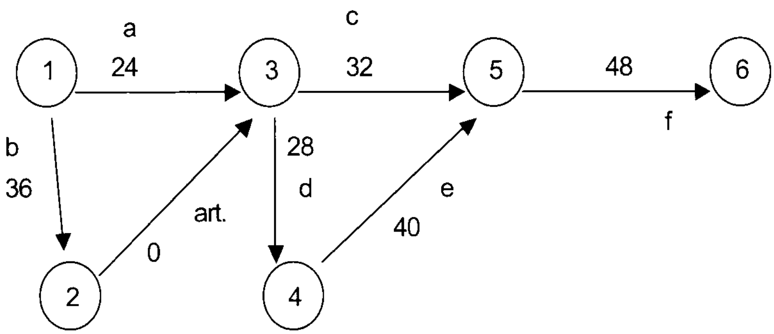


para cumplir la regla 5.

Ejemplo 70 (C.P.M) *Para un cierto producto se requieren dos componentes y un cierto número de trabajadores y materiales. Uno de estos componentes requiere un cierto tiempo de secado antes de ser montado para componer el producto final. En la siguiente relación están indicadas las actividades, su duración y las actividades que la preceden inmediatamente.*

Actividades	*Predecesoras*	*Duración*
a = contratar trabajadores	-	*24*
b = conseguir el material	-	*36*
c = producir el componente 1	*a,b*	*32*
d = producir el componente 2	*a,b*	*28*
e = tiempo de secado del componente 2	*d*	*40*
f = ensamblar ambos componentes	*c,e*	*48*

Una representación del problema se da en la siguiente red.



Red del proyecto.

6.7.1 Algoritmo CPM

Para el algoritmo de CPM definimos para cada actividad los tiempos siguientes:

PC = lo más pronto que puede comenzar.

PT = lo más pronto que puede terminarse.

TC = lo más tarde que puede comenzar sin que se retrase el fin del proyecto.

TT = lo más tarde que puede terminar sin que se retrase el fin del proyecto.

El algoritmo consta de los pasos siguientes:

Paso 1: Comenzando con las actividades que parten del origen tomamos $PC = 0$ y $PT = su\ duración$.

Paso 2: Proceder del modo siguiente con las demás actividades. Su valor PC es el mayor PT de las actividades precedentes. Su valor PT es igual a la suma de su duración más su valor PC. Cuando todas las actividades tengan PC y PT ir al paso 3.

Paso 3: Comenzar con las actividades que terminen en el fin del proyecto. TT es el mayor PT obtenido en el paso anterior y $TC = TT -\ su\ duración$.

Paso 4: Proceder de la siguiente forma con las actividades anteriores siguiendo un orden decreciente. Su valor TT es el menor TC de las actividades que le siguen. Su valor $TC = TT$ – *duración de la actividad*. Cuando todas las actividades estén etiquetadas ir al paso 5.

Paso 5: Las actividades con $PT = TT$ forman el Camino Crítico (son las actividades que no pueden sufrir retrasos ni adelantos sin que afecte al tiempo de conclusión del proyecto). El resto de las actividades tienen holgura ($holgura = PT - TT$), y pueden adelantarse o retrasarse en el valor de la holgura sin afectar al tiempo global de ejecución del proyecto.

Resolución del ejemplo usando el presente algoritmo:

Actividades	Pred. y Dur.	PC	PT	TT	TC	Holgura
a = contratar trabajadores	- 24	0	24	36	12	12
b = conseguir el material	- 36	0	36	36	0	0
artificial	b 0	36	36	36	36	0
c = producir el componente 1	a,b 32	36	68	104	72	36
d = producir el componente 2	a,art 28	36	64	64	36	0
e = control calidad componente 2	d 40	64	104	104	64	0
f = ensamblar componentes	c,e 48	104	152	152	104	0

Las actividades que forman el camino crítico son las que tienen holgura nula. Por lo tanto este camino es: $b \to act.\ ficticia \to d \to e \to f$. Las actividades a y c pueden retrasarse como máximo en el valor dado por su holgura. La longitud de este camino es 152 (tiempo mínimo necesario para terminar el proyecto).

Obsérvese que el camino crítico es el camino más largo que podemos recorrer para ir del inicio (nodo 1) al fin del proyecto (nodo 6).

Este problema puede también resolverse por programación lineal. Sea t_j el valor PC de las actividades que parten de j (la hora en la que se han terminado todas las actividades que terminan en el nodo j) y t_1 la hora en que se comienza a ejecutar el proyecto. El problema se plantearía como:

$$min \quad Z = t_6 - t_1$$

$$s.a: \begin{cases} t_3 - t_1 \geq 24, \quad t_2 - t_1 \geq 36, \quad t_5 - t_3 \geq 32, \quad t_4 - t_3 \geq 28 \\ \qquad t_5 - t_4 \geq 40, t_6 - t_5 \geq 48, \quad t_3 - t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Todas las variables sin restricciones de signo.

Otra opción sería tomar el origen en $t_1 = 0$ y todas las variables no negativas.

6.7.2 El método Pert

El algoritmo CPM supone que la duración de cada actividad es conocida con exactitud. Por lo general sólo es posible realizar algunas estimaciones sobre la duración de las actividades. Se supone que los tiempos de ejecución de las actividades es una variable aleatoria (T_{ij}) que sigue una distribución Beta. Para usar este algoritmo se parte de tres estimaciones del tiempo empleado en realizar cada una de las actividades:

a = duración de la actividad en las condiciones más favorables.

b = duración en las condiciones más desfavorables.

m = duración más probable (la moda).

Bajo la hipótesis de que la duración de las actividades siga una distribución Beta la media y varianza de la variable aleatoria tiempo de duración de cada actividad, T_{ij}, es:

$$E(T_{ij}) = \frac{a+4m+b}{6} \quad \text{var}(T_{ij}) = \frac{(b-a)^2}{36}.$$

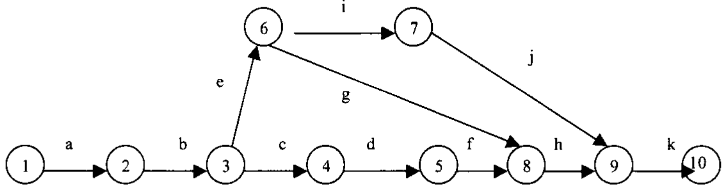
Suponiendo que las duraciones de las distintas actividades son v. a. independientes, la media y la varianza del tiempo requerido para realizar el proyecto completo está dado por las sumas de las de las correspondientes a las actividades críticas (suponiendo que las fluctuaciones aleatorias en el tiempo de ejecución de las actividades no afecten al establecimiento de las actividades que son críticas). Si, además, el problema tiene un gran número de actividades se puede considerar que el tiempo total empleado en la ejecución de las actividades que forman el camino crítico es una variable aleatoria que se distribuye normalmente, y por tanto se puede hallar la probabilidad de que la duración del proyecto esté dentro de un intervalo dado.

Ejemplo 71 *Un proyecto se compone de las actividades a, b, c, d, e, f, g, h, i, j y k. Las relaciones entre las actividades son:* $a < b$, $b < c$, $c < d$, $b < e$, $d < f$, $e < g$, $f, g < h$, $e < i$, $i < j$, $h, j < k$. *De cada actividad se han obtenido tres estimaciones sobre su duración en semanas:*

Actividad	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
t_o	1	1	3	4	2	1	0.5	5	2	1	1
t_m	2	1.5	5	6	4	1.5	1	6	3	1.5	1
t_p	4	3	10	11	6	3	2	9	4	2	2

1. *Dibujar la red del proyecto.*
2. *Hallar el camino crítico, la esperanza y la varianza de la duración del proyecto.*
3. *Si sólo se dispone de 21 semanas, ¿cuál es la probabilidad de terminar el proyecto?*
4. *¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en no más de tres semanas después del tiempo esperado?*
5. *¿De cuánto tiempo se debería disponer de manera que la probabilidad de terminar el proyecto fuera del* 90%*?*

1.



2. $t_a = \dfrac{1+4\times 2+4}{6} = 2.1667;\ \ t_b = \dfrac{1+4\times 1.5+3}{6} = 1.6667;$

   $t_c = \dfrac{3+4\times 5+10}{6} = 5.5,\ \ t_d = \dfrac{4+4\times 6+11}{6} = 6.5;$

   $t_e = \dfrac{2+4\times 4+6}{6} = 4.0;\ \ t_f = \dfrac{1+4\times 1.5+3}{6} = 1.6667$

   $t_g = \dfrac{0.5+4\times 1+2}{6} = 1.0833;\ \ t_h = \dfrac{5+4\times 6+9}{6} = 6.3333,$

   $t_i = \dfrac{2+4\times 3+4}{6} = 3.0;\ \ t_j = \dfrac{1+4\times 1.5+2}{6} = 1.5,$

   $t_k = \dfrac{1+4\times 1+2}{6} = 1.1667.$

   Puede hallarse el camino más largo. Las etiquetas que corresponden a los nodos son:

   $E(1) = 0,\ \ E(2) = 2.16,\ \ E(3) = 3.83,\ \ E(4) = 9.33,$

   $E(5) = 7.83,\ \ E(6) = 15.83,\ \ E(7) = 17.43,$

   $E(8) = 10.83,\ \ E(9) = 23.73,\ \ E(10) = 24.89$

   $2.1667 + 1.6667 + 5.5 + 6.5 + 1.6667 + 6.3333 + 1.1667 = 25.0$

   El camino crítico es $a \to b \to c \to d \to f \to h \to k$.

   La esperanza de la duración total del proyecto sería la suma de las esperanzas de los arcos del camino crítico (25), siempre que las fluctuaciones en la duración de las actividades no afecten a la selección de las actividades críticas. En este caso el número de actividades es demasiado pequeño para que la aproximación normal sea aplicable. No obstante, supondremos que ésto es así para poder ilustrar el método con un ejemplo que no precise de muchos datos.

   La esperanza del proyecto es 25. Calculamos ahora su varianza:

   $Varianza = Va + Vb + Vc + Vd + Vf + Vh + Vk =$

   $= \frac{(4-1)^2}{36} + \frac{(3-1)^2}{36} + \frac{(10-3)^2}{36} + \frac{(11-4)^2}{36} + \frac{(3-1)^2}{36} + \frac{(9-5)^2}{36} + \frac{(2-1)^2}{36} = 3.6667.$

   La desviación típica es $\sqrt{3.6667} = 1.9149$.

3. La probabilidad de acabar el proyecto en 21 días es:

   $P(T_p \le 21) = P(\frac{T_p-25}{1.9149} \le \frac{21-25}{1.9149}) = P(z \le \frac{21-25}{1.9149}) =$

   $= P(z \le -2.0889) = 0.018.$

4. La probabilidad de que no se demore más de 3 semanas sobre el tiempo previsto por la media es:

   $P(T_p \le 28) = 0.9414.$

5. $P(T_p \le D) = 0.9 \Longrightarrow D = 27.454$

   Se debe disponer aproximadamente de 27 semanas y media.

Dificultades de aplicación del método PERT

Algunas objeciones pueden hacerse al método Pert:

a) Que la duración de las actividades no suelen ser independientes.

b) Que los tiempos de duración de las actividades quizás no sigan distribuciones Beta.

c) Que el camino crítico no siempre será el mismo (puede verse afectado por los cambios en la duración real de las actividades).

Algunas de estas dificultades se solucionan realizando una gran cantidad de simulaciones de la ejecución del proyecto por el método Montecarlo y estimando la probabilidad pedida a partir de los resultados obtenidos en estas simulaciones (proporción de simulaciones con un tiempo de terminación menor que uno prefijado).

Tema 7

Programación Entera

7.1 Introducción

Un problema de **Programación entera Pura** (PE) es un problema de Programación Lineal (PL) que ha de tener soluciones enteras. Si sólo algunas de las variables han de tomar valores enteros, el problema es de **Programación entera mixta**. Algunos de estos problemas sólo admiten como soluciones los valores 0,1. Estos problemas se suelen llamar Problemas de **programación entera 0-1.**

La relajación de un problema de Programación Entera se obtiene suprimiendo las condiciones de que las variables sean enteras.

Se cumplen las siguientes propiedades:

a) La región factible de un PE está contenida en la región factible de su relajación.

b) La solución óptima de un PE (con objetivo de maximización) es menor que la solución óptima de su relajación.

c) Similarmente, la solución óptima de un PE (con objetivo de minimización) es mayor que la solución óptima de su relajación.

A continuación mostramos con un ejemplo que la solución del problema relajado puede no ser una buena aproximación de la solución entera del problema de programación entera correspondiente.

Ejemplo 72 *Resolver el problema de programación entera siguiente:*

$$max \quad z = 10\,x_1 + 33\,x_2,$$

$$s.a: \quad x_1 + 3.2x_2 \leq 7, \quad x_1, x_2 \geq 0 \ \ y \ \ enteras.$$

Resolviendo el problema relajado se obtiene la solución

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.1875, \quad \text{con} \quad z = 72.1875$$

La solución por redondeo sería (0, 2), con valor 66 para la función objetivo, que no es óptima, ya que puede comprobarse que $(7, 0)$ es una solución factible para el problema entero y su valor para la función objetivo es $z = 70$ que es mejor que 66. Puede también desecharse la aproximación por exceso $(0, 3)$ ya que no es solución factible.

No obstante, si la solución del problema relajado fuese entera ésta sería obviamente la solución óptima del problema de programación entera.

7.2 Algunos problemas de programación entera

7.2.1 El problema de la mochila

Ejemplo 73 *El peso máximo que puede entrar en una mochila es de 28 Kg. Podemos elegir los objetos siguientes con los pesos y utilidad descrita en la tabla:*

objeto	*peso*	*utilidad*
1	*11*	*8*
2	*13*	*11*
3	*9*	*6*
4	*5*	*4*

Elegir los objetos para obtener máxima utilidad.

El planteamiento del problema sería

$max: 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$

$s.a: 11x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 5x_4 \leq 14,$

$x_i \in \{0,\ 1\}$

Con el mismo planteamiento se haría el problema siguiente:

Ejemplo 74 *Se está considerando invertir en 4 negocios, descritos de la forma siguiente:*

tipo de negocio	*inversión*	*ganancia*
1	*11*	*8*
2	*13*	*11*
3	*9*	*6*
4	*5*	*4*

Si sólo disponemos de 14 millones ¿En qué negocios debemos invertir para que la ganancia sea máxima?

El problema de la mochila es un problema de programación 0,1 con una única restricción.

7.2.2 Problema del viajante

Ejemplo 75 *Un viajante tiene que visitar n ciudades sólo una vez y volver a su ciudad de origen. El orden en que se visiten las ciudades no es relevante. El objetivo es minimizar la distancia total recorrida.*

Las variables pueden ser x_{ij} con valor 1 si viaja de i a j y 0 si no viaja por este trayecto, c_{ij} es la distancia entre la ciudad i y la ciudad j y n es el número total de ciudades que han de visitarse. El planteamiento del problema podría ser:

$$\begin{array}{l} min \quad \sum c_{ij} x_{ij} \\ sa : \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1,n} x_{ij} = 1 \quad \forall \, i \\ \sum\limits_{i=1,n} x_{ij} = 1 \quad \forall \, j \end{array} \right. \\ x_{ij} = 0, 1 \end{array}$$

con $c_{ii} = M$ para evitar $x_{ii} = 1$.

Las primeras n ecuaciones indican que desde cada ciudad i viaja a una única ciudad.

Las segundas n restricciones indican que cada ciudad se alcanza sólo una vez. Pero este planteamiento admite soluciones de subrutas separadas (ver ejemplo 76). Por este motivo no se puede resolver por asignación ya que hay que imponer nuevas condiciones para eliminar ciertas soluciones que serían validas para un problema de asignación pero no para el del viajante. Las restricciones que se han de añadir para evitar obtener una solución con subrutas separadas pueden ser:

$$u_i - u_j + nxij \leq n - 1, \quad i, j = 2, 3, 4.., n, \quad i \neq j, \; u_i, \; u_j \; \geq 0 \tag{7.1}$$

Ejemplo 76 *Comprobar que si las ciudades son 1, 2, 3, 4, la solución* $x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = 1$ *con las restantes incógnitas nulas que está representada en la gráfica de la figura 7.1 no es factible para el problema del viajante.*

En efecto, la subruta de la derecha, no cumple las condiciones de las inecuaciones 7.1.

Las ecuaciones que corresponden a los arcos son:

$u_3 - u_4 + 4x_{34} \leq 3$ y $u_4 - u_3 + 4x_{43} \leq 3$. Sumando ambas inecuaciones se obtiene $4x_{34} + 4x_{43} \leq 6$. Como ambas incógnitas toman el valor 1, obtengo $8 \leq 6$. Por lo tanto esta solución no sería factible para el problema del viajante.

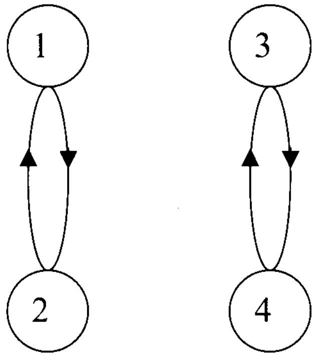


Figura 7.1: Grafo de subrutas separadas.

7.2.3 Problema de costo fijo

Ejemplo 77 *Un artesano fabrica tres tipos de productos de piel: monederos, bolsos y zapatos. Para realizar estos productos necesita alquilar maquinaria adecuada. Para hacer monederos debe alquilar una máquina que supone un gasto de 200 euros por semana, para hacer bolsos una máquina por 150 euros por semana y para los zapatos el gasto en maquinaria es de 100 euros por semana. El tiempo y la piel empleada en cada tipo de producto viene dada por la tabla:*

	costo	*precio de venta*	*horas de trabajo*	*piel empleada*
monederos	*4*	*8*	*2*	*3*
bolsos	*10*	*20*	*3*	*4*
zapatos	*8*	*15*	*6*	*5*

Dispone de 140 horas de trabajo y de 160 metros cuadrados de piel. Se pretende maximizar los beneficios semanales.

Se llaman costes fijos a los costes de alquiler de maquinaria. Estos costes no dependen del número de productos de cada tipo que se fabriquen, sino del hecho que se fabrique o no el producto que precisa cada tipo de máquina.

Tomamos como variables x_i e y_i. Las variables x_i indican el numero de productos de cada clase que se fabrican. Las variables y_i toman el valor 1 si se fabrican productos de la clase i, (en este caso es necesario alquilar la maquinaria correspondiente) y toman el valor 0 si no se fabrican (no es preciso alquilar la maquinaria correspondiente).

El planteamiento de este problema puede ser:

$Max \quad (8x_1 + 20x_2 + 15x_3) - (4x_1 + 10x_2 + 8x_3) - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3)$

sujeto a:

$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 140$

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 160$

x_i enteros $y_i \in \{0,\ 1\}$.

Además hay que añadir una restricción que garantice que se alquile la maquinaria necesaria para cada tipo de producto que se fabrique, es decir que siempre que x_i sea mayor que 0, y_i ha de ser 1. Con este objeto añadimos las restricciones:

$x_i \leq M_i y_i$, donde M_i es un número positivo suficientemente grande.

7.3 El algoritmo de ramificación y acotación

Si el problema entero tiene una región factible acotada el número de soluciones posibles es finito, así que existe la posibilidad de explorar uno a uno cada punto. Pero este procedimiento, aparte de ser poco eficiente, no es aplicable si la región factible no fuera acotada. Un método de resolución de los problemas de programación Entera es el algoritmo de Ramificación y Acotación que básicamente opera dividiendo la región factible en zonas, y excluyendo las zonas donde no puede estar la solución. Una propiedad que hay que tener en cuenta al aplicar este algoritmo es que si el problema relajado tiene soluciones enteras, ésta será también solución del PE.

Explicaremos el algoritmo de ramificación aplicándolo al ejemplo siguiente:

Ejemplo 78 *Resolver el problema de programación lineal entera*

$$\begin{array}{rc} \max & z = 5x_1 + 6x_2 \\ sa: & 10x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \ y \ enteras \end{array}$$

En primer lugar resolvemos el problema relajado. En este caso el problema relajado es:

Problema 1

$$\begin{array}{rc} \max & z = 5x_1 + 6x_2 \\ sa: & 10x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La solución de este problema es $x_1 = \frac{17}{4}$, $x_2 = \frac{19}{6}$, $z = 40.25$.

La región factible de este problema es la de la figura 7.2.

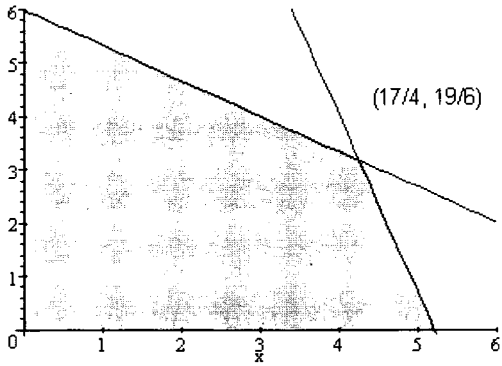


Figura 7.2: Región factible del problema relajado.

Elegimos una variable con solución no entera. Sea ésta la variable $x_1 = \frac{17}{4} = 4.25$. Consideremos los dos valores enteros más cercanos a esta solución (4 y 5). Dividimos la región factible en tres partes correspondiente a las regiones $x_1 \leq 4$, $4 < x_1 < 5$ y $x_1 \geq 5$. La región intermedia, que corresponde a $4 < x_1 < 5$. no ha de considerarse puesto que no puede contener ningún punto con x_1 entera. **Ramificar** un problema quiere decir dividir su región factible en partes y hallar la solución de cada una de las partes. Como una de las regiones no contiene soluciones factibles solamente tenemos que resolver los dos subproblemas siguientes:

$$\begin{array}{llcll}
 & \textbf{Problema 2} & & & \textbf{Problema 3} \\
\max & z = 5x_1 + 6x_2 & & \max & z = 5x_1 + 6x_2 \\
sa: & 10x_1 + 3x_2 \leq 52 & & sa: & 10x_1 + 3x_2 \leq 52 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 & y & & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\
 & x_1 \leq 4 & & & x_1 \geq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}$$

La región factible de estos dos subproblemas está representada en la figura 7.3.

La solución del problema primitivo será la mayor de las soluciones de los dos problemas en que hemos ramificado[1].

Elegimos para continuar el problema 2. Resolviéndolo, obtenemos la solución $x_1 = 4$, $x_2 = 3.\widehat{3}$, $z = 40$. Como esta solución no es entera volvemos a ramificar con respecto a la variable x_2 que no es entera. Es decir, que dividimos el problema 2 en dos subproblemas:

a) Problema 4 = Problema2 + restricción $x_2 \leq 3$.

[1] Veasé la figura 7.4 para seguir con más facilidad la resolución de este problema. El número indica el orden en que se han ido abriendo los problemas y la letra el orden en que se han ido resolviendo.

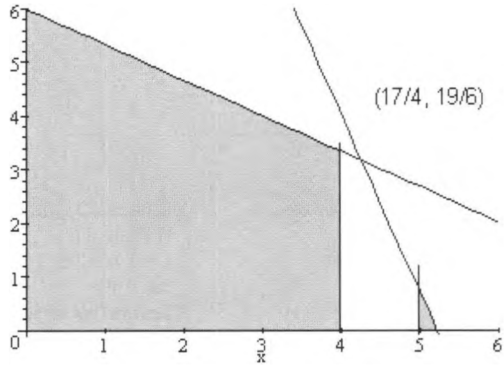


Figura 7.3: Regiones factibles de los problemas 2 y 3.

b) Problema 5 = Problema2 + restricción $x_2 \geq 4$.

La solución del problema 4 es $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $z = 38$. Como es entera la registramos como solución candidata y el valor $z = 38$ como cota inferior de la función objetivo. Decimos que el problema 4 es un problema **terminal** (no hay que seguir ramificando). Resolviendo el problema 5 obtenemos la solución $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $z = 39$. Por tanto la consideramos solución candidata y registramos su valor como cota inferior del objetivo ya que mejora la anterior cota que era 38. También este problema es terminal. Con esto hemos terminado todos los problemas de esta rama. Volvemos ahora al problema 3. Su solución es $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $z = 29$. Como tenemos una solución candidata anterior con mejor valor para el objetivo ($29 < 39$), declaramos el problema como terminal y no seguimos ramificando. Cuando ningún nuevo problema puede ramificarse (porque se han declarado todos como terminales) se selecciona la solución óptima: la solución candidata con mejor valor para la función objetivo. En nuestro caso la solución óptima del problema entero planteado es por tanto $x_1 = 3$. $x_2 = 4$, $z = 39$.

7.3.1 Resumen

Reglas de Ramificación:

Se ramifica a partir de una variable no entera.

Se elige el siguiente problema a resolver arbitrariamente.

Cuando lleguemos a un problema terminal para elegir el que se resuelve a continuación se usa algún criterio. En el ejemplo hemos seleccionado el último problema creado no resuelto. También se usa a veces el criterio de resolver primero el problema con mejor cota para la función objetivo.

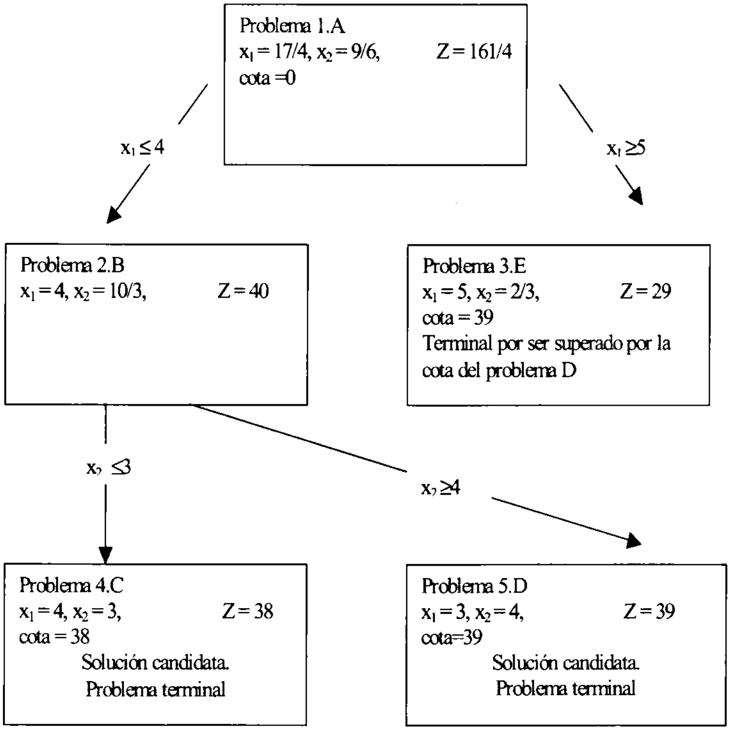


Figura 7.4: Diagrama de resolución del P.E.

Reglas de Acotación:

Son problemas terminales los siguientes:

- Los problemas Infactibles.
- Aquellos con solución entera (Candidata). Cuando tenemos una solución candidata registramos su valor de z como cota inferior para z si es mayor que la registrada anteriormente.
- Hay solución candidata con mejor valor para z.

La solución óptima final es la mejor solución candidata.

7.3.2 Programación entera mixta

Para resolver problemas de Programación Entera Mixta puede usarse también el algoritmo de ramificación, pero sólo se ramifica con respecto a las variables que han de ser enteras.

7.4 Algoritmo de corte o de Gomory

Este algoritmo elimina en la región factible porciones donde está la solución del problema relajado pero no puede estar la solución entera óptima. Para explicar la filosofía de este algoritmo lo usamos para resolver de nuevo el problema del ejemplo 78.

Ejemplo 79 *Resolver por el algoritmo de Corte o de Gomory el P.E.*

$$\begin{array}{lc} \max & z = 5x_1 + 6x_2 \\ sa: & 10x_1 + 3x_2 \leq 52 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_1,\ \ x_2 \in Z \end{array}$$

Resolvemos el problema relajado por el método de simplex. La tabla óptima es:

	x_1	x_2	h_1	h_2	
x_1	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{17}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{19}{6}$
	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{8}$	

Para aplicar el algoritmo de Gomory seleccionamos un contraste en el que la variable básica tome un valor fraccionario. Tomamos, por ejemplo, la primera restricción:

$$x_1 + \tfrac{1}{8}h_1 - \tfrac{1}{8}h_2 = \tfrac{17}{4}$$

Definimos *parte entera de* x, $E[x]$, como el mayor entero que es menor o igual que x. Si $x = E[x] + f[x]$, $f[x]$ es la *parte fraccionaria de* x.

Aplicamos esta descomposición a todos los números que aparecen en la ecuación anterior obteniéndose:

$$x_1 + (0 + \tfrac{1}{8})h_1 + (-1 + \tfrac{7}{8})h_2 = 4 + \tfrac{1}{4}$$

Separando los términos con parte no entera tenemos:

$$x_1 - h_2 - 4 = -\tfrac{1}{8}h_1 - \tfrac{7}{8}h_2 + \tfrac{1}{4}$$

Imponiendo la condición de que el segundo miembro de esta igualdad sea no positivo, se obtiene un **corte** en la región factible:

$$-\tfrac{1}{8}h_1 - \tfrac{7}{8}h_2 + \tfrac{1}{4} \leq 0$$

Este corte tiene las siguientes propiedades:

(1) La solución primitiva del problema relajado ha sido eliminada con este corte de la región factible.

(2) Ninguna solución entera del problema original es eliminada por este corte.

En efecto, la condición 1 se cumple ya que los valores de h_1 y h_2 son nulos para la solución del problema relajado. Sustituyendo en la inecuación del corte estos valores obtenemos $\frac{1}{4} \leq 0$. Por tanto la solución primitiva no cumple la condición impuesta por el corte. También se cumple la segunda propiedad ya que para soluciones enteras ambos miembros de la igualdad

$$x_1 - h_2 - 4 = -\frac{1}{8}h_1 - \frac{7}{8}h_2 + \frac{1}{4}$$

han de ser enteros. Como las variables de holgura son no negativas el segundo término de la igualdad será siempre menor o igual que $\frac{1}{4}$, y por ser entero ha de ser menor o igual que cero.

En este ejemplo hay que resolver el problema que resulta de añadir el corte a las restricciones iniciales del problema, obteniéndose ya una solución entera. El problema conviene resolverlo a partir del anterior por el simplex dual:

	x_1	x_2	h_1	h_2	s_3	
x_1	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{17}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$\frac{19}{6}$
s_3	0	0	$-\frac{1}{8}*$	$-\frac{7}{8}$	1	$-\frac{1}{4}$
	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{8}$	0	

Usando el algoritmo Dual del Simplex resulta que hay que pivotear sobre el elemento marcado. Se obtiene la tabla siguiente:

	x_1	x_2	h_1	h_2	s_3	
x_1	1	0	0	-1	1	4
x_2	0	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
h_1	0	0	1	7	-8	2
	0	0	0	1	1	

La solución es $x_1 = 4$, $x_2 = 10/3$, $z = 40$.

Representamos ahora el corte. Expresando previamente h_1 y h_2 en función de las variables de partida: $h_1 = 52 - 10x_1 - 3x_2$, $h_2 = 18 - 2x_1 - 3x_2$ y sustituyendo en la inecuación del corte se obtiene:

$-\frac{1}{8}h_1 - \frac{7}{8}h_2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(52 - 10x_1 - 3x_2) - \frac{7}{8}(18 - 2x_1 - 3x_2) + \frac{1}{4} =$

$= -22.0 + 30x_1 + 3x_2$

Por lo tanto la restricción del corte es:

$$3\,x_1 + 3\,x_2 \leq 22 \Longrightarrow x_1 + x_2 \leq \frac{22}{3}$$

Añadiendo esta restricción en la gráfica se obtiene la nueva región factible (ver figura 7.5), algo menor que región factible inicial, ya que se ha eliminado una pequeña región.

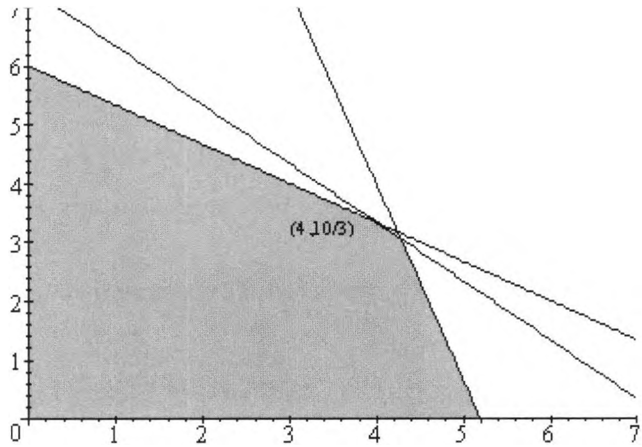


Figura 7.5: Región factible. Corte I del algoritmo de Gomory.

Como la solución aún no es entera realizamos ahora otro corte usando la segunda ecuación, ya que la primera solución es entera:

$$\begin{aligned} x_2 + h_2 - \frac{2}{3}s_3 &= \frac{10}{3} \Longrightarrow x_2 + h_2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)s_3 = 3 + \frac{1}{3} \Longrightarrow \\ x_2 + h_2 + (-1)\,s_3 - 3 &= -\frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por tanto el nuevo corte es $-\frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{3} \leq 0$

Añadiendo esta nueva restricción a las anteriores obtenemos la siguiente tabla de simplex:

	x_1	x_2	h_1	h_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	0	-1	1	0	4
x_2	0	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
h_1	0	0	1	7	-8	0	2
s_4	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}*$	1	$-\frac{1}{3}$
	0	0	0	1	1	0	

Aplicando de nuevo el método Dual de Simplex obtenemos:

	x_1	x_2	h_1	h_2	s_3	s_4	
x_1	1	0	0	-1	0	3	3
x_2	0	1	0	1	0	-2	4
h_1	0	0	1	7	0	-24	10
s_3	0	0	0	0	1	-3	1
	0	0	0	1	0	3	

La solución actual es entera y óptima: $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ z = 39$.

La expresión respecto a las variables primitivas de este segundo corte es la siguiente: $x_1 + x_2 \leq 7$.

La representación gráfica de la región factible que origina este nuevo corte aparece en la figura 7.6.

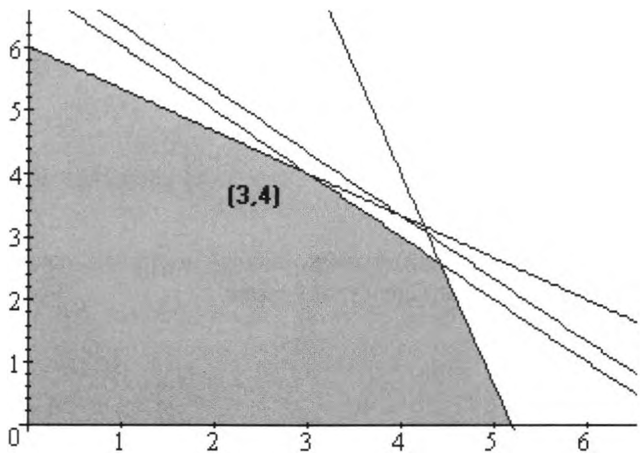


Figura 7.6: Región factible. Corte II del algoritmo de Gomory.

Gomory ha demostrado que se llega a una solución entera en un número finito de cortes.

7.4.1 Resumen del algoritmo de Gomory

El algoritmo tiene los siguientes pasos:

1. Hallar una solución óptima para al problema relajado. Si la solución es entera tenemos la solución óptima. Si no es así ir al paso 2.
2. Elegir un contraste en la tabla óptima del simplex cuyo término independiente no sea entero. (Se recomienda elegir aquel cuya parte fraccionaria sea lo más cercana posible a 0.5). Este contraste se usará para generar el corte.
3. Reescribir este contraste sustituyendo cada coeficiente por su parte entera más su parte fraccionaria.
4. Trasponer hacia la derecha los términos con coeficientes fraccionarios.
5. El corte se obtiene imponiendo la condición de que la expresión de la derecha sea menor igual que 0.
6. Use el dual del simplex para resolver el problema que resulta de añadir al problema relajado primitivo el corte. Si la solución es entera, es la solución óptima buscada. En caso contrario, ir al paso 2 para realizar un nuevo corte en el problema actual.

7.5 Programación 0-1. Algoritmo de enumeración

Es un procedimiento que permite hallar la solución de los problemas de programación Binaria (0-1). Es de notar que cualquier problema de programación entera puede interpretarse como un problema de programación 0-1, siempre que las variables enteras estén acotadas. Para ello basta considerar cada variable como un número expresado en base 2; y como incógnitas los valores de sus cifras. Por ejemplo cualquier número menor que 8 puede expresarse en la forma:

$$x = 2^2 y_1 + 2y_2 + y_3, \quad y_i = 0, 1$$

No obstante no suele emplearse esta opción, a causa de que el número de variables crece considerablemente.

El algoritmo de Enumeración que presentamos requiere que se modifique el problema inicial para que los coeficientes de la función objetivo sean positivos y estén ordenados. Para conseguirlo se ordenan los términos de la función objetivo por el valor absoluto del coeficiente. A continuación se realiza el cambio x_i por y_j si su coeficiente es positivo y por $1 - y_j$ si es negativo tal como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 80 *Preparar el problema que sigue para resolverlo por el algoritmo de enumeración*

$$\begin{aligned} max \quad & z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\ sa: & 2x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 \qquad \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \geq 2 \\ & x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Reordenando la función objetivo por el valor absoluto de sus coeficientes

$z = -x_4 + x_2 + x_5 + 2x_3 + 3x_1$

y tomando

$x_4 = 1 - y_1, \quad x_2 = y_2, \; x_5 = y_3, \quad x_3 = y_4, \quad x_1 = y_5.$

Se obtiene el problema equivalente:

$$\begin{aligned} max \quad & z = y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 + 3y_5 - 1 \\ s.a.: & 3y_1 + y_2 \qquad + 2y_5 \leq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 + y_5 \geq 3 \\ & y_i \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Cuando se va a aplicar el algoritmo de enumeración se suprime la constante (-1 en este caso) de la función objetivo.

El algoritmo de Enumeración es una modificación del algoritmo de Ramificación y Acotación.

Reglas que han de seguirse:

1. Se realiza la transformación detallada en el ejemplo previo para conseguir una función objetivo con coeficientes positivos y ordenados de menor a mayor.

2. El problema relajado se define ahora suprimiendo las restricciones a las variables, excepto la que impone que las variables sean binarias.

3. En el nodo de partida se dan los valores mas favorables para las variables (todos los valores 1 si el problema es de maximización y 0 si es de minimización). Se comprueba si estos valores cumplen las restricciones. Si es así, tenemos la solución óptima. En caso contrario se ramifica el problema.

4. La ramificación se hace comenzando con la variable $x_1 = 0$, $x_1 = 1$ siguiendo un orden ascendente en la variable de ramificación en los nodos sucesivos y fijando estos valores en los nodos que correspondan a la misma rama.

5. En el problema relajado correspondiente a cada nodo se dan a las variables cuyo valor no este fijado de antemano los valores más favorables que no dan lugar a soluciones ya analizadas previamente. Se calcula el valor de su función objetivo. Se comprueba si esta solución es factible y si es así se registra como solución candidata y el subproblema como terminal. El valor del objetivo se registra como cota inferior(CI).

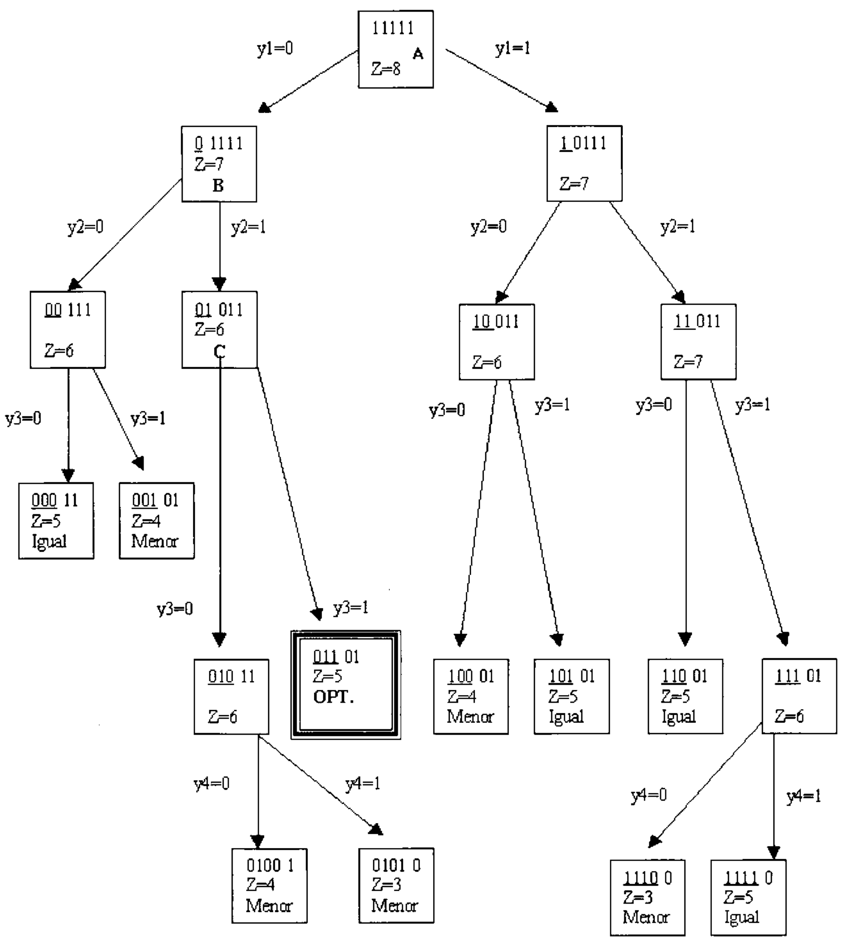
6. Cuando analicemos un subproblema cuya cota superior (mejor valor del objetivo) sea superada por CI, este subproblema será declarado terminal.

7. Si el subproblema tratado no es declarado terminal lo ramificamos con respecto a la siguiente variable no fijada anteriormente. La variable con respecto a la que ramificamos queda fijada en los problemas sucesivos de la misma rama.

Cuando el árbol queda terminado la solución óptima es la solución candidata con mejor valor para el objetivo.

Algunos autores incluyen procedimientos para declarar algunos problemas infactibles, pero no vamos a considerar aquí estos procedimientos.

Ejemplo 81 *En el siguiente árbol se muestra el esquema del procedimiento seguido para resolver el problema del ejemplo 80. (Suponemos que hemos resuelto en primer lugar los problemas que están marcados como A, B, C ; OPT)*



La solución óptima es $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, 1, 1, 0, 1)$. Hay otros problemas que alcanzan también el valor $z = 5$ pero las soluciones ensayadas no son factibles. Trasladando este resultado al problema primitivo se obtiene:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 0, 1, 1)$ con valor para $z = 3 + 1 + 2 \times 0 - 1 + 1 = 4$.

Ejemplo 82 *Dado el problema de programación lineal entero 0-1, resolverlo utilizando el algoritmo de enumeración.*

$$
\begin{aligned}
max \quad & z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
sa: & \ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \ \leq 10 \\
& \qquad x_3 + x_4 \leqslant 1 \\
& \qquad -x_1 + x_3 \leqslant 0 \\
& \qquad -x_2 + x_4 \leqslant 0 \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

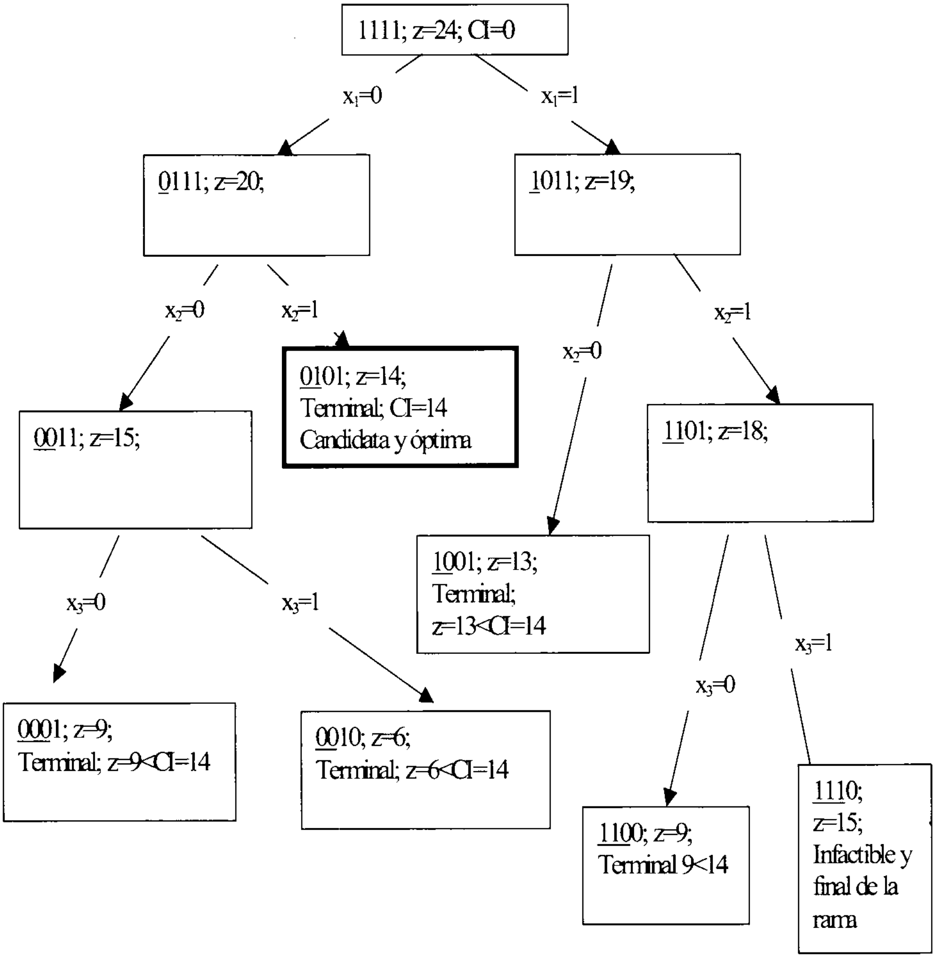
Ordenando la función objetivo por el valor absoluto de sus coeficientes, y tomando

$x_4 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3, \quad x_1 = y_4,$

se obtiene el problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
max \quad & z' = 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 9y_4 \\
sa: & \ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 6y_4 \ \leq 10 \\
& \qquad y_1 + y_3 \leqslant 1 \\
& \qquad y_3 - y_4 \leqslant 0 \\
& \qquad y_1 - y_2 \leqslant 0 \\
& y_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

El esquema de resolución es el siguiente:



La solución óptima es $y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0, \ y_4 = 1,$ con $\quad z' = 14.$

Deshaciendo el problema transformado tenemos que la solución óptima del problema inicial es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \ x_4 = 0, \ \text{con} \quad z = 14.$$

Tema 8

Teoría de Colas

8.1 Introducción

Para un Ingeniero informático es interesante saber que una de las herramientas matemáticas más poderosas para realizar análisis cuantitativos de las redes de ordenadores es la teoría de colas. Esta técnica se desarrolló primeramente para analizar el comportamiento estadístico de los sistemas de conmutación telefónica, sin embargo, desde entonces, también ha sido aplicada para resolver muchos problemas de redes.

Se pueden utilizar sistemas de colas para modelar procesos en los cuales los clientes van llegando, esperan su turno para recibir el servicio, reciben el servicio y luego se marchan. Ejemplos de sistemas de colas se encuentran en las cajas registradoras de los supermercados, en las ventanillas de las entidades bancarias, en las salas de espera de los consultorios médicos, etc..

Los sistemas de colas pueden definirse mediante cinco componentes (ver figura 8.1):

1. La función de densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas.
2. La función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio.
3. El número de servidores.
4. La disciplina de ordenamiento en las colas.
5. El tamaño máximo de las colas.

La densidad de probabilidad del tiempo entre llegadas describe el intervalo de tiempo entre llegadas consecutivas. Podríamos imaginarnos que contratáramos a alguna persona (por ejemplo, a un estudiante de ingeniería informática) para observar la llegada de los clientes. A cada llegada, el observador registraría el tiempo transcurrido desde que ocurrió la llegada previa. Después de que hubiese transcurrido un tiempo suficientemente largo de estar registrando las muestras, la listas de números podrían clasificarse y agruparse; es decir, tantos tiempos entre llegadas de 0.1 segundos, tantos de 0.2 segundos, etc... Esta densidad de probabilidad caracteriza el proceso de llegadas.

Cada cliente requiere de cierta cantidad de tiempo proporcionado por el servidor. El tiempo de servicio requerido varía entre un cliente de un supermercado y otro (por ejemplo, un cliente puede presentar un carro lleno de artículos que abarrote la caja, y el siguiente puede traer únicamente una lata de refresco). Para analizar un sistema de colas, deben conocerse tanto la función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio, como la función de densidad del tiempo entre llegadas.

La cantidad de servidores se explica a través de los ejemplos siguientes: Muchos bancos, por ejemplo, tienen una sola cola larga para todos sus clientes y, cada vez que uno de los cajeros se libera, el cliente que se encuentra al frente de la cola se dirige a la caja que ha quedado libre. A este sistema se le denomina sistema de cola multiservidor. En otros bancos, cada cajero o cajera, tiene su propia cola particular. En este caso tendremos un conjunto de colas independientes de un solo servidor, y no un sistema multiservidor.

La disciplina de ordenamiento de una cola describe el orden según el cual los clientes van siendo tomados de la cola de espera. Los supermercados utilizan el método de servir primero al cliente que ha llegado antes. En las salas de urgencia de los hospitales se utiliza, más a menudo, el criterio de primero el que esté más grave, no el primero en llegar es el primero en ser atendido. En una oficina, ante la fotocopiadora, es frecuente que se despache primero al que tenga menor trabajo, esto es, entra primero el que tenga que hacer menos fotocopias.

No todos los sistemas de colas de espera poseen una capacidad infinita de recepción de clientes. Cuando hay demasiados clientes que quieren hacer cola, pero sólo existe un número finito de lugares en cola de espera, algunos de estos clientes se pierden o son rechazados.

En resumen: Las colas o líneas de espera son situaciones bastante corrientes. Clientes esperando servicio en un banco, alumnos que esperan matricularse, productos en una línea de producción esperando ser procesados. Los sistemas que se caracterizan por elementos que tienen que esperar para recibir un servicio se llaman fenómenos de Espera. Las colas se pueden caracterizar por los momentos de llegadas de los clientes y por los momentos de salida de éstos, cuando ya han recibido el servicio solicitado. Las llegadas suelen describirse por medio de una distribución de probabilidad para los intervalos de tiempo entre llegadas de dos clientes consecutivos. Igualmente, los tiempos empleados en prestar cada servicio siguen otra distribución de probabilidad.

Un sistema de espera soporta dos costes: El de dar servicio y el de tener elementos esperando.

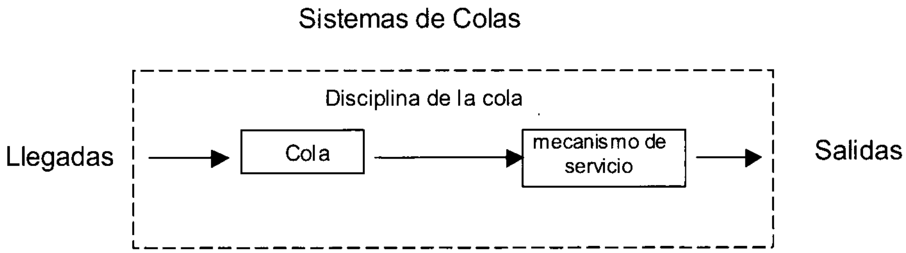


Figura 8.1: Esquema de un sistema de colas.

8.1.1 Costos de los sistemas de colas

Un sistema de colas puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia, la cola y la instalación de servicio. Las llegadas son las unidades que entran en el sistema para recibir el servicio.

Siempre se unen primero a la cola; si no hay línea de espera se dice que la cola está vacía. De la cola, las llegadas van a la instalación de servicio de acuerdo con la disciplina de la cola, es decir, de acuerdo con la regla para decidir cuál de las llegadas se sirve después del que está recibiendo servicio actualmente. El primero en llegar primero en ser servido es una regla común, pero podría servirse con prioridades, o siguiendo alguna otra regla. Una vez que se completa el servicio, las llegadas se convierten en salidas.

Ambas componentes del sistema tienen costos asociados que deben de considerarse.

Costo de Espera.

Esperar significa desperdicio de algún recurso activo que bien se puede aprovechar en otra cosa y esta dado por : *Costo total de espera* $= C \times L$. Donde C = costo de espera por hora por llegada por unidad de tiempo y L = longitud promedio de la línea.

Costo de Servicio.

Este costo es el que está asociado a la compra de las instalaciones de servicio, así como los gastos de ponerlas en uso como pueden ser los de mantenimiento y personal.

Sistema de costo mínimo.

Aquí hay que tomar en cuenta que tasas bajas de servicio normalmente darán lugar a largas colas y costos de espera muy altos. Conforme aumenta el servicio disminuyen los costos de espera, pero aumenta el costo de servicio. Entonces el propósito es encontrar el balance adecuado para que el costo total sea el mínimo.

8.1.2 Estructuras típicas.

Las llegadas pueden ser personas, cartas, carros, incendios, ensambles intermedios en una fábrica, etc... En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de varios sistemas de colas.

Ejemplos de sistemas de colas

Situación	Llegadas	Colas	Servicio
Autobús	viajeros	en las paradas	viaje en autobús
Hospital	Enfermos	sala de espera	consulta asistencia
Aeropuerto	Aviones	Aviones espera	Pista, Controladores, ...
Dpto. Bomberos	Alarma incendios	Incendios	Mecanismo extinción
Cía. telefónica	N^{o}marcado	Llamadas espera	Conmutador
Lavado coches	Coches	Coches en cola	Mecanismo de lavado
Juzgados	Casos	Casos atrasados	Juez: Sentencias,...
Oficina correos	Cartas	Buzón	Empleados correos
Servidor Web	Petición archivos	Cola peticiones	Transferir datos

Permitiendo que varíen el número de colas y el número de servidores, pueden hacerse los diagramas de los cuatro tipos de sistemas de la figura 8.2. Cada línea de espera individual y cada servidor individual se muestra por separado.

El primer sistema que se muestra en la figura 8.2, se llama un sistema de un servidor y una cola o puede describir un lavado de coches automático. El segundo, una línea con múltiples servidores, es típico de una peluquería o una panadería en donde los clientes toman un número al entrar y se les sirve cuando llega el turno. El tercer sistema, aquel en que cada servidor tiene una línea separada, es característico de los bancos y las tiendas de autoservicio. El cuarto sistema es una línea con servidores en serie, puede describir por ejemplo el comportamiento de una cadena de montaje en una fábrica.

8.2 Terminología

8.2.1 Características físicas

Servidor: Elemento que presta el servicio solicitado por los clientes.

Cola: Elementos esperando recibir servicio.

Sistema: Incluye cola, servidor y el elemento que está siendo servido.

Cadena: Número de líneas de cola del sistema. Los sistemas de colas son mono o multicadenas. En los casos más simples el número de cadenas es el número de servidores en paralelo.

Número de fases: Es el número de servicios diferentes que hay que esperar antes de

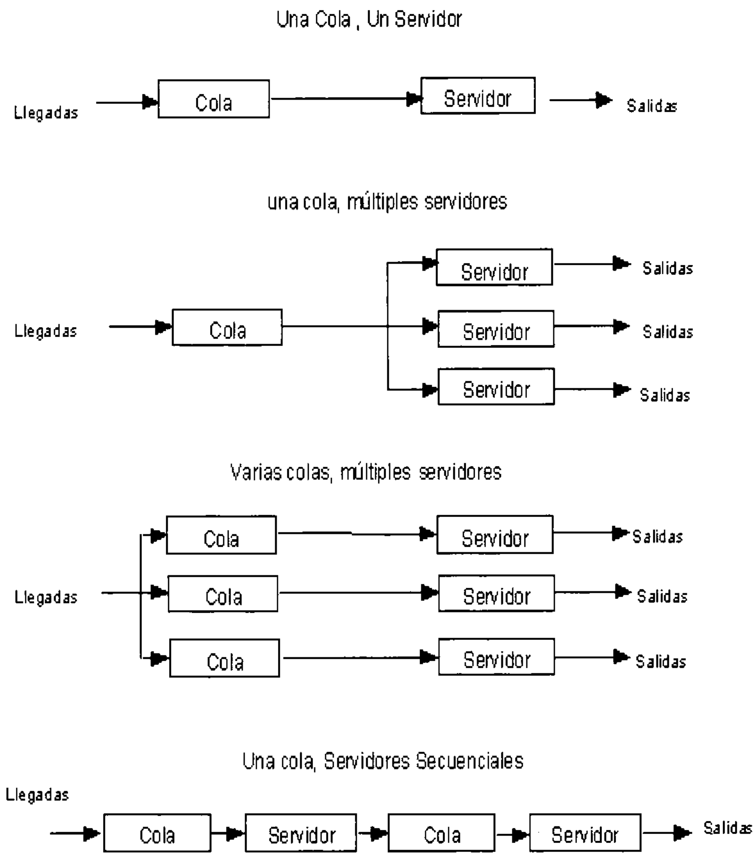


Figura 8.2: Distintos tipos de sistemas de colas

completar el servicio total. En los casos más simples es el número de servidores en serie.

Con objeto de clarificar estos últimos conceptos proponemos los siguientes ejemplos.

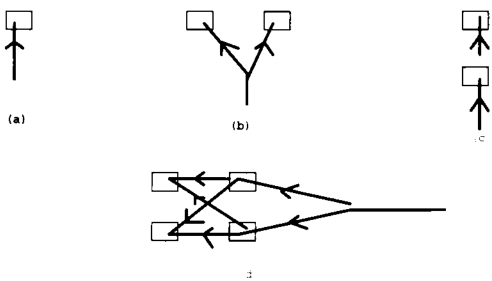
(a) Una cadena y una sola fase: Una taquilla de un cine

(b) multi-cadena y una sola fase: Cajeros en un banco.

(c) Una cadena y multi-fase: Una línea de montaje con distintos elementos que hay que fabricar.

(d) multi-cadena y multi-fase: Automóviles esperando paso en distintos semáforos.

En la figura siguiente hay esquemas que representan cada uno de estos modelos:



Modelos de sistemas de colas.

8.2.2 Características de funcionalidad

Aparte de estas características físicas de las colas, consideramos otras que afectan a su funcionamiento o dinámica entre las que pueden considerarse: la **distribución de las llegadas**, la **distribución de los tiempos de servicio** o intervalos de tiempo empleados por el servidor para prestar los servicios requeridos por los clientes, las distintas **formas en que se reorganizan las colas** en el supuesto de que haya varias cadenas o varias fases y la **disciplina** de la cola que es la forma en que los clientes que están esperando acceden al servidor. Frecuentemente se considera que el primero que ha llegado es el primero al que se le presta servicio. No obstante en algunas circunstancias esto no es así. Otras disciplinas de colas pueden ser aleatorias, como la forma en que suben al tren los viajeros que esperan en una estación. El orden de entrada depende de lo cerca que haya quedado la puerta de cada viajero. También puede haber algunas prioridades de determinados servicios, etc...

También se ha de considerar si existe **abandono** de la cola, es decir, elementos que al ver una cola demasiado larga no se deciden a esperar, o elementos que habiendo esperado un cierto tiempo no desean esperar más y abandonan la cola.

El sistema se dice que tiene una **capacidad limitada** si sólo admite, como máximo, un cierto número de elementos.

8.2.3 Parámetros de los sistemas de colas

Si la cola es de comportamiento aleatorio no podemos saber exactamente la situación que tendremos en cada momento. Por eso para describir su comportamiento se emplean promedios y probabilidades. Entre los parámetros más usuales consideraremos los siguientes:

Probabilidad de que no haya elementos en la cola.

Probabilidad de que haya un cierto número de unidades en el sistema.

Probabilidad de que un elemento que llega tenga que esperar para recibir servicio.

Número promedio de elementos en cola.

Número promedio de elementos presentes en el sistema.

Tiempo medio que ha de esperar cada elemento que accede a la cola.

Tiempo promedio que un elemento pasa en el sistema.

8.3 Modelos de llegadas y de tiempo de servicio

Los clientes o elementos pueden acceder al sistema de una forma determinada de antemano, es decir, que se sabe exactamente cuando van a venir cada uno de ellos (por ejemplo a intervalos de tiempo de 3 segundos) o bien, puede ocurrir que los intervalos de llegada sigan una variable aleatoria, es decir, que aunque no conozcamos exactamente en qué momento va a llegar cada uno de los elementos conozcamos la distribución de probabilidad de los intervalos de tiempo entre llegadas consecutivas. En el primer caso hablamos de distribución de llegada *determinista*, en el segundo decimos que los tiempos de llegada siguen una distribución *aleatoria*.

La distribución que se usa más frecuentemente para modelar los intervalos de tiempos entre dos llegadas consecutivas es la distribución exponencial. Suponemos que en un instante sólo puede haber una llegada. Notamos por t_i la hora a la que llega el cliente i, y por $T_i = t_{i+1} - t_i$ el tiempo transcurrido entre dos llegadas consecutivas. Suponemos que los valores de T_i son independientes, que T_i es una variable continua y que el estado es estacionario, es decir, admitimos la hipótesis de que la distribución que modela la cola (probabilidad de que haya un cierto número de elementos en la cola) es la misma a todas las horas del día. Normalmente esto no es estrictamente cierto, pero puede cumplirse aproximadamente considerando ciertos intervalos horarios cada día. Si admitimos el modelo exponencial para la distribución de la variable aleatoria T

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t); \quad \lambda > 0, \quad t > 0$$

la probabilidad de que una llegada ocurra en un tiempo $t < c$ unidades después que la anterior es:

$$P(t < c) = \int_0^c f(t)\, dt = \int_0^c \lambda \exp(-\lambda t)\ dt$$

Se puede comprobar que la media de esta distribución es $1/\lambda$, y la varianza $\frac{1}{\lambda^2}$.

El parámetro λ hay que interpretarlo como el número promedio de elementos que llegan, por unidad de tiempo.

Ejemplo 83 *El número promedio de llegadas por hora al consultorio de un hospital es de 60 pacientes. Si acaba de llegar un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente venga dentro del siguiente minuto. ¿Y de que tarde más de 4 minutos?*

Tomamos para $\lambda = \frac{60 \text{ pacientes}}{\text{hora}} = \frac{60 \text{ pacientes}}{60 \text{ minutos}} = 1 \frac{\text{paciente}}{\text{minutos}}$

$$P(t < 1) = \int_0^1 e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1} = 0.632;$$

$$P(t > 4) = \int_4^\infty \exp(-t)\, dt = 0 - (-e^{-4}) = 0.0183.$$

Es conveniente resaltar que la distribución exponencial cumple la siguiente relación

$$P(t \geq h) = P(t \geq c + h/t \geq c).$$

Esta propiedad significa que en todo momento la probabilidad de que el siguiente elemento que ha de venir venga en un intervalo de h segundos es la misma, no depende del momento considerado. No importa que un elemento acabe de llegar o que ya hayan pasado c segundos sin que haya llegado ningún otro elemento. Esta propiedad se suele enunciar diciendo que la función exponencial carece de *memoria*. Quiere decir que no recuerda lo que ha pasado antes (el tiempo que llevamos esperando al siguiente cliente); o de otra forma, que para predecir el futuro no se necesita tener información del pasado.

8.3.1 Relación entre la distribución de Poisson y la exponencial. Número de llegadas en cada intervalo de tiempo

El siguiente teorema nos da la relación existente entre la distribución del intervalo de tiempo entre llegadas (bajo la hipótesis de distribución exponencial) y el número de clientes que accede al sistema en cada intervalo de tiempo t.

Teorema 13 *Los intervalos entre llegadas siguen una distribución exponencial de parámetro λ si y sólo si el número de llegadas que ocurren en un intervalo de tiempo t sigue una distribución de Poisson de parámetro λt.*

Si N_t es la variable aleatoria que indica el número de llegadas en el tiempo t, la probabilidad de que el número de llegadas sea n es:

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!} \quad ,n = 1,\ 2,\ 3....$$

$$E(N_t) = Var(N_t) = \lambda t$$

Cuando el número de llegadas sigue una distribución de Poisson se cumplen las siguientes propiedades:

a) Las llegadas ocurridas en intervalos de tiempos que no se solapan son independientes.

b) Para intervalos pequeños de tiempo (Δt) la probabilidad de que una llegada ocurra en el intervalo $(t,\ t+\Delta t)$ es $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$[1].

c) La probabilidad de más de una llegada en el intervalo Δt es $o(\Delta t)$.

Ejemplo 84 *El número de personas que entra en un comercio sigue una distribución de Poisson con una media de 30 personas por hora.*

a) Hallar la probabilidad de que entren exactamente 50 personas entre las 10 a las 12 de la mañana.

b) Hallar la probabilidad de que el intervalo de tiempo entre dos llegadas esté entre 2 y 4 minutos.

a) El intervalo de tiempo es de 2 horas, por lo tanto $\lambda t = 30 \times 2 = 60$

$$P(N_t = 50) = \frac{(60)^{50} \exp(-60)}{50!} = 0.02327 \ .$$

[1] $o(\Delta t)$ denota un infinitésimo de orden superior a Δt

b) Los clientes acuden a la tienda a razón de 30 personas por hora, así que la función densidad de la exponencial asociada es 30 $\exp(-30t)$. Por tanto, la probabilidad es :

$$\int_{2/60}^{4/60} 30\exp(-30t)dt = -\exp(-30t)|_{2/60}^{4/60} = e^{-1} - e^{-2} = 0.23254$$

Si hiciéramos los cálculos en minutos: Los clientes acuden a la tienda a razón de 30/60=0.5 personas por minuto, así que la función densidad de la exponencial asociada es $0.5 \,.\, \exp(-0.5t)$. Por tanto, la probabilidad es:

$$\int_{2}^{4} 0.5.\exp(-0.5t)dt = -\exp(-0.5t)|_2^4 = e^{-1} - e^{-2} = 0.23254.$$

8.3.2 Otra distribución de las llegadas. La distribución de Erlang

A veces se modelan los intervalos de llegadas con una distribución de Erlang, ingeniero danés que aplicó a principios del siglo XX esta distribución al estudio de las aglomeraciones que se producían en las llamadas telefónicas. La función de densidad de esta distribución viene dada por dos parámetros:

$f(t) = \frac{R(Rt)^{k-1}\exp(-Rt)}{(k-1)!}$, $t \geq 0$, donde $E(t) = \frac{k}{R}$ y $Var(t) = \frac{k}{R^2}$

Si tomamos $R = K\lambda$, tenemos esta otra expresión para la función de densidad:

$$f(t) = \frac{k\lambda\,(k\lambda t)^{k-1}\exp(-k\lambda t)}{(k-1)!}, \quad t \geq 0 \tag{8.1}$$

siendo en este caso $E(t) = \frac{1}{\lambda}$ y $Var(t) = \frac{k}{(k\lambda)^2} = \frac{1}{k\lambda^2}$

Si $k = 1$, la distribución es una exponencial de parámetro λ. La representación gráfica de la función 8.1. puede tomar muy diversas formas para los distintos valores de los dos parámetros, por lo que es adaptable a distintas situaciones reales. Puede demostrarse que es la distribución de la suma de k variables exponenciales independientes de parámetro λ. Por tanto cuando los intervalos entre llegadas consecutivas se modelan con una función exponencial, el intervalo entre k llegadas consecutivas sigue una distribución Erlang de parámetro k.

8.3.3 Modelos de duración de los servicios

Se suelen emplear los mismos modelos que para los intervalos entre llegadas, es decir, que frecuentemente se emplean la exponencial o la Erlang. A veces puede ocurrir que la duración del servicio sea determinista (por ejemplo si todos los clientes vienen a solicitar el mismo servicio que tarda en realizarse una cantidad de tiempo constante).

8.4 La notación de Kendall

Se realiza sobre el esquema: 1/2/3/4/5/6 expresando en los lugares ocupados por los números la siguiente información:

En el lugar del 1 se indica la distribución de las llegadas, que se representa de la siguiente forma:

M = intervalos entre llegadas independientes e idénticamente distribuidos (*iid*) que se rigen por la distribución exponencial.

D = *iid* y deterministas.

Ek = *iid* y Erlang con parámetro k.

GI = *iid* y gobernados por una distribución general.

En lugar del 2 se indica la distribución de los servicios *M, D, EK, GI* con idéntico significado que en las distribuciones de llegadas.

En lugar del 3 se indica el número de servidores en paralelo.

El lugar 4 indica la disciplina de la cola que suele ser :

FCFS (first come first served), que significa que el primero que llega es el primero en ser servido, (también denominada *FIFO* = first in first out), *LCFS* (last come first served), que significa que el último en llegar es el primero en ser servido, (también denominada *LIFO* = last in first out), *SIRO* (service in random order), que significa que se atiende en orden aleatorio, *GD* (general queue discipline), que significa que la cola tiene una disciplina genérica.

En el lugar 5 se indica el número máximo de elementos que puede admitir el sistema (incluyendo los clientes que estén siendo atendidos).

Por último en el lugar 6 se indica el número máximo de clientes potenciales.

Así una cola $M/M/1/fcfs/\infty/\infty$ significa que los intervalos entre llegadas consecutivas y los tiempos empleados en prestar el servicio demandado se distribuyen con distribuciones exponenciales, que hay un solo servidor. La disciplina de cola consiste en atender primero al que haya llegado antes al sistema. El sistema puede recibir un número ilimitado de individuos, y el número de clientes potenciales es infinito (muy grande).

8.5 Estudio de una cola M/M/1

Sobreentenderemos en este caso que la cola es del tipo *M/M/1/fcfs/*∞/∞.

Llamaremos **Estado** del sistema al número de elementos presentes en el tiempo t. Para $t = 0$, el estado del sistema sería el número de elementos que están en el sistema inicialmente. Suponemos también que el sistema ha llegado al estado estacionario, que se caracteriza porque la probabilidad de cada estado no varía con el tiempo. Llamaremos P_j a la probabilidad de que el sistema esté en el estado j. También puede interpretarse como la fracción de tiempo en que hay j elementos en el sistema.

Un sistema de colas M/M/1/fcfs/∞/∞ sigue las leyes siguientes:

1. La probabilidad de un llegada entre t y $t + \Delta t$, puede darse por $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Una llegada incrementa el estado del sistema en 1.

2. La probabilidad de una salida entre $t + \Delta t$ (siempre que haya algún elemento recibiendo servicio en el instante t) puede darse por $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Una salida disminuye en 1 el estado del sistema.

3. Las llegadas y salidas son sucesos independientes.

4. El estado estacionario se alcanza si $\lambda < \mu$, siendo λ y μ respectivamente las tasas de llegada y servicio (número de llegadas o servicios por unidad de tiempo).

5. Dos o más sucesos (llegadas o salidas) no pueden ocurrir simultáneamente (esto es una forma de decir que su probabilidad de ocurrencia es un infinitésimo de orden superior a Δt).

8.5.1 Probabilidad de que el sistema esté en cierto estado

Para calcular la probabilidad de que el sistema esté en el estado j en el instante $t + \Delta t$, calculamos esta probabilidad a partir de su estado en el tiempo t.

Vamos a desarrollar el caso de $P_0(t + \Delta t)$ = Probabilidad de que no haya nadie en el sistema en el instante $t+\Delta t$. Se dará esta circunstancia en uno de los supuestos siguientes:

1. No había nadie en el sistema en el instante t y no ha venido nadie en este intervalo.

La probabilidad de que ocurra este supuesto es

$$P_0(t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)).$$

2. Había 1 elemento en el instante t, no ha venido nadie en ese intervalo y se ha ido el que estaba.

   La probabilidad es en este supuesto

$$P_1(t)(\mu\Delta t + o(t))(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)).$$

3. Los casos restantes requieren que al menos dos sucesos (entradas o salidas) ocurran en el intervalo de tiempo Δt.

   Según la propiedad 5) esta probabilidad es de orden superior a Δt.

Por lo tanto

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t+o(t))+P_1(t)(\mu\Delta t+o(t))(1-\lambda\Delta t+o(t))+o(\Delta t) \Rightarrow$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(1 - \lambda\Delta t + o(t)) + P_1(t)(\mu\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \Rightarrow$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Si $\Delta t \to 0$ obtenemos en el primer miembro la derivada de $P_0\,(t)$. Si consideramos que estamos en estado estacionario, P_0 es constante, luego su derivada es 0. El último sumando del segundo término también tiende a 0 puesto que el orden del numerador es mayor que el del denominador (el numerador tiende a cero "más rápidamente" que el denominador). Por tanto ha de cumplirse cuando $\Delta t \to 0$:

$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$, de donde se deduce que

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0$$

En el caso general, tras agrupar todos los infinitésimos de orden superior a Δt se tiene:

$$P_j(t + \Delta t) = P_{j-1}(\lambda\Delta t))(1 - \mu\Delta t) + Pj(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu\Delta t)+$$
$$+P_{j+1}(\mu\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t).$$

Procediendo de forma análoga a la empleada para obtener la expresión de P_1 se obtiene:

$$P_j(\lambda + \mu) = \lambda P_{j-1} + \mu P_{j+1}$$

En concreto si $j = 1$

$$P_1(\lambda+\mu)=\lambda P_0+\mu P_2$$

Sustituyendo $P_1=\frac{\lambda P_0}{\mu}$ obtenemos :

$$\tfrac{\lambda P_0}{\mu}(\lambda+\mu)=\lambda P_0+\mu P_2$$

y despejando P_2

$$P_2=\tfrac{\lambda^2 P_0}{\mu^2}$$

Por inducción, se obtendría para el estado j :

$$Pj=\tfrac{\lambda^j P_0}{\mu^j}$$

Como los posibles estados del sistema son: 0, 1, 2, 3,...

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i=1=P_0+\rho P_0+\rho^2 P_0+....=P_0(1+\rho+\rho^2+....)=P_0\left(\tfrac{1}{1-\rho}\right)$$

La serie representa la suma de los términos de una progresión geométrica de razón ρ. Si el estado es estacionario $\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$ y en este caso

$$1+\rho+\rho^2+....=\tfrac{1}{1-\rho}$$

Luego

$$P_0\left(\tfrac{1}{1-\rho}\right)=1$$

de donde se deduce que $P_0=1-\rho$, y por tanto

$$P_j=(1-\rho)\,\rho^j$$

8.5.2 Número medio de elementos en el sistema

Para calcular el número medio de elementos en el sistema, L, usamos el concepto de esperanza matemática

$$L=E(j)=\sum_{j=0}^{\infty} jP_j=\sum_{j=0}^{\infty} j(1-\rho)\rho^j=(1-\rho)\sum_{1}^{\infty} j\rho^j=(1-\rho)S$$

siendo $S = \sum\limits_{1}^{\infty} j\rho^j$ y j la variable aleatoria que denota el número de elementos en el sistema.

Para hallar S se parte de la igualdad

$S - \rho S = \frac{\rho}{1-\rho}$ de donde se deduce $S = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$. Sustituyendo esta expresión en la de L obtenemos para el número medio de elementos en el sistema

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

8.5.3 Número medio de elementos en cola

En este caso j la variable aleatoria que denota el número de elementos en la cola. Su promedio es

$$L_q = 0\,(P_0 + P_1) + 1P_2 + 2P_3 + 3P_4 + ... = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)P_j = \sum_{j=1}^{\infty} (j-1)(1-\rho)\rho^j =$$
$$= (1-\rho)\rho \sum_{1}^{\infty} (j-1)\rho^{j-1} = (1-\rho)\rho S = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

El número de elementos recibiendo servicio, es la diferencia entre los que están en el sistema y los que están en la cola. Su valor medio, L_s, es por tanto

$$L_s = L - L_q = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho} = \rho$$

Este valor, ρ , también puede interpretarse como el porcentaje de tiempo que el servidor está ocupado.

8.6 Teorema de Little

Para cualquier sistema de colas en estado estacionario se verifica:

$$L = \lambda W, \;\; L_q = \lambda Wq, \;\; L_s = \lambda Ws$$

Donde las W son, respectivamente, los tiempos medios de espera en el sistema, en cola y recibiendo servicio.

Explicación intuitiva: Supongamos que llega al sistema un elemento que permanece en éste exactamente el tiempo promedio W. Cuando este cliente salga del sistema permanecen aún en él los elementos que han llegado detrás durante el intervalo de tiempo W. Por promedio su número será λW, puesto que λ es el número de llegadas por unidad de tiempo, es decir $L = \lambda W$.

Usando el teorema de Little se pueden obtener expresiones para los tiempos medios de estancia en el sistema, en la cola o recibiendo servicio.

$$W = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

$$W_q = \frac{\frac{\rho^2}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1-\frac{\lambda}{\mu}}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu\left(\mu - \lambda\right)}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo 85 *En un aeropuerto el número de personas que accede por minuto es 10. Las revisiones de equipaje se realizan a razón de 12 por minuto. Responder a las siguientes cuestiones:*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero tenga que esperar antes de que le revisen el equipaje?*
2. *Por término medio, ¿cuántos pasajeros esperan en cola?*
3. *¿Cuánto tiempo total tienen que esperar los pasajeros por término medio?*

1. Espera si hay alguien en el sistema, es decir, si el número de personas en el sistema no es 0.

   Así que la solución es $1 - P_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho = 10/12 = 0.833\,333$.

2. $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{\lambda^2}{\mu\left(\mu - \lambda\right)} = \dfrac{10^2}{12(12-10)} = 4.16\,667$ es el número medio de individuos en la cola.

3. $W = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{12 - 10} = 0.5$ minutos tendrán que esperar los pasajeros por término medio.

8.7 Sistemas con capacidad limitada

Son los modelos de línea de espera que sólo admite un número máximo c de clientes en el sistema. Con arreglo a la notación de Kendall se trata de una cola M/M/1/fcfs/c/∞.

Para hallar la probabilidad de cada uno de los estados se pueden repetir los razonamientos del párrafo 8.5.1, pero hay que tener en cuenta que el estado del sistema nunca será mayor que c.

Se tiene por tanto

$$P_j = \frac{\lambda^j P_0}{\mu^j} \; si \;\; 0 < j \leq c$$

$$P_j = 0 \; si \;\; j > c$$

En este caso el estado estacionario puede lograrse aunque ρ no sea menor que 1 ya que el sistema se autorregula por el número máximo c de clientes en la cola. Los posibles estados del sistema son: 0, 1, 2, 3,...., c. por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{c} P_i = 1 = P_0 + \rho P_0 + \rho^2 P_0 + ... + \rho^c P_0 = P_0 \left(\frac{\rho^{c+1}-1}{\rho-1}\right) \quad si\ \rho \neq 1$$

es decir si λ no es igual que μ. Despejando P_0 , obtenemos en este caso que

$$P_0 = \frac{\rho-1}{\rho^{c+1}-1} \text{ y } P_j = \frac{(\rho-1)}{(\rho^{c+1}-1)}\rho^j$$

Por tanto

$$L = E(j) = \sum_{j=0}^{c} jP_j = \sum_{j=0}^{c} j\rho^j \frac{\rho-1}{\rho^{c+1}-1} = \frac{(\rho-1)}{\rho^{c+1}-1}\sum_{1}^{c} j\rho^j = \frac{(\rho-1)}{\rho^{c+1}-1}S'$$

siendo j el número de elementos en el sistema y $S' = \sum_1^c j\rho^j$

$$S' - \rho S' = \frac{\rho^{c+1}-\rho}{\rho-1} - c\rho^{c+1}$$

luego

$$S' = \frac{\rho^{c+1}-\rho-c\rho^{c+2}+c\rho^{c+1}}{(\rho-1)^2},$$

y por tanto

$$L = \frac{\rho-(c+1)\,\rho^{c+1}+c\rho^{c+2}}{(\rho-1)(\rho^{c+1}-1)}$$

El número de medio de elementos recibiendo servicio es :

$$L_s = 0 \times P_0 + 1(P_1 + P_2 + ... + P_c) = 1 - P_0$$

El número medio de elementos en la cola, L_q se puede hallar restando las expresiones L y L_s y obtenemos $L_q = L - L_s$.

En el caso particular de ser $\rho = 1$, y teniendo en cuenta la expresión anterior $P_j = \frac{\lambda^j P_0}{\mu^j}$ y todos los estados tendrían la misma probabilidad, P_0, así que $1 = (c+1)P_0$ y por tanto

$$P_0 = \frac{1}{c+1} = P_1 = P_2 = P_3 = ... = P_c$$

$$L = 0 \times P_0 + 1P_1 + 2P_2 + ... + cP_c) =$$

$$= P_0(1 + 2 + 3 + ... + c) = P_0\frac{1+c}{2}c = \frac{1}{c+1}\,\frac{1+c}{2}c = \frac{c}{2}$$

Se siguen verificando las fórmulas de Little

Para cualquier sistema de colas en estado estacionario se verifica el teorema de Little:

$$L = \lambda W, \quad Lq = \lambda Wq, \quad Ls = \lambda Ws$$

No obstante, λ debe sustituirse en este caso por la *tasa media real* de llegada (λ_R) , que será menor que λ, puesto que está limitada la afluencia de clientes. La tasa real se obtendrá ahora restando del promedio de llegadas por unidad de tiempo λ el promedio de entradas en el sistema que se pierden por exceder su capacidad. El promedio de llegadas perdidas es λP_c ya que P_c se puede interpretar como la proporción de llegadas por unidad de tiempo que no ingresan en el sistema. Es decir que:

$$\lambda_R = \lambda - \lambda P_c$$

Por tanto en este caso de sistemas con capacidad limitada se tiene:

$$L = \lambda (1 - P_c) W, \quad Lq = \lambda (1 - P_c) Wq, \quad Ls = \lambda (1 - P_c)$$

Ejemplo 86 *La afluencia de clientes a una peluquería tiene una media de 20 clientes por hora. El peluquero admite en su peluquería un máximo de 10 clientes y tarda en atenderlos un promedio de 12 minutos por cliente. Calcular: a) Número promedio de clientes atendidos por hora. b) Número medio de personas en la peluquería. c) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en la peluquería para los clientes que entran?*

a) Todos los clientes que entran son atendidos, por lo tanto coincide con la tasa real de llegadas a la peluquería. $\lambda(1 - P_c) = 20(1 - P_{10})$, $P_j = \frac{(\rho-1)}{(\rho^{c+1}-1)}\rho^j$, así que $P_{10} = \frac{(4-1)}{(4^{11}-1)}4^{10} = 0.75$. Por lo tanto el número medio de clientes atendidos por hora es $20(1 - 0.75) = 5$.

El número de clientes que queda fuera de la tienda por hora es 15.

b) Para determinar el número medio de clientes en la peluquería, calculamos:

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4$

$$L = \frac{\rho-(c+1)\,\rho^{c+1}+c\rho^{c+2}}{(\rho-1)(\rho^{c+1}-1)} = \frac{4-(11)\,4^{11}+10\times 4^{12}}{(4-1)(4^{11}-1)} = 9.67$$

Por lo que el número medio de clientes en la peluquería es 9.67 clientes.

c) El tiempo medio de espera en el sistema será:

$$\frac{L}{20(1-P_{10})} = 9.67/5 = 1.93 \text{ horas.}$$

8.8 Modelo con s servidores

Desarrollamos detalladamente el caso en que $s = 2$ (omitimos los infinitésimos de orden superior a Δt).

8.8.1 Cálculo de la probabilidad de los diferentes estados del sistema

También ahora se cumple para el estado 0 que

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t(1-\lambda\Delta t)$$

Si el estado del sistema es estacionario (se puede conseguir el estado estacionario para el caso de 2 servidores si $\lambda < 2\mu$ y en general si $\lambda < s\mu$), P_0 es constante, y por tanto la derivada es 0 , así que

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

y por tanto

$$P_1 = \frac{\lambda P_0}{\mu}$$

también se cumple para el estado 1 que

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)(1-\lambda\Delta t))(1-\mu\Delta t) + P_2(t)2\mu\Delta t(1-\lambda\Delta t)$$

Procediendo análogamente (ahora se iguala a 0 la derivada de $P_1(t)$) y sustituyendo el valor de P_1 obtenido anteriormente se obtiene:

$$\lambda P_0 - \frac{\lambda^2 P_0}{\mu} - \lambda P_0 + 2\mu P_2 = 0$$

y despejando P_2 :

$$P_2 = \frac{\lambda^2 P_0}{2\mu^2} = \frac{1}{2}\rho^2 P_0$$

Para obtener un expresión similar para P_3, se parte de la expresión:

$$P_2(t+\Delta t) =$$

$$= P_1(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t) + P_2(t)(1-\lambda\Delta t)(1-2\mu\Delta t) + P_3(t)2\mu\Delta t(1-\lambda\Delta t) \Rightarrow$$

$$\lambda P_1 - (\lambda + \mu) P_2 + 2\mu P_3 = 0$$

Sustituyendo los valores anteriores para P_1 y P_2, obtenemos:

$$P_3 = \tfrac{\lambda^3 P_0}{4\mu^3} = \tfrac{1}{4}\rho^3 P_0 \ .$$

En general, para el caso de dos servidores

$$P_j = \tfrac{\lambda^3 P_0}{4\mu^3} = \tfrac{1}{2^{j-1}}\rho^j P_0 \quad \text{si} \ \ j \neq 0.$$

8.8.2 Cálculo de $\mathbf{P}_0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 = P_0 + \rho P_0 + \tfrac{1}{2}\rho^2 P_0 + ... + \tfrac{1}{2^{j-1}}\rho^j P_0 + ... =$$

$$= P_0 \left(1 + \rho + \tfrac{1}{2}\rho^2 + ... + \tfrac{1}{2^{j-1}}\rho^j + ...\right)$$

El paréntesis, omitiendo el primer término, es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $\frac{\rho}{2}$ que es menor que 1, ya que para el estado estacionario $\lambda < 2\rho$. Realizando la suma de la serie se obtiene

$$P_0 \left(1 + \frac{\rho}{1 - \frac{\rho}{2}}\right) = P_0 \left(\frac{2+\rho}{2-\rho}\right) = 1$$

entonces

$$P_0 = \frac{2-\rho}{2+\rho}.$$

Por tanto:

$$P_j = \tfrac{1}{2^{j-1}}\rho^j P_0 = \tfrac{1}{2^{j-1}}\rho^j \frac{2-\rho}{2+\rho}.$$

8.8.3 Cálculo de los parámetros

El número medio de elementos en cola es

$$L_q = 0(P_0 + P_1 + P_{2)} + 1P_3 + 2P_4 + \ldots = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} jP_{j+2} = \sum_{j=1}^{\infty} j\tfrac{1}{2^{j+1}}\rho^{j+2}P_0 =$$

$$= P_0\tfrac{\rho^2}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\tfrac{\rho}{2}\right)^j = P_0\tfrac{\rho^2}{2}\tfrac{\frac{\rho}{2}}{\left(1-\frac{\rho}{2}\right)^2} = P_0\tfrac{\rho^3}{(-2+\rho)^2}$$

$$= \tfrac{\rho^3}{(-2+\rho)^2}\frac{2-\rho}{2+\rho} = -\tfrac{\rho^3}{(2+\rho)(-2+\rho)} = \tfrac{\rho^3}{4-\rho^2}$$

En el sumatorio se ha sustituido una expresión hallada previamente en 8.5.2 (tomando $\frac{\rho}{2}$ en lugar de ρ)

$$L_s = 0.P_0 + 1.P_1 + 2(P_2 + P_3 + P_4 + ...) = P_1 + 2(1 - P_0 - P_1) =$$
$$= \rho\frac{2-\rho}{2+\rho} + 2\left(1 - \frac{2-\rho}{2+\rho} - \rho\frac{2-\rho}{2+\rho}\right) = \rho$$

Intuitivamente podíamos también argumentar que la mitad de las llegadas irían a parar a cada uno de los servidores, ya que los clientes entran en uno u otro servidor. En ese caso la media de clientes atendidos por cada uno sería $\frac{\frac{\lambda}{2}}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}\rho$. Por tanto entre ambos atenderían una media $2 \times \frac{1}{2}\rho = \rho$.

Para calcular el número promedio de elementos en el sistema empleamos la siguiente expresión:

$$L = L_q + L_s = \tfrac{\rho^3}{4-\rho^2} + \rho = \tfrac{4\rho}{4-\rho^2}.$$

Para calcular los tiempos medios se pueden emplear las fórmulas de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W = \frac{L}{\lambda}, \quad W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

8.8.4 Sistemas de colas de tipo M/M/s/FCFS/∞/∞. Expresiones para el caso de s servidores

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^s}{s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)}}$$

$$P_j = \begin{cases} \frac{\rho^j}{j!}P_0 & si\ j = 1,\ 2,\ 3, \dots ,s \\ \frac{\rho^j}{s!s^{j-s}}P_0 & si\ j \geq s \end{cases}$$

$$L_q = \frac{\rho^{s+1}}{s \cdot s! \left(1 - \frac{\rho}{s}\right)^2} P_0$$

Se pueden aplicar también las fórmulas de Little:

$$W_q = \tfrac{L_q}{\lambda}$$
$$L_s = \rho \ \Rightarrow \ W_s = \tfrac{L_s}{\lambda}$$
$$L = L_q + L_s \ \Rightarrow \ W = \frac{L}{\lambda}$$

Ejemplo 87 *Consideremos una sucursal bancaria con dos cajeros. Los clientes acuden al banco a razón de 80 por término medio cada hora. Cada cajero tarda una media de 1.2 minutos en servir a un cliente. Hallar:*

a) Número medio de clientes en el banco.

b) Tiempo promedio de espera en el banco por cliente.

c) Fracción del tiempo en que un cajero determinado está ocupado.

En este caso λ= 80 clientes por hora y $\mu = 60/1.2 = 50$ clientes por hora es capaz de atender cada uno de los dos servidores.

a) El número medio de clientes en el banco es

$L = \frac{4\rho}{4-\rho^2} = \frac{4\frac{80}{50}}{4-\left(\frac{80}{50}\right)^2} = \frac{5.6}{1.44} = 3.8889\ clientes.$

b) El tiempo medio de espera en el banco es

$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{3.8889}{80} = 4.8611 \times 10^{-2}\ horas = 2.9167\ minutos$

c) La probabilidad de que un determinado cajero esté desocupado es:

$P_0 + 0.5P_1 = \frac{2-\frac{80}{50}}{2+\frac{80}{50}} + 0.5\frac{80}{50}\frac{2-\frac{80}{50}}{2+\frac{80}{50}} = 0.11111 + 8.8889 \times 10^{-2} = 0.2,$

así que la probabilidad de que ese cajero esté ocupado es $1 - 0.2 = 0.80$.

Si se pidiera la probabilidad de que al menos uno de los cajeros esté desocupado (sin concretar quien) se calcularía como:

$P_0 + P_1 = \frac{2-\frac{80}{50}}{2+\frac{80}{50}} + \frac{80}{50}\frac{2-\frac{80}{50}}{2+\frac{80}{50}} = 0.28889.$

8.9 El coste de un sistema de colas

Por lo general un sistema de colas tiene dos costes: El de tener clientes esperando y el de tener elementos sirviendo a éstos. Ilustramos esta situación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 88 *En una línea de producción es frecuente que haya un almacén para las herramientas más caras. Los trabajadores que necesitan alguna de ellas esperan a que un empleado del almacén se las suministre. Si hay muchos trabajadores solicitando herramientas se formarán colas y se perderá tiempo de trabajo. Esto se resolvería poniendo más empleados en el almacén, pero esto también supondría un gasto en sueldos de estos empleados. El problema es diseñar un sistema que minimice los costes. Suponemos que las llegadas de empleados al almacén siguen una distribución de Poisson de razón de llegada* $\lambda = 15$ *(número de personas que llegan por unidad* *de tiempo) y de razón de servicio $\mu = 18$ (número de elementos que pueden ser servidos en cada unidad de tiempo). Se supone que los trabajadores que esperan a que el empleado les suministre las herramientas ganan 10 u. m. por hora, y los empleados que se las suministran tienen un sueldo de 9 u.m. por hora.*

1. Caso de emplear sólo un servidor:

   El número medio de trabajadores en el sistema es

   $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{15}{18-15} = 5.0$

   Coste por hora $= 5 \times 10 + 9 \times 1 =$ 59 $u.m.$,

   ya que si por término medio hay 5 trabajadores en el sistema supone un gasto de 5×10 =50 u.m. por hora, a lo que hay que añadir el gasto del servidor que es 9 u. m. por hora.

2. Caso de dos servidores:

   $L = \frac{4\rho}{4-\rho^2} = \frac{4\frac{15}{18}}{4-\left(\frac{15}{18}\right)^2} = 1.4622$

   Coste por hora $= 1.4622 \times 10 + 9 \times 2 = 32.622$ $u.m.$

3. Caso de 3 servidores:

   $$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^s}{s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{3-1} \frac{\left(\frac{15}{18}\right)^i}{i!} + \frac{\left(\frac{15}{18}\right)^3}{3!\left(1-\frac{\left(\frac{15}{18}\right)}{3}\right)}} = .43213$$

   $$L_q = \frac{\rho^{s+1}}{s \times s!\left(1-\frac{\rho}{s}\right)^2} P_0 = \frac{\left(\frac{15}{18}\right)^{3+1}}{3 \times 3!\left(1-\frac{\left(\frac{15}{18}\right)}{3}\right)^2} \times 0.43213 =$$

   $= \frac{625}{12168} \times 0.43213 = 0.022196$

   $L = 0.0222 + 15/18 = 0.855533$

   Coste por hora $= 0.855533 \times 10 + 3 \times 9 = 35.555$ $u.m.$

4. Con más de tres servidores el gasto es siempre superior a $9 \times 4 = 36$ $u.m.$, ya que éste es el gasto del sueldo de 4 servidores.

Por lo tanto lo más económico es emplear dos servidores con un coste por hora de 32.622 $u.m.$

Tema 9

Introducción a la Simulación

9.1 Simulación. Generalidades

La Simulación es una técnica para el análisis y estudio de sistemas complejos. Esta técnica se emplea cuando, o bien no se conocen soluciones analíticas del problema planteado, o conociendo algún modelo analítico su aplicación al estudio del problema impone demasiadas simplificaciones a la realidad, por lo que la solución obtenida se va a apartar sustancialmente de la verdadera.

La simulación pretende imitar el comportamiento del sistema real, evolucionando como este. Lo más frecuente es estudiar la evolución del sistema en el tiempo. Para ello se formula un modelo de simulación que tiene en cuenta los elementos que vamos a considerar del modelo real y las relaciones entre estos. Una vez determinados los objetos y las relaciones que vamos a tomar en consideración, se formula la evolución del sistema por medio de un algoritmo. Este algoritmo, establecido el estado inicial del sistema, ha de permitir generar muestras simuladas de su comportamiento. Son estas muestras las que se usan para estudiar el problema tratado y dar una solución aproximada de éste. Por lo general estos algoritmos se desarrollan con programas de ordenador. Ejecutando el programa las veces deseadas se puede obtener tantas muestras del comportamiento del sistema como queramos. Estas muestras nos permiten obtener estimaciones cada vez más próximas a la realidad, siempre que el modelo la refleje adecuadamente.

Entre los muchos problemas a los que se han aplicado técnicas de Simulación citamos los siguientes.

1) Simulación del trafico de vehículos en cruces de vías con mucho tráfico con el objeto de estudiar si la colocación de nuevas señales de tráfico o de determinadas modificaciones en el flujo de vehículos mejorarían o empeorarían la circulación.

2) Simulación de la conducta de un modelo de inventarios. Es decir se pretende determinar la ganancia que se obtendría si los pedidos de las diferentes mercancías

de un comercio se realizaran en determinada cantidad y se usaran ciertos criterios para determinar los momentos más convenientes para efectuar estos pedidos. El objetivo es realizar esta operación de la forma más conveniente para el comerciante.

3) Simulación de los movimientos sísmicos con el objeto de actuar de la mejor forma posible para paliar los efectos de estos fenómenos.

4) Simulación de las condiciones de vuelo de los aviones con el objetivo de entrenar a los futuros pilotos.

5) Simulación de las urgencias clínicas que suelen producirse en una ciudad con el objetivo de gestionar los recursos de los servicios de urgencia de manera óptima.

Ventajas y desventajas de la simulación:

Ventajas:

a) Modelos más fáciles de aplicar, por lo que se pueden acometer problemas más complejos sin imponer demasiadas simplificaciones, acercándonos más al problema real.

b) Una vez que el modelo se ha construido sirve para estudiar distintas estrategias y para determinar todos los parámetros del sistema. En un modelo analítico la teoría y el desarrollo puede ser distinta para cada parámetro a determinar.

c) Facilidad de experimentación con el consiguiente ahorro económico y además las pruebas están libres de las posibles situaciones de peligro que son inherentes a algunas situaciones reales.

Desventajas:

a) Son generalmente más lentos que los cálculos analíticos

b) Suelen ser métodos que dan soluciones aproximadas.

De todas formas no se debe establecer una competencia entre modelos analíticos y simulados. Por lo general han de complementarse mutuamente.

Desarrollamos a continuación un sencillo ejemplo que nos va servir para mostrar de una forma simple en qué consiste esta técnica de Simulación.

9.2 Un ejemplo muy sencillo

Ejemplo 89 *Consideramos el caso de una cadena de tiendas que se dedica a vender pescado por cajas. Por experiencia se sabe que la demanda es de 3 a 8 cajas diarias. Cada una de estas cajas se compra por 25000 ptas. y se vende en 40000, pero las cajas que no se vendan al final del día, hay que venderlas en unas drásticas rebajas, a 10000 ptas. cada una. Si la demanda supera a la oferta suponemos que hay una pérdida de 15000 ptas. por cada unidad que no se puede ofrecer al cliente (en concepto de perdida de prestigio, fuga de clientes a otras tiendas, etc..). Se sabe que la demanda se puede clasificar en alta media y baja, con probabilidades 0.3, 0.45* *y 0.25 respectivamente. La distribución de la demanda por categorías es según la tabla:*

Demanda	*Alta (0.3)*	*Media (0.45)*	*Baja (0.25)*
3	*0.05*	*0.10*	*0.15*
4	*0.10*	*0.20*	*0.25*
5	*0.25*	*0.30*	*0.35*
6	*0.30*	*0.25*	*0.15*
7	*0.20*	*0.10*	*0.05*
8	*0.10*	*0.05*	*0.05*

Por ser un producto perecedero, el comerciante ha decidido adquirir diariamente 5 cajas. Se desea simular el comportamiento de la demanda durante 10 días calculando la ganancia media por día y determinar el número óptimo de cajas que se debe adquirir diariamente para maximizar los beneficios. ¿Cómo se puede resolver este problema por simulación?

Para ello generamos números aleatorios. Los ordenadores tienen una función para generar estos números. Si no disponemos de ordenador podemos usar una tabla de números aleatorios, una lista de premios de la lotería o podemos recurrir a realizar un sorteo con un juego de Bingo. Necesitamos una secuencia de 20 números, diez para generar el tipo de demanda de cada uno de los diez días y otros diez para generar la cantidad demandada. Vamos a utilizar los siguientes, que se han obtenido con una tabla de números aleatorios comprendidos entre 00 y 99.

69 56 30 32 66 79 55 24 80 35 10 98 92 92 88 82 13 04 86 31

Para respetar los valores de la probabilidad indicada en la tabla anterior realizamos la siguiente asignación, haciendo corresponder a cada probabilidad una cantidad de números proporcional a ésta.

Demanda	Alta (00 a 29)	Media (30 a 74)	Baja (75 a 99)
3	0.05 (00 a 04)	0.10 (00 a 09)	0.15 (00 a 14)
4	0.10 (05 a 14)	0.20 (10 a 29)	0.25 (15 a 40)
5	0.25 (15 a 39)	0.30 (30 a 59)	0.35 (41 a 74)
6	0.30 (40 a 69)	0.25 (60 a 84)	0.15 (75 a 90)
7	0.20 (70 a 89)	0.10 (85 a 89)	0.05 (90 a 94)
8	0.10 (90 a 99)	0.05 (90 a 99)	0.05 (95 a 99)

Generamos la demanda para el primer día: usando el primer número aleatorio (69) que está entre 30 y 74, con lo que obtenemos para el día 1 una demanda media. Ahora tendremos que determinar la cantidad demandada. Para generar el número de cajas demandada en este día empleamos el segundo número (56). Mirando la columna que corresponde a la demanda media vemos que está entre 30 y 59, así que seleccionamos una demanda de 5 cajas para el primer día. La ganancia obtenida en este caso será (en miles de pesetas) $40 \times 5 - 25 \times 5 = 75$, ya que en este día la demanda es igual que la oferta. De forma similar se obtiene la ganancia de los días siguientes, según está indicado en la siguiente tabla.

DIA:	Compra al principio del día	Sorteo tipo de demanda	Sorteo demanda	Ganacia día
1	5	69 media	56 (5)	40×5 - 25×5 = 75
2	5	30 media	32 (5)	40×5 - 25×5 = 75
3	5	66 media	79 (6)	40×5 - 25×5-15×1 = 60
4	5	55 media	24 (4)	40×4 - 25×5+10×1 = 45
5	5	80 baja	35 (4)	40×4 - 25×5+10×1 = 45
6	5	10 alta	98 (8)	40×5 - 25×5-15×3 = 30
7	5	92 Baja	92 (7)	40×5 - 25×5-15×2 = 45
8	5	88 Baja	82 (6)	40×5 - 25×5-15×1 = 60
9	5	13 Alta	04 (3)	40×3 - 25×5+10×2 = 15
10	5	86 baja	31 (4)	404 - 255+101 = 45

Sumando la ganancia obtenida en estos diez días y dividiendo por el número de estos se obtiene la ganancia diaria media:

$$\text{Media}=490/10 = 49 \text{ por día}$$

De momento hemos realizado la simulación con un pedido de 5 cajas durante 10 días. Si queremos responder a la pregunta de cuál es la cantidad de cajas por pedido que produce a la larga una ganancia máxima, podemos actuar de forma similar a como hemos hecho para el pedido de 5 cajas con todas las cantidades razonables de pedido (de 3 a 8 cajas son las demandas posibles). Es conveniente no obstante hacer simulaciones más largas, para que el valor medio de la ganancia sea más estable. Como ejemplo podemos hacer la simulación durante un año (365 días). En este caso la simulación manual, que hemos realizado anteriormente sería demasiado laboriosa. Por eso las simulaciones se realizan frecuentemente en ordenador.

El algoritmo que hay que implementar puede resumirse de la siguiente forma:

Para cada pedido (3 a 8)

Para cada día (1 a 365) se realizan los siguientes pasos:

paso 1

Determinar el tipo de demanda (alta media, baja)

Se genera un número aleatorio entre 0 y 1 . Si este número es menor que 0.30 la demanda es alta, si está entre 0.30 y 0.75 la demanda es media. Demanda baja en otro caso.

paso 2

Se genera otro numero aleatorio.

Generar la demanda del día seleccionando el valor correspondiente según los valores indicados en la tabla anterior.

paso 3

Se calcula el beneficio que corresponde a este día

Se calcula la media de los beneficios obtenidos en los 365 días..

Repitiendo esto para todas las estrategias (pedidos de 3 a 8 cajas) se puede estimar cual es la mejor elección.

Con un programa realizado en FORTRAN hemos estimado la ganancia media diaria en función del número de cajas pedidas, llegando a los resultados siguientes:

Cajas del pedido	3	4	5	6	7	8
Beneficio medio	10109.59	36041.10	53712.33	58561.64	51698.63	39780.82

Estos resultados nos permiten decidir que un pedido de 6 cajas es el que reportaría mayor beneficio.

9.3 Método Montecarlo

Aunque las técnicas de Simulación pueden ser deterministas, es decir que se pueden simular fenómenos que no sean aleatorios, lo más frecuente, como ocurre en el ejemplo anterior, es que el fenómeno que se pretende simular tenga algún componente aleatorio. En este caso decimos que se usa el método Montecarlo. La esencia del método Montecarlo es la experimentación con números aleatorios. El procedimiento usado consiste en diseñar juegos de azar con estos números, esperando obtener de su observación conclusiones útiles para la resolución del problema que se esté estudiando. Aunque se han publicado algunos trabajos relacionados con el método de Montecarlo que no han precisado el uso de ordenadores, lo cierto es que la utilidad del método de Montecarlo se ha visto enormemente incrementada con el uso de las modernas computadoras.

Resulta difícil creer que basándose en el puro azar puedan obtenerse conclusiones que merezcan la pena y, de hecho, algunos investigadores desconfían todavía de las estimaciones que se consiguen con este método, a pesar de sus múltiples éxitos en el campo de la Investigación Operativa, de la Física y de otras ramas de las Ciencias, como la Biología, la Química, e incluso la Medicina.

Los métodos de Montecarlo suelen clasificarse en dos tipos: probabilistas y deterministas.

En el Montecarlo probabilista se simulan con números aleatorios fenómenos que son aleatorios en la realidad. Los números se eligen de tal forma que reproduzcan la distribución de probabilidad de la población estudiada y, de su observación, se deducen características de ésta. Por ejemplo, la Física Nuclear suministra las funciones que rigen el movimiento de los neutrones. Reproduciendo estas leyes con números aleatorios se puede simular un reactor nuclear y "experimentar" con él, evitando los problemas de dinero, tiempo y seguridad que implicaría la experimentación con un reactor nuclear verdadero.

En el Montecarlo determinista se resuelven problemas que no son aleatorios en la realidad, asociándolos con algún experimento aleatorio diseñado expresamente con este propósito. Un ejemplo de este tipo es el cálculo numérico de integrales definidas.

9.4 Notas históricas sobre el Método Montecarlo

El nombre y el comienzo del desarrollo sistemático del método Montecarlo datan aproximadamente de 1944, época en la que se realizaron las investigaciones relacionadas con las primeras bombas atómicas. En tales investigaciones, llevadas a cabo principalmente en el laboratorio americano de Los Álamos, los procesos de absorción de neutrones se simularon mediante un conjunto de ruletas adecuadamente graduadas, que originaron el nombre de "Montecarlo" con el que Von Neuman y sus colaboradores designaron a esta técnica.

Sin embargo, ya desde el siglo XVIII es posible encontrar algunos vestigios de las ideas que subyacen en el método Montecarlo. En 1777 el conde de Buffon hizo un estudio del juego siguiente, de moda por aquella época: una aguja de longitud L se arroja sobre un plano en el que hay dibujadas varias rectas paralelas con una distancia d ($d > L$) entre ellas. Se gana si la aguja cae sobre alguna de las rectas paralelas. El conde de Buffon determinó la probabilidad (P) de ganar experimentalmente (a base de tirar la aguja una gran cantidad de veces), y analíticamente, calculando para P la expresión:

$$P = 2L/\pi d$$

Años mas tarde, en 1886, Laplace sugirió que este procedimiento podría ser útil para calcular experimentalmente el valor del número pi. Este momento es considerado en ocasiones como el punto de partida de las aplicaciones "serias" del método Montecarlo.

Otros trabajos pioneros sobre Montecarlo fueron los de Thompson (Lord Kelvin) en 1901, sobre la evaluación de algunas integrales de uso en la teoría de los gases. Gosset -con el seudónimo de Student- aplicó el método Montecarlo para obtener la distribución del coeficiente de correlación (1908). En 1930 Fermi empleó el método Montecarlo para sus trabajos sobre difusión y transporte de los neutrones, que resultaron esenciales para el desarrollo de las bombas y centrales nucleares.

Como ya se ha apuntado, durante la segunda guerra mundial se trabajó en estos temas. Aparte de Von Neuman, ya citado, cabe resaltar las aportaciones de Fermi, Ulam y Metrópolis. Durante esa época, la aparición de las primeras computadoras digitales dio un fuerte impulso al desarrollo del método Montecarlo. Paradójicamente estos trabajos propiciaron a la vez un cierto descrédito del método, pues se aplicó a casi cualquier cosa, sin tener en cuenta para nada los problemas de eficiencia que le son inherentes.

En los últimos años, debido al avance experimentado en el campo de los ordenadores, a la aparición de diversas técnicas para reducir la varianza de las estimaciones obtenidas, y al muestreo de Metrópolis, el método de Montecarlo parece haber entrado en un nuevo periodo de florecimiento.

9.5 Generación de números aleatorios

Ya que casi siempre la simulación es aleatoria normalmente necesitamos un generador de estos números. Los ordenadores suelen tener un comando para generarlos. Nos referimos con el nombre de números aleatorios a muestras procedentes de una distribución uniforme en el intervalo [0,1].

Los método de generación de números aleatorios pueden clasificarse en las categorías siguientes:

a) Métodos manuales: Loterías, Ruletas. Suelen ser lentos y no reproducibles. Durante bastante tiempo se creyó que era el único procedimiento para producir verdaderos números aleatorios.

b) Métodos analógicos. En este caso los números se obtienen de algún experimento físico que pueda recibirse en el ordenador. Se pueden generar rápidamente, pero no son reproducibles.

c) Tablas de números aleatorios: Es el procedimiento que hemos empleado en el ejemplo. Es un procedimiento lento y presenta el inconveniente de que la tabla puede ser insuficiente para una simulación larga. La primera fue preparada por Tippett (1927). Un método que se ha usado es preparar la tabla y almacenerla en la memoria del ordenador. En 1955 se publicó la Tabla de la Rand Corporation con un millón de dígitos. Para realizar estas tablas se usaron métodos analógicos: los datos se extrajeron del "ruido" de un generador de pulsos electrónicos.

d) Algoritmos para ordenador. Estos métodos están basados en generar números usando un programa de ordenador. El algoritmo usado es determinístico, así que estrictamente hablando los números generados no serían aleatorios, pero se comportan como si lo fueran ya que cumplen los test de independencia y de aleatoriedad, así que se pueden usar en lugar de éstos. Se conocen con el nombre de números pseudoaleatorios.

9.5.1 Propiedades de un buen generador de números aleatorios

Un generador de números aleatorios debe tener las propiedades siguientes:

a) Debe generar números aleatorios (uniformemente distribuidos e independientes).

b) Debe generarlos rápidamente.

c) No debe requerir mucho lugar de almacenamiento en el ordenador.

d) No entrar en ciclos, o al menos que los ciclos sean de periodo suficientemente largo.

f) La secuencia de números ha de ser reproducible. Es decir que se pueda repetir, si se considera conveniente, una secuencia de números que se haya producido anteriormente. De esta forma se podría repetir exactamente cualquier prueba ya realizada. En los programas de ordenador esto se consigue usando la misma semilla (número que inicializa el algoritmo).

9.5.2 Método del centro del cuadrado

Von Neumann sugirió el método del centro del cuadrado: Partiendo de un número de n cifras, generalmente un número par de cifras, realizar su cuadrado (suponemos que tiene $2n$ cifras) y extraemos el número formado por las n cifras centrales. Los números sucesivos se obtienen tomando el cuadrado del número precedente y extrayendo los dígitos centrales. Ejemplo: 5232^2=27$\underline{3738}$24. el siguiente número era el subrayado. Son lentos de obtener, tienden a formar ciclos cortos y si se obtiene un número con tres ceros en el centro no podemos conseguir ya números distintos.

9.5.3 Método de las congruencias

Fueron sugeridos por Lehmer en 1949. Se basan en calcular los residuos módulo m de una transformación lineal. Puede demostrarse que son uniformemente distribuidos y estadísticamente independientes.

La relación de congruencia fundamental es:

$$X_{i+1} \equiv (aX_i + c)\ (mod\ \ m)$$

siendo a, c y m enteros no negativos. Los métodos que usan esta relación se llaman congruenciales mixtos.

Dado un valor inicial llamado semilla X_0 se obtienen diferentes números todos ellos menores que m. Obviamente la cantidad de números generados es menor o igual que m. Por ejemplo, para $a = 5,\ c = 0\ \ y\ \ X_0 = 3\ y\ \ m = 8$ la secuencia generada es 3, 7, 3, 7. Esta secuencia es cíclica con periodo $2 < 8$.

Por supuesto elegimos m tan grande como podamos. Si p es el periodo y $p = m$ la sucesión se llama de *periodo completo.*

Puede demostrarse que una sucesión es de periodo completo si y solo si

a) c y m son primos entre sí.

b) $a \equiv 1(\text{mod } g)$ Siendo g cualquier factor primo de m.

c) $a \equiv 1 \ (\text{mod } 4)$ si m es múltiplo de 4.

m estará limitado por el ordenador . Si este es binario $m = 2^\beta$ como máximo, donde β depende del ordenador ($\beta =$ longitud de la palabra más larga - 1).

Se consigue una sucesión de 2^β elementos tomando c impar y

$a \equiv 1(\text{mod } 4)$.

Los valores $m = 2^{35}$, $a = 2^7+1$ y $c = 1$ dan buenos resultados para un ordenador cuya palabra máxima tenga 36 bits.

El caso particular de que c sea nulo se habla de un generador multiplicativo.

$$X_{i+1} \equiv (aX_i) \ (mod \ \ m)$$

En este caso no puede obtenerse un periodo completo.

Los métodos congruenciales tienen la ventaja de ser muy rápidos y ocupar poca memoria, y dan números que soportan bien los test de adherencia de ajuste. Sin embargo suelen presentar problemas de autocorrelación. También se observa que los últimos dígitos no siguen una distribución uniforme. Estos problemas suelen arreglarse con rutinas que hacen algunas modificaciones a los métodos congruenciales: usar las primeras cifras, barajar los números, formar un número de varias cifras uniendo las primeras de varios números generados anteriormente, etc. Rutinas de este tipo son las incluidas en el capítulo 7 de Numerical Recipes. La última de ellas Ran3 de Knuth es una buena rutina de generación de números aleatorios. La mostramos a continuación.

```
C ————————————————————————————-
C — SUBPROGRAMA RND —
C — CALCULA UN NUMERO ALEATORIO COMPRENDIDO ENTRE 0 Y 1 —
C — MIDUM = SEMILLA DE CUATRO CIFRAS ——————————-
C — TOMADA DE LA PAG 199 DE *NUMERICAL RECIPES* ————-
C ————————————————————————————-
SUBROUTINE RND(MIDUM,RAN)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
PARAMETER (MBIG=1000000000,MSEED=161803398,MZ=0,FAC=1./MBIG)
DIMENSION MA(55)
DATA IFF /0/
IDUM=-MIDUM
IF(IDUM.LT.0.OR.IFF.EQ.0)THEN
IFF=1
MJ=MSEED-IABS(IDUM)
MJ=MOD(MJ,MBIG)
MA(55)=MJ
MK=1
DO 11 I=1,54
II=MOD(21*I,55)
MA(II)=MK
MK=MJ-MK
IF(MK.LT.MZ)MK=MK+MBIG
MJ=MA(II)
11 CONTINUE
DO 13 K=1,4
DO 12 I=1,55
MA(I)=MA(I)-MA(1+MOD(I+30,55))
IF(MA(I).LT.MZ)MA(I)=MA(I)+MBIG
12 CONTINUE
```

```
13 CONTINUE
INEXT=0
INEXTP=31
IDUM=1
ENDIF
INEXT=INEXT+1
IF(INEXT.EQ.56)INEXT=1
INEXTP=INEXTP+1
IF(INEXTP.EQ.56)INEXTP=1
MJ=MA(INEXT)-MA(INEXTP)
IF(MJ.LT.MZ)MJ=MJ+MBIG
MA(INEXT)=MJ
RAN=MJ*FAC
MIDUM=-IDUM
RETURN
END
```

9.6 Método de la transformación inversa

Los números generados por la función RANDOMIZE (o análogas) de los ordenadores siguen una distribución uniforme en (0,1), es decir cualquier número en este intervalo tiene la misma probabilidad de ser generado. No obstante, a veces queremos generar números cuya distribución de probabilidad no sea uniforme. Para ello hay una gran variedad de métodos. Describimos únicamente el método llamado de la transformación inversa.

Si queremos generar valores de una variable aleatoria, con función densidad $f(x) > 0$, se usa el hecho conocido de que si denotamos su función de Distribución por $F(x)$, $F(\xi) = \eta$ se distribuye uniformemente en el intervalo (0,1).

Por lo tanto se pueden generar números aleatorios uniformemente distribuidos en (0,1) actuando del modo siguiente:

a) Se generan valores de con una distribución uniforme en el intervalo(0,1).

b) Se calcula el número generado con la relación $\xi = F^{-1}(\eta)$.

Este método presenta dos dificultades de tipo práctico: Calcular y resolver la ecuación $F(\xi) = \eta$, lo que, en muchos casos, no es tarea fácil.

9.6.1 Método de la transformación inversa aplicado a la distribución exponencial

En este caso el método anteriormente descrito es de fácil aplicación. La función de densidad es $f(x) = h.exp(-hx)$:

$$F(x) = \int_0^x h.exp(-hx)dx = \eta = 1 - exp(-hx) \text{ donde } \eta \in U[0,1]$$

Despejando x se obtiene:

$$x = -\tfrac{1}{h}L(1-\eta).$$

Como $1-\eta$ sigue la misma distribución que η , se puede calcular :

$$x = -\tfrac{1}{h}L\eta.$$

9.7 Simulación de una cola M/M/1

Los sistemas de colas suelen modelarse con la distribución exponencial. En este caso puede hacerse uso de la expresión anterior, lo que nos va a permitir contrastar los resultados analíticos con los obtenidos por medio de una simulación de la cola. Por este motivo incluiremos ahora un ejemplo de simulación de una cola de este tipo (modelo exponencial).

A veces es posible estudiar los fenómenos de espera analíticamente, pero esto ocurre solamente en los casos más simples, así que es frecuente acometer el análisis y estudio de los sistemas de colas por simulación. El siguiente ejemplo es lo suficientemente sencillo como para que pueda realizarse analíticamente, lo que nos permitirá contrastar los resultados obtenidos en la simulación con los que se obtienen por vía teórica.

Ejemplo 90 *Simular una cola de una sola línea y un solo servidor siendo la razón de llegada λ=15 (número de personas que llegan por unidad de tiempo) y la razón de servicio $\mu = 18$ (número de elementos servidos en cada unidad de tiempo).*

Comenzamos generando números aleatorios. Para transformarlos en elementos de una distribución exponencial de los intervalos entre llegadas usaremos la transformación:

$$\xi_1 = -\tfrac{1}{15}\ln\eta_1,$$

expresando el intervalo entre llegadas en horas. Si se expresa en minutos sería

$$\xi_1 = -\tfrac{1}{15}\ln\eta_1 \times 60,$$

y para los tiempos empleados en despachar las herramientas, también en minutos quedaría

$$\xi_2 = -\tfrac{1}{18}\ln\eta_2 \times 60.$$

Si la sucesión de números aleatorios que generamos para intervalos entre llegadas es:

$$1.83156\times10^{-2},\ 4{,}97871\times10^{-2},\ 0.22313,\ 4.08677\times10^{-3}$$

y para tiempos de servicios

$$6.09675\times10^{-3},\ 4.51658\times10^{-3},\ 0.011109,\ 2.47875\times10^{-3},\ 4.97871\times10^{-2}$$

entonces el primer intervalo entre llegadas que se obtiene es:

$$\xi_1 = -\tfrac{1}{15}\ln\eta_1 \times 60 = -\tfrac{1}{15}\ln(1.83156\times10^{-2})\times 60 = 16.0 \text{ minutos.}$$

Continuando las operaciones con los siguientes números aleatorios obtendríamos los valores de la siguiente tabla que representa los intervalos entre llegadas consecutivas y el tiempo de estancia en el servidor de los primeros elementos que van llegando al sistema

tiempo entre llegadas	Comienza la simulación	16	12	6	22
tiempo de servicio	17	18	15	20	10

Para simular el sistema podemos seguir el cambio de las variables definidas en la tabla siguiente. Cada renglón puede representar el estado del sistema. La primera llegada es en el reloj a 0 (comienzo de la simulación)

suceso	tipo de suceso	Tiempo de reloj	libre=1 ocupado=0	ncola = long de la cola	tiproll = hora próx llegada	tiproser = hora próx partida
0	Inicio	0	1	0	0	9999
1	llegada	0	0	0	16	17
2	llegada	16	0	1	28	17
3	partida	17	0	0	28	35
4	llegada	28	0	1	34	35
5	llegada	34	0	2	56	35
6	partida	35	0	1	56	50
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

El algoritmo correspondiente puede seguir el diagrama de flujo de la figura 9.1 (las variables tienen el nombre y significado descrito en las tablas).

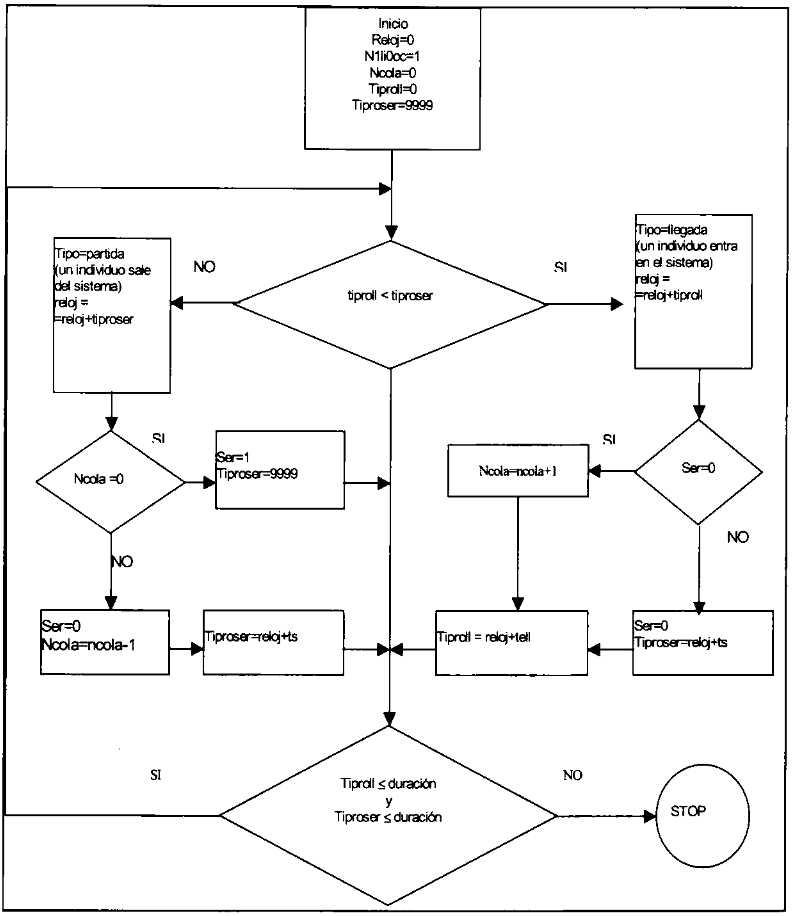


Figura 9.1: Diagrama de flujo del programa de simulación de una cola M/M/1.

9.7.1 Programa FORTRAN

```
c
   c     ***este programa simula una cola con una unica cadena y una sola fase
   c     . las demandas de servicio siguen la distribucion de poisson
   c     los tiempos de servicio se distribuyen con una exponencial negativa
   c     el modelo estima el tiempo de utilizacion del servidor, longitud media de la cola,
   c     numero medio de clientes en el sistema, tiempo medio de
   c     espera antes de recibir servicio, y la probabilidad de que haya que
   c     esperar para ser atendido. Esta estima ción se basa en una simulacion,
   c     cuya duracion es introducida como dato ***
   c----------------------------------------------------------------------
   c     ***informacion del modelo ***
         INTEGER NLLEGA,NESPERA,NCOLA
         CHARACTER*10 TIPO
         OPEN(6,FILE='COLA.RES')
   C
         CALL LINEAS(27)
         WRITE(*,*)'****Introduce media de clientes que llegan por hora*****'
         READ(*,*)VLLPORH
         CALL LINEAS(27)
         WRITE(*,*)' *** MEDIA DE CLIENTES ATENDIDOS POR HORA *** '
         READ(*,*) SERPORH
         CALL LINEAS(27)
         WRITE(*,*)' *** DURACION DE LA SIMULACION EN HORAS ***'
         READ(*,*)TITOT
         CALL LINEAS(27)
         WRITE(*,*)' *** SEMILLA *** '
         WRITE(*,*)'(NUMERO NATURAL DE UN MAXIMO DE 4 CIFRAS) '
         READ(*,*)IX
         NSEMILLA=IX
```

```
      CALL LINEAS(27)
      WRITE(6,*)' SIMULACION DE UNA COLA'
      WRITE(6,*)' ——————————-'
      WRITE(6,*)' '
      WRITE(6,*)' DATOS DE LA COLA:'
      WRITE(6,*)' '
      WRITE(*,*)' SIMULACION DE UNA COLA'
      WRITE(*,*)' ——————————-'
      WRITE(*,*)' DATOS DE LA COLA:'
      WRITE(*,*)' '
C       ***valores de inicializacion ***
30       NLLEGA=0
      RELOJ=0
      NESPERA=0
      N1LI0OC=1
      TISEROC=0
      TIESPERA=0
      NCOLA=0
      TIPO=' INICIO'
c
c       ***calcula el tiempo de llegada al sistema del primer cliente
c       demandando servicio***
      CALL RND(IX,YFL)
      TIPR0LL=-ALOG(1.-YFL)/VLLPORH
c       ***como no hay nadie en la cola el tiempo en que se termina el servicio
c       se toma como arbitrariamente grande. una eleccion conveniente es la
c       duracion de la simulacion***
      TIPR0SER=TITOT
c
c       *** el tiempo del proximo suceso se toma como el minimo del tiempo
```

```
c      de llegada, tiempo de completar el servicio , y el tiempo de
c      terminar la simulacion***
      WRITE(6,100)VLLPORH.SERPORH,TITOT.NSEMILLA
      WRITE(6,*)' TIPO RELOJ NCOLA N1LI0OC TIPR0LL TIPR0SER'
      WRITE(6,50)TIPO, RELOJ ,NCOLA ,N1LI0OC, TIPR0LL, TIPR0SER
60      TIPSUC=AMIN1(TIPR0LL.TIPR0SER.TITOT)
c
c      ***calcula el total del tiempo ocupado del servidor y
c      el de espera de los que esperan servicioe. luego el reloj
c      se adelanta hasta el tiempo del proximo suceso***
      TISEROC=TISEROC+N1LI0OC*(TIPSUC-RELOJ)
      TIESPERA=TIESPERA+NCOLA*(TIPSUC-RELOJ)
      RELOJ=TIPSUC
C
c      ***va a 90 si el proximo suceso es parar la simulacion,
c o va a 80 si el siguiente suceso es completar un servicio***
c
         IF (TIPSUC.EQ.TITOT) GO TO 90
      IF (TIPSUC.EQ.TIPR0SER) GO TO 80
C
c      ***en otro caso el propio suceso es una llegada
c .      modifica el numero total de llegadas
c          y genera el tiempo en que vendra el siguiente cliente***
c
      NLLEGA=NLLEGA+1
      CALL RND(IX,YFL)
      TIPR0LL=RELOJ-ALOG(1.-YFL)/VLLPORH
c
c      ***va a 70 si el servidor esta libre; si no es asi
c      modifica el numero de los que han tenido que esperar y
```

```
c     el numero de los que estan esperando ahora y vuelve al principio
c     para determinar de que tipo es el siguiente suceso***
      IF (N1LI0OC.EQ.1) GO TO 70
      NESPERA=NESPERA+1
      NCOLA=NCOLA+1
      TIPO =' LLEGADA'
      WRITE(6,50)TIPO, RELOJ ,NCOLA ,N1LI0OC, TIPR0LL, TIPR0SER
50      FORMAT(A10,F10.2,I10,I10,F10.2,F10.2)
      GO TO 60
c
c     ***modifica el estado del servidor, genera el tiempo de
c     duracion del servicio el numero de los que estan esperando ahora
c     y vuelve al principio para determinar de que tipo
c     es el siguiente suceso***
70      N1LI0OC=0
      CALL RND(IX,YFL)
      TIPR0SER = RELOJ - ALOG(1.-YFL)/SERPORH
      TIPO =' LLEGADA'
      WRITE(6,50)TIPO, RELOJ ,NCOLA ,N1LI0OC, TIPR0LL, TIPR0SER
      GO TO 60
c     ***ha terminado un servicio. va a 85 si
c     alguien esta esperando, pues el servidor ha quedado libre ***
C
80      IF (NCOLA.GT.0) GO TO 85
C
c     ***si no hay nadie esperando, registra que el servidor esta libre
c     y el tiempo de la siguiente partida la pone en un valor
c     arbirariamente alto.
c l     uego vuelve para determinar el tipo del siguiente suceso***
      N1LI0OC=1
```

```
      TIPR0SER=TITOT
      TIPO=' LLEGADA'
      WRITE(6,50)TIPO, RELOJ ,NCOLA ,N1LI0OC, TIPR0LL, TIPR0SER
      GO TO 60
C
C     ***DISMINUYE LA LONGITUD DE LA COLA
C     GENERA EL TIEMPO DE COMPLETAR EL SERVICIO Y VUELVE
C     PARA DETERMINAR DE QUE TIPO ES EL SIGUIENTE SUCESO ***
85     NCOLA=NCOLA-1
      CALL RND(IX,YFL)
      TIPR0SER=RELOJ-ALOG(1.-YFL)/SERPORH
      TIPO=' PARTIDA'
      WRITE(6 ,50)TIPO, RELOJ ,NCOLA ,N1LI0OC, TIPR0LL, TIPR0SER
      GO TO 60
C     ***se ha terminado el tiempo de la simulacion
C     se calculan los estadisticos
C     se prepara la salida de la informacion*****
90     ACTIV=(TITOT-TISEROC)/TITOT
      VMNCOLA=TIESPERA/TITOT
      VMPES=VMNCOLA+ACTIV
      VMTEC=TIESPERA/NLLEGA
      PRESPE=1.*NESPERA/NLLEGA
      WRITE(6,*)' '
      WRITE(6,*)' '
      WRITE(*,100)VLLPORH,SERPORH,TITOT,NSEMILLA
      WRITE (*,110)ACTIV,VMNCOLA,VMPES,VMTEC,PRESPE
      WRITE(6,*)' RESUMEN DE LA SIMULACION:'
      WRITE(6,*)' ——————————'
      WRITE(6,*)' '
      WRITE (6,110)ACTIV,VMNCOLA,VMPES,VMTEC,PRESPE
```

```
100    FORMAT (
1     ' MEDIA DE LLEGADAS POR HORA: ',F7.2/
2     ' MEDIA DE CLIENTES ATENDIDOS POR HORA: ',F7.2/
3     ' DURACION DE LA SIMULATION, HORAS: ',F7.2/
4     ' SEMILLA: ',I5/)
110    FORMAT (' % DE ACTIVIDAD DEL SERVIDOR: ',F7.2/
1     ' LONGITUD MEDIA DE LA COLA: ',F7.2/
2     ' NUMERO MEDIO DE PERSONAS EN EL SISTEMA: ',F7.2/
3     ' TIEMPO MEDIO DE ESPERA EN LA COLA: ',F7.2/
4     ' PROBABILIDAD DE TENER QUE ESPERAR: ',F7.2/)
      WRITE(*,*)' LOS RESULTADOS INTERMEDIOS DE ESTA SIMULACION'
      WRITE(*,*)' ESTAN GUARDADOS EN EL FICHERO COLA.RES'
      CALL LINEAS(2)
      STOP
      END
**************************************************************************
```

Salida de resultados de una simulación

```
SIMULACION DE UNA COLA
    DATOS DE LA COLA:
    MEDIA DE LLEGADAS POR HORA: 15.00
    MEDIA DE CLIENTES ATENDIDOS POR HORA: 18.00
    DURACION DE LA SIMULACION, HORAS: 8.00
    SEMILLA: 65
```

TIPO	RELOJ	NCOLA	N1LI0OC	TIPR0LL	TIPR0SER
INICIO	0.00	0	1	0.02	8.00
LLEGADA	0.02	0	0	0.13	0.05
PARTIDA	0.05	0	1	0.13	8.00
LLEGADA	0.13	0	0	0.17	0.20
LLEGADA	0.17	1	0	0.18	0.20
LLEGADA	0.18	2	0	0.35	0.20
PARTIDA	0.20	1	0	0.35	0.21
PARTIDA	0.21	0	0	0.35	0.24
LLEGADA	0.24	0	1	0.35	8.00

....

....

TIPO	RELOJ	NCOLA	N1LI0OC	TIPR0LL	TIPR0SER
LLEGADA	7.75	7	0	7.77	7.76
PARTIDA	7.76	6	0	7.77	7.81
LLEGADA	7.77	7	0	7.84	7.81
PARTIDA	7.81	6	0	7.84	7.90
LLEGADA	7.84	7	0	7.90	7.90
LLEGADA	7.90	8	0	7.90	7.90
LLEGADA	7.90	9	0	7.91	7.90
PARTIDA	7.90	8	0	7.91	7.91
LLEGADA	7.91	9	0	8.00	7.91
PARTIDA	7.91	8	0	8.00	7.93
PARTIDA	7.93	7	0	8.00	7.95
PARTIDA	7.95	6	0	8.00	8.04

En las dos tablas anteriores se presenta la evolución de la cola en los primeros y en los últimos momentos en una simulación de 8 horas.

RESUMEN DE LA SIMULACION (8 horas):

ACTIVIDAD DEL SERVIDOR (fracción): 0 .73

LONGITUD MEDIA DE LA COLA: 2.10

NUMERO MEDIO DE PERSONAS EN EL SISTEMA: 2.84

TIEMPO MEDIO DE ESPERA EN LA COLA: 0.14

PROBABILIDAD DE TENER QUE ESPERAR: 0.78

RESUMEN DE LA SIMULACION (de 10000 horas)

ACTIVIDAD DEL SERVIDOR (fracción): 0.84

LONGITUD MEDIA DE LA COLA: 4.23

NUMERO MEDIO DE PERSONAS EN EL SISTEMA: 5.07

TIEMPO MEDIO DE ESPERA EN LA COLA: 0.28

PROBABILIDAD DE TENER QUE ESPERAR: 0.84

La tabla siguiente presenta un resumen de la simulación a 8 horas y a 10000 horas. Se comparan con los resultados analíticos, observándose la similitud de estos valores con los obtenidos en la simulación más larga. A veces las simulaciones cortas, como en este ejemplo, no son suficientes para obtener una precisión aceptable debido, no sólo a la escasez de datos, sino también a que no se ha llegado a obtener aún el régimen estacionario.

	Actividad del Servidor	Longitud media de la cola	N^{o}medio de personas en el sistema	Tiempo medio de espera en la cola
8 horas simuladas	0.73	2.10	2.84	0.14
10000 horas simuladas	0.84	4.23	5.07	0.28
Resultados analíticos	$\frac{\lambda}{\mu} = 0.833$	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = 4.16.$	$\frac{\lambda}{\mu-\lambda} = 5$	$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = 0.277$

9.7.2 Programa PASCAL

```
Program SIMU;
  { CSIB: 5/08/88 – Simula una cola de un único canal, proporcionando una
  consulta interactiva por pantalla para introducir
  la relacion de llegada, la proporcion de servicio,
  la duración de la simulacion, y, cuando sea requerida,
  la traza logica de la simulacion por pantalla.
  Si se opto por ver la traza, cada evento dispara
  una actualización en una ventana en pantalla controlada
  por el usuario, si no se desea ver la traza, una animación
  grafica interactiva del comportamiento de la cola durante
  la simulación es visualizada. Al finalizar la simulacion,
  se presenta por pantalla un resumen estadistico.———}
  USES
  Crt, Graph3;
  CONST
```

```
Huge = 32767;
VAR
Reloj,
RatioLlegada, RatioServicio,
TotalEspera, TotalServicio,
T_S_Llegada, { Hora de la siguiente llegada }
T_S_Servicio, { Hora del siguiente servicio }
T_Evento : real; { Hora del siguiente evento }
Duracion, { Del proceso }
Total_Ind_Llegan, { Número total de individuos que han llegado }
Largo_Cola, { Longitud de la cola en cada momento }
Ind_Espera, { Número de individuos en espera }
i,j,k,l,m,n : integer;
Repite, OtraVez : char;
Llegada, Salida, Esperando, Trace : boolean;
**************************************************************
Procedure Pantalla_Conf;
BEGIN
ClrScr;Window(1,1,80,25);ClrScr;
{DrawBox2(2,2,79,24,15,1); }
GoToXY(5,2);Write(' < Simulación de Colas > ');
GoToXY(55,24);Write(' < Modelos de Colas > ');
Window(3,3,77,22);TextBackGround(1);ClrScr;
END;
**************************************************************
Procedure Entrada_Datos;
BEGIN
Window(3,3,78,23);TextBackground(1);ClrScr;
{DrawBox(5,7,74,16,15,4)}
Window(8,10,75,17);TextBackGround(4);ClrScr;
```

```
GoToXY(1,2);
Write (' Introduzca Relación de Llegada (Individuos por Hora): ');
Readln(RatioLlegada);
Write (' Introduzca Relación de Servicio (Individuos por Hora): ');
Readln(RatioServicio);
Write (' Introduzca la Duración de la Simulación (en Horas): ');
Readln(Duracion);
Writeln;
Write (' ¨Quiere que se realice la traza (s/n) ? ');
Readln (Repite);
IF (Repite = 's') OR (Repite = 'S') THEN Trace := TRUE;
Window(3,3,78.23);TextBackGround(1);ClrScr;
END: {Entrada_Datos}
(*************************************************************)
Procedure Inicializa_Parametros;
BEGIN
Esperando := TRUE;
Trace := FALSE;
RatioLlegada := 1.0;
Reloj := 0;
Largo_Cola := 0;
RatioServicio := 1.0;
T_S_Llegada := -LN (1.0 - Random) / RatioLlegada;
T_S_Servicio := Huge;
Total_Ind_Llegan := 0;
TotalServicio := 0;
Ind_Espera := 0;
TotalEspera := 0;
END; {Inicializa_Parametros}
(*************************************************************)
```

```
Procedure Simulacion;
*——————————————————————————————*
VAR
ch : char;
Function MIN (A, B, C : real) : real;
VAR
Menor : real;
BEGIN
Menor := A;
IF (B < Menor) THEN Menor := B;
IF (C < Menor) THEN Menor := C;
MIN := Menor;
END; {MIN Function}
(*——————————————————————————————*)
Procedure Echo;
VAR
ch : char;
BEGIN
IF (Llegada) THEN Writeln('Tmp Sig Llegada: ',Reloj:6:2,' Cola: ',Largo_Cola:4)
ELSE Writeln('Tmp Sig Servicio: ',Reloj:6:2,' Cola: ',Largo_Cola:4);
READLN;
END ;
(*——————————————————————————————*)
Procedure Display_Graphics(VAR QL : integer; C : real);
VAR
size1,size2,xpos,ypos,color : integer;
BEGIN
Palette(0);TextColor(1);GoToXY(1,3);
xpos := 280;ypos := 100; size1 := 8; size2 := 5;
Writeln(' Canal Simple, Cola Simple '); Writeln;
```

```
Writeln(' Ratio Llegada : ',RatioLlegada:7:2);
Writeln(' Ratio Servicio: ',RatioServicio:7:2);
GoToXY(5,20);TextColor(1);Writeln('Tiempo: ',C:7:2);
{::::: Draw and Fill Server Box :::::}
Draw(xpos-size1,ypos-size1,xpos+size1,ypos-size1,1);
Draw(xpos-size1,ypos+size1,xpos+size1,ypos+size1,1);
Draw(xpos-size1,ypos-size1,xpos-size1,ypos+size1,1);
Draw(xpos+size1,ypos-size1,xpos+size1,ypos+size1,1);
FillShape(xpos,ypos,1,2);
{::::: Draw and Fill Customer Being Served :::::}
IF NOT(Esperando) THEN color := 2 ELSE color := 1;
CIRCLE(xpos,ypos,size2,color);
FillShape(xpos,ypos,color,color);
{::::: Display Queue :::::}
FOR i := 1 TO 15 DO
BEGIN
IF ( i <= QL) THEN color := 2 ELSE color := 0;
CIRCLE(xpos-17*i,ypos,size2,color);
FillShape(xpos-17*i,ypos,color,color);
END; {For Loop}
END; {Display_Graphics}
(*-----------------------------------------------------------*)
BEGIN {Main Body Simulacion Procedure}
REPEAT
BEGIN
T_Evento := MIN (T_S_Llegada, T_S_Servicio, 1.0 * Duracion);
IF (Esperando) THEN TotalServicio := TotalServicio + (T_Evento - Reloj)
ELSE TotalEspera := TotalEspera + Largo_Cola * (T_Evento - Reloj);
Reloj := T_Evento;
IF (T_Evento = T_S_Llegada) THEN
```

```
BEGIN
Llegada := TRUE;
Salida := FALSE;
Total_Ind_Llegan := Total_Ind_Llegan + 1;
T_S_Llegada := Reloj - Ln (1.0 - Random) / RatioLlegada;
IF (Esperando) THEN
BEGIN
Esperando := FALSE;
T_S_Servicio := Reloj - Ln (1.0 - Random) / RatioServicio;
END
ELSE
BEGIN
Ind_Espera := Ind_Espera + 1;
Largo_Cola := Largo_Cola + 1;
END;
END; {If-Then-Else}
IF (T_Evento = T_S_Servicio) THEN
BEGIN
Salida := TRUE;
Llegada := FALSE;
IF (Largo_Cola = 0) THEN
BEGIN
Esperando := TRUE;
T_S_Servicio := Huge;
END
ELSE
BEGIN
Largo_Cola := Largo_Cola - 1;
T_S_Servicio := Reloj - Ln (1.0 - Random) / RatioServicio;
END;
```

```
END; {If-Then-Else}
IF (Trace) THEN
Echo
ELSE
Display_Graphics(Largo_Cola, Reloj)
END; {If-Then-Else}
UNTIL (Reloj = Duracion);
IF (Trace) THEN
BEGIN
Writeln;TextColor(15+Blink);
Writeln(' Presione Enter para Seguir ');ReadLN;
Writeln;
END
ELSE
Write(' Presione Enter para Seguir '); ReadLN;
END; {Simulacion}
(***********************************************************)
Procedure Generar_Informe;
VAR
Media_Num_Ind_Sistema, { Numero medio de individuos en el sistema }
Media_Long_Cola, { Longitud media de la cola }
Media_Tiempo_En_Cola, { Tiempo medio en la cola }
Utilizacion, Probabilidad_Espera : real;
(*---------------------------------------------*)
Procedure Analisis;
BEGIN
Utilizacion := (Duracion - TotalServicio) / Duracion;
Media_Long_Cola := TotalEspera / Duracion;
Media_Num_Ind_Sistema := Media_Long_Cola + Utilizacion;
Media_Tiempo_En_Cola := TotalEspera / Total_Ind_Llegan;
```

```
Probabilidad_Espera := Ind_Espera / Total_Ind_Llegan;
END; {Analisis}
(*————————————————————————————————*)
Procedure Set_Up_Report_Screen;
BEGIN
Pantalla_Conf;
{DrawBox(7,5,69,19,15,4);}
GoToXY(18,5);
Write('Canal Simple, Cola Simple');
Window(10,8,70,20);TextBackGround(4);ClrScr;
END; {Set_Up_Report_Screen}
(*————————————————————————————————*)
BEGIN {Main Body Generate Report}
Analisis;
Set_Up_Report_Screen;
GoToXY(1,2);
Writeln(' Ratio Llegada: ',RatioLlegada:7:2);
Writeln(' Ratio Servicio: ',RatioServicio:7:2);
Writeln(' Duración de la Simulación,Horas: ',Duracion:7);
Writeln(' Utilización del Servidor: ',(100 * Utilizacion):7:2,' %');
Writeln(' Longitud media de la Cola: ',Media_Long_Cola:7:2);
Writeln(' Número medio de Ind. en Sistema: ',Media_Num_Ind_Sistema:7:2);
Writeln(' Tiempo medio de Espera: ',Media_Tiempo_En_Cola:7:2);
Writeln(' Probabilidad de Espera: ',Probabilidad_Espera:7:2);
Delay(1500);
Writeln;Writeln;Writeln;
Write(' Otra vez [s/n] ?');
Readln(OtraVez);
TextBackground(1);ClrScr;
END; {Generar_Informe}
```

```
(**********************************************************)
Procedure Salida_Correcta;
BEGIN
Window(1,1,80,25);TextBackGround(0);ClrScr;
Writeln(' Programa traducido y modificado por ');
Writeln(' Carlos Rioja del Río');
Writeln(' &');
Writeln(' Miguel Angel Falcón Muñoz ');
END; {Exit Gracefully}
(**********************************************************)
BEGIN {SIMU Main}
REPEAT
BEGIN
ClrScr;
Randomize;
Inicializa_Parametros;
Pantalla_Conf;
Entrada_Datos;
IF (Trace) THEN
BEGIN
{DrawBox2(20,7,60,17,15,4);}
GoToXY(33,7);Writeln(' [ TRAZA ] ');
GoToXY(25,17);Writeln('[ Presione Cualquier Tecla para Seguir ]');
Window(23,10,61,18);TextBackGround(4);ClrScr;
END
ELSE GraphColorMode;
Simulacion;
TextMode(co80);
Pantalla_Conf;
Generar_Informe;
```

```
END
UNTIL ((OtraVez = 'N') OR (OtraVez = 'n'));
Salida_Correcta;
END. {SIMU Main}
```

9.8 Integración Montecarlo

Consideremos el problema de calcular una integral unidimensional donde supondremos que el integrando, $g(x)$, es una función acotada:

$$0 \leq\ g(x) \leq\ c,\ x \in [a, b]$$

Sea Ω el rectángulo

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2\ x \in [a, b],\ y \in [0, c]\} = [a, b] \times [0, c]$$

y sea (X, Y) una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre Ω con función de densidad:

$$f_{XY} = \begin{cases} \frac{1}{c(b-a)}\ si\ (x, y) \in \Omega \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad P de que el vector aleatorio (x, y) caiga en el área situada por debajo de la curva $g(x)$?

Denotemos por $S = \{(x, y)|\ y < g(x)\}$. Se observa que el área bajo $g(x)$ es igual al área de S, que a su vez coincide con el valor de la integral

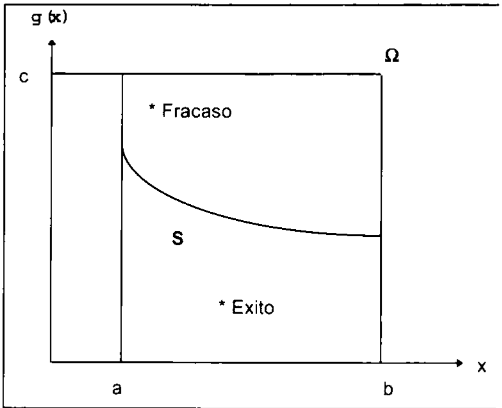
$$I = \int_a^b g(x)dx.$$

Con ayuda de la figura, se puede deducir que:

$$P = \frac{area\ S}{area\ \Omega} = \frac{\int_a^b g(x)dx}{c(b-a)} = \frac{I}{c(b-a)}$$

Por tanto

$$I = c(b-a)P$$



Método MC de éxito-fracaso.

Para estimar el valor de P generamos N puntos aleatorios independientes:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2).....(x_N, y_N)$$

dentro del rectángulo Ω.

La probabilidad P puede ser estimada por:

$$\widehat{P} = \frac{N_h}{N}$$

siendo N_h el número de estos puntos que se verifica $g(x_i) > y_i$ (es decir, que caen dentro del área que quiere calcularse). Por lo tanto un valor aproximado de I puede obtenerse de la forma siguiente

$$I = c(b - a)P$$

Si el extremo del vector aleatorio "cae" en S se interpreta como un éxito, y si no pertenece a S como un fracaso, de ahí el nombre del método.

Este método que presentamos aquí por su simplicidad, no suele ser muy eficiente, existiendo diversos procedimientos alternativos que permite reducir los errores en las estimaciones de la integral. De todos formas conviene tener en cuenta que el método Montecarlo no es el más indicado para el cálculo de integrales unidimensionales, siendo sin embargo de los más eficientes cuando el número de dimensiones es bastante elevado.

9.9 Ejemplos de programas de simulación

Describimos algunos programas de simulación que han sido realizados por alumnos de esta asignatura y que pueden servir para sugerir la realización de otros similares y para mostrar que estas simulaciones son susceptibles de ser realizadas dentro del ámbito académico.

Ejemplo 1

PROPÓSITO:

Aplicar el método de integración Montecarlo, éxito-fracaso, de forma práctica.

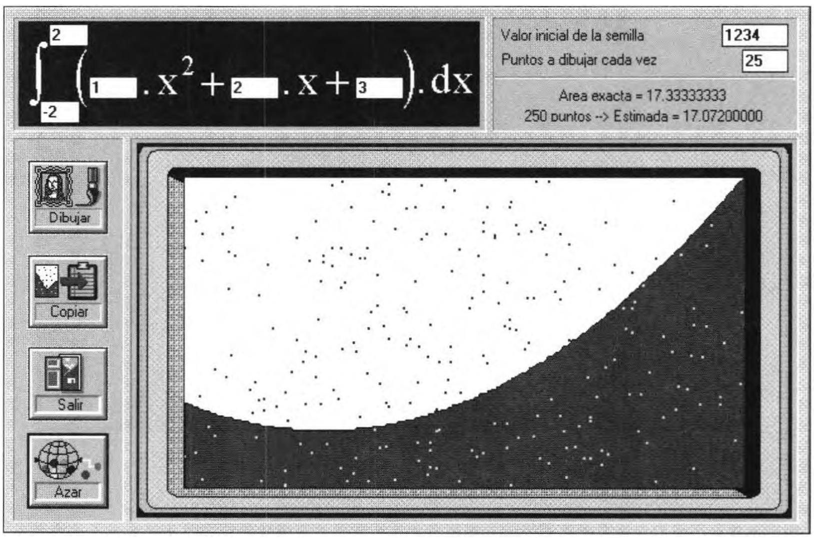
Se limita a funciones polinómicas de 2º grado.

UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

En la salida del programa siguiente se puede observar que el programa obtiene como valor aproximado de

$$\int_{-2}^{2}(x^2 + 2x + 3)dx$$

usando 250 puntos 17.072. Obsérvese que el valor exacto es 17.333...



OPERATORIA

Se sigue el orden siguiente :

(1) Introducir los límites de integración a y b.

(2) Indicar los coeficientes de la función polinómica de 2º grado.

(3) Introducir el valor inicial de la semilla, para la generación de números aleatorios.

(4) Establecer el número de puntos a generar en cada ejecución.

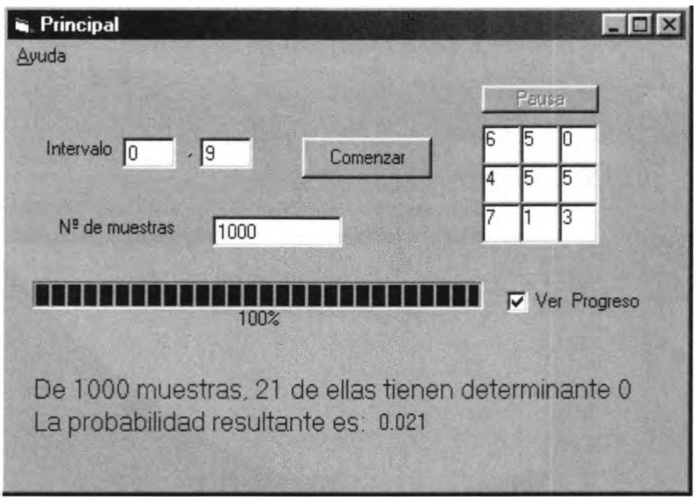
Pulsando el botón DIBUJAR se obtiene la gráfica de la función en el intervalo indicado y desde los valores máximo y mínimo que en él alcanza.

Cada vez que pulse AZAR, se representa el número de puntos indicado en (4), calculando el valor estimado del área. Puede COPIAR el gráfico en el portapapeles Windows, para incorporar en documentos (razón por la que se habilita el acceso a Paintbrush desde el menú de opciones).

Ejemplo 2

PROPÓSITO: Estimar la probabilidad de que el determinante de una matriz de orden 3 por 3, cuyos elementos son números naturales pertenecientes a un cierto intervalo sea nulo.

El programa muestra los determinantes generados según se muestra en la siguiente figura.

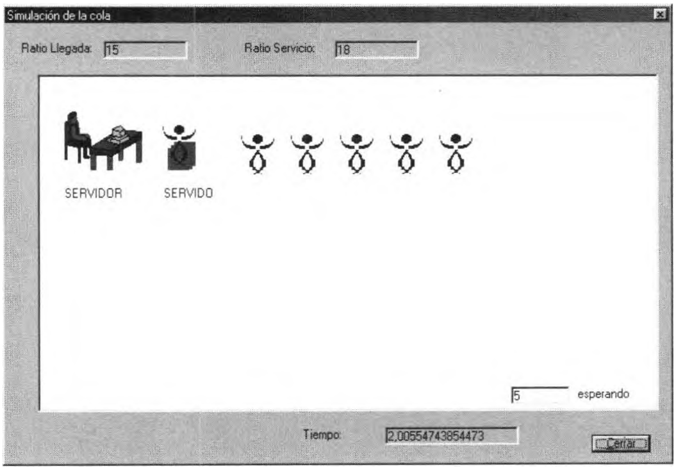


Ejemplo 3

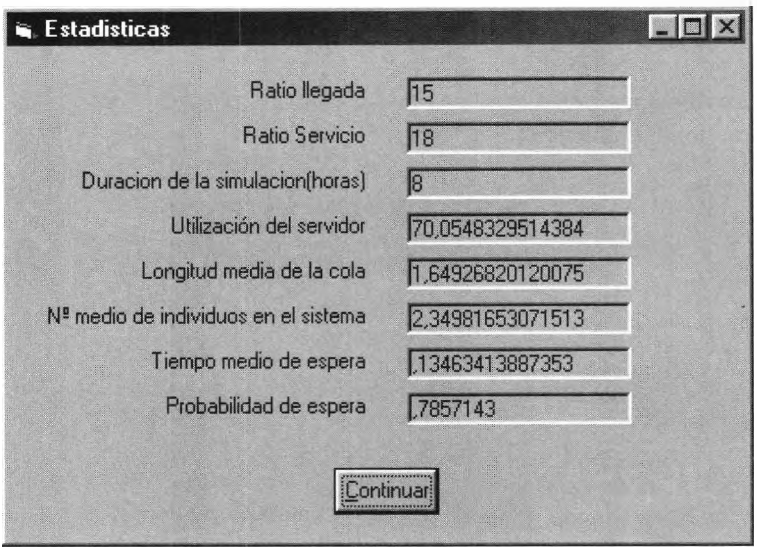
Programa realizado por los alumnos José Miguel Pérez y Manuel Jesús Pecci, de tercer curso de Ingeniería Técnica en Informática de Gestión. Curso 1999.

PROPÓSITO: Calcular los parámetros de una cola con una sola línea de espera y un solo servidor (distribuciones exponenciales).

El programa presenta una evolución visual de la cola, como se ve en la siguiente figura.



A continuación se presenta el resumen de los parámetros del sistema.



Ejemplo 4

PROPÓSITO: Estudio detallado de diversos sistemas de colas, con intervalos entre llegadas y tiempos de servicios generados por distintas distribuciones.

FUNCIONALIDAD DEL PROGRAMA:

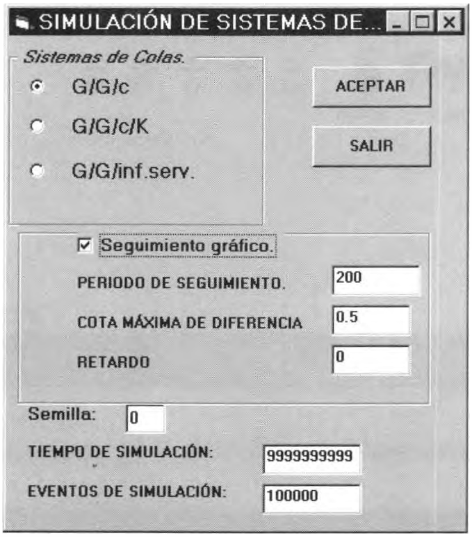
1) Tipos de problemas planteados

Sistemas con c- canales de servicio

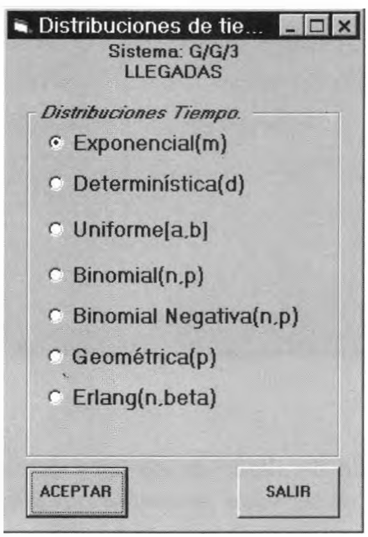
Sistemas con c canales de servicio y capacidad restringida

Sistemas con infinitos canales de servicios.

La selección se realiza en el siguiente menú



2) Distribuciones de llegada y de servicio empleadas. Se puede seleccionar cualquiera de las siguientes:

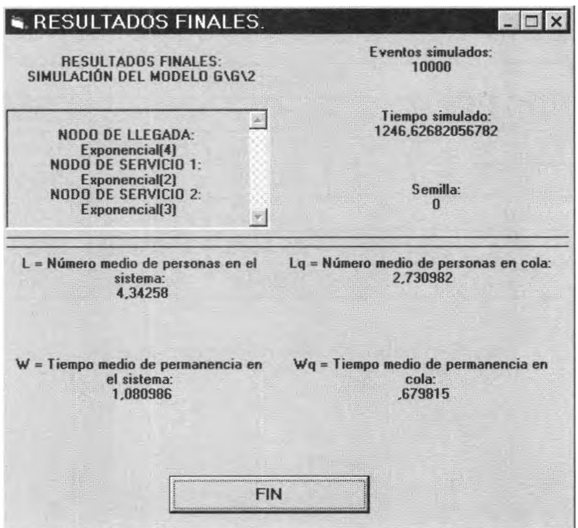


3) Gráfico de la evolución de las medidas de efectividad para verificar la estacionariedad del sistema.

Si se ha elegido el seguimiento gráfico cada vez que se rellene la gráfica, habrá que decidir si se ha alcanzado el estado estacionario del sistema. Si no se ha alcanzado pulsar " SEGUIR" . Si se hubiera alcanzado se pulsa " ESTADO ESTACIONARIO" y a continuación " PÚLSAME" , que iniciará la simulación del sistema, hasta obtener los parámetros de la cola, respetando el estado en que se encuentre en el momento de pulsar.

El gráfico representa el valor absoluto de las diferencias de valores de L (número de elementos en el sistema) en los dos últimos periodos. Las barras de cuadros representan diferencias mayores que las permitidas. El criterio empleado para caracterizar el estado estacionario es que las diferencias máximas entre los cuatro valores de L que se presentan sean menores que un número prefijado de antemano.

Como resultado final aparecen los parámetros del sistema con una presentación como la siguiente:



4) Cálculo de las medidas de efectividad

APLICACIÓN A CASOS PRÁCTICOS

Caso 1: En un aeropuerto con tres pistas de aterrizaje se ha contrastado que los tiempos entre las llegadas de los aviones se distribuyen según una ley exponencial (0.04 min-1) y que los tiempos de maniobra en el aterrizaje se distribuyen como una uniforme (14 min., 20 min) en la pista 1, exponencial (0.02 min-1) en la pista 2 y una Erlang (15, 6.5 min) en la pista 3. Si se produce una llegada y las pistas están ocupadas, el avión se mantendrá en vuelo en espera de aterrizar.

Mostramos a continuación los resultados obtenidos por el programa para este problema usando simulaciones cada vez más largas. Puede observarse que los parámetros de la cola son bastante estables.

No. de eventos	100000	200000	500000	800000
Tiempo simulado	1239722	2486862	6245916	9982817
Media de aviones en el sistema	1.4152	1.4127	1.4040	1.4044
Media de aviones en espera	0.0931	0.0917	0.0888	0.0889
Tiempo medio en el sistema	35.0896	35.1320	35.0767	35.0514
Tiempo medio de espera	2.3084	2.2800	2.2184	2.2195

Caso 2. En este caso se ha realizado una simulación con llegadas y tiempo de servicios exponenciales, para poder contrastar las salidas del programa con los resultados obtenidos analíticamente. También aquí se constata la precisión de los resultados obtenidos.

	Nodo de llegada exp. (1)			
G/G/3/7	Nodos de servicio (1,2,3) exp. (0.1666)			
Eventos	200000	400000	800000	Teórico
L	6.0711	6.0693	6.0615	6.0631
Lq	3.0999	3.0982	3.0910	3.0920
W	12.3350	12.3175	12.2391	12.2444
Wq	6.2981	6.2877	6.2412	6.2442

Parte II

EJERCICIOS

Ejercicios tema 1

Introducción a la optimización

1.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1 ***Problema de dietas:*** *En un centro de nutrición se está buscando la dieta de mínimo coste con unos determinados requerimientos vitamínicos para un grupo de niños que van a asistir a campamentos de verano. El especialista estima que la dieta debe contener entre 26 y 32 unidades de vitamina A, al menos 25 unidades de vitamina B, al menos 30 de C y a lo sumo 14 de vitamina D.*

La tabla nos da el número de unidades de las distintas vitaminas en seis alimentos elegidos, así como el coste por unidad de éstos.

		Vitaminas			
Alimento	*A*	*B*	*C*	*D*	*Coste por unidad*
1	1	1	0	1	10
2	1	2	1	0	14
3	0	1	2	0	12
4	3	1	0	1	18
5	2	1	2	0	20
6	1	0	2	1	16

Construir un modelo de programación lineal para conocer la cantidad de cada elemento que hay que preparar con los requerimientos propuestos para conseguir un coste mínimo.

Paso 1

x_1 = cantidad de alimento 1 $\qquad$ x_2 = cantidad de alimento 2

x_3 = cantidad de alimento 3 $\qquad$ x_4 = cantidad de alimento 4

x_5 = cantidad de alimento 5 $\qquad$ x_6 = cantidad de alimento 6

Paso 2

Limitación vitamina A

$$\begin{array}{lcl}
x_1 \text{ unidades de alimento 1} & \longrightarrow & 1 \times x_1 \text{ unidades de vitamina A} \\
x_2 \text{ unidades de alimento 2} & \longrightarrow & 1 \times x_2 \text{ unidades de vitamina A} \\
x_3 \text{ unidades de alimento 3} & \longrightarrow & 0 \times x_3 \text{ unidades de vitamina A} \\
x_4 \text{ unidades de alimento 4} & \longrightarrow & 3 \times x_4 \text{ unidades de vitamina A} \\
x_5 \text{ unidades de alimento 5} & \longrightarrow & 2 \times x_5 \text{ unidades de vitamina A} \\
x_6 \text{ unidades de alimento 6} & \longrightarrow & 1 \times x_6 \text{ unidades de vitamina A}
\end{array}$$

Total unidades de vitamina A: $\quad x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6$

Por lo tanto ha de ser: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 26 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 32 \end{cases}$

Limitación vitamina B

$$\begin{array}{lcl}
x_1 \text{ unidades de alimento 1} & \longrightarrow & 1 \times x_1 \text{ unidades de vitamina B} \\
x_2 \text{ unidades de alimento 2} & \longrightarrow & 2 \times x_2 \text{ unidades de vitamina B} \\
x_3 \text{ unidades de alimento 3} & \longrightarrow & 1 \times x_3 \text{ unidades de vitamina B} \\
x_4 \text{ unidades de alimento 4} & \longrightarrow & 1 \times x_4 \text{ unidades de vitamina B} \\
x_5 \text{ unidades de alimento 5} & \longrightarrow & 1 \times x_5 \text{ unidades de vitamina B} \\
x_6 \text{ unidades de alimento 6} & \longrightarrow & 0 \times x_6 \text{ unidades de vitamina B}
\end{array}$$

Total unidades de vitamina B: $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

Por lo tanto ha de ser: $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 25$

Limitación vitamina C

$$\begin{array}{lcl}
x_1 \text{ unidades de alimento 1} & \longrightarrow & 0 \times x_1 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_2 \text{ unidades de alimento 2} & \longrightarrow & 1 \times x_2 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_3 \text{ unidades de alimento 3} & \longrightarrow & 2 \times x_3 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_4 \text{ unidades de alimento 4} & \longrightarrow & 0 \times x_4 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_5 \text{ unidades de alimento 5} & \longrightarrow & 2 \times x_5 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_6 \text{ unidades de alimento 6} & \longrightarrow & 2 \times x_6 \text{ unidades de vitamina C}
\end{array}$$

Total unidades de vitamina C: $\quad x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 2x_6$

Por lo tanto ha de ser: $\quad x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 \geq 30$

Limitación vitamina D

$$\begin{array}{lcl}
x_1 \text{ unidades de alimento 1} & \longrightarrow & 1 \times x_1 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_2 \text{ unidades de alimento 2} & \longrightarrow & 0 \times x_2 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_3 \text{ unidades de alimento 3} & \longrightarrow & 0 \times x_3 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_4 \text{ unidades de alimento 4} & \longrightarrow & 1 \times x_4 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_5 \text{ unidades de alimento 5} & \longrightarrow & 0 \times x_5 \text{ unidades de vitamina C} \\
x_6 \text{ unidades de alimento 6} & \longrightarrow & 1 \times x_6 \text{ unidades de vitamina C}
\end{array}$$

Total unidades de vitamina C: $x_1 + x_4 + x_6$

Por lo tanto ha de ser: $x_1 + x_4 + x_6 \leq 14$

Paso 3

Las variables deben ser positivas

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0,\ \ x_6 \geq 0.$

Las variables no tienen que tomar valores enteros, luego no hay condiciones de integridad.

Paso 4

Coste total = coste de 1 * cantidad alimento1 + coste de 2 * cantidad alimento2 +coste de 3 * cantidad alimento3 +coste de 4 * cantidad alimento4 +coste de 5 * cantidad alimento5 +coste de 6 * cantidad alimento6

Por lo tanto hay que minimizar la función

$$z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 20x_5 + 16x_6$$

En conclusión nuestro modelo sería:

$$\begin{array}{ll}
\min & z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 18x_4 + 20x_5 + 16x_6 \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 26 \\
& x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 32 \\
& x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 25 \\
& x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 2x_6 \geq 30 \\
& x_1 + x_4 + x_6 \leq 14 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0
\end{array}$$

Ejercicio 2 ***Problema de destilación de crudos:*** *Una refinería produce gasolina super y normal. Estas gasolinas difieren únicamente en la cantidad que poseen de dos aditivos A y B. Para cumplir las normas legales, la gasolina super ha de contener por lo menos un 40% de A y como mucho un 60% de B. En cambio la gasolina normal debe tener al menos un 35% de A y a lo sumo un 50 % de B. La refinería adquiere crudo del Golfo Pérsico y de Méjico. El crudo del Golfo Pérsico contiene una cantidad de 30% de A, 65% de B y el coste por barril es de 30 unidades monetarias. El de Méjico tiene un 40% de A y un 50% de B con un coste por barril de 35 unidades monetarias. Se sabe que la demanda semanal es de 600000 barriles de gasolina super y 400000 de normal y que necesariamente hay que atender esa demanda.*

Construir un modelo lineal que nos indique cuántos barriles hay que adquirir de cada tipo de crudo para que el precio sea lo más económico posible.

Paso 1

x_1 = n^o de barriles que se adquieren en el Golfo Pérsico

x_2 = n^o de barriles que se adquieren en Méjico

Paso 2

Se necesitan:

$$600000 \text{ barriles de super: } \left\{ \begin{array}{l} \text{al menos } \frac{40}{100} \times 600000 = 240000 \; \textit{tipo A} \\ \text{a lo sumo } \frac{60}{100} \times 600000 = 360000 \; \textit{tipo B} \end{array} \right.$$

$$400000 \text{ barriles de normal: } \left\{ \begin{array}{l} \text{al menos } \frac{35}{100} \times 400000 = 140000 \; \textit{tipo A} \\ \text{a lo sumo } \frac{50}{100} \times 400000 = 200000 \; \textit{tipo B} \end{array} \right.$$

Por lo tanto se necesita al menos una cantidad equivalente a 380000 barriles de tipo A y una cantidad que no supere los 560000 barriles del tipo B.

Restricción del aditivo A

x_1 barriles del Golfo Pérsico contiene $\frac{30}{100}x_1$ tipo A.

x_2 barriles de Méjico contiene $\frac{40}{100}x_2$ tipo A.

Se debe cumplir que $\frac{30}{100}x_1 + \frac{40}{100}x_2 \geq 380000.$

Restricción del aditivo B

x_1 barriles del Golfo Pérsico contiene $\frac{65}{100}x_1$ tipo B.

x_2 barriles de Méjico contiene $\frac{50}{100}x_2$ tipo B.

Se debe cumplir que $\frac{65}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 \leq 560000.$

Paso 3

El número de barriles es positivo. Si suponemos que sólo se pueden adquirir barriles enteros hay que añadir restricciones de variable entera para ambas variables.

Paso 4

Deseamos que el coste $30x_1 + 35x_2$ sea mínimo, así que el modelo resultante sería

$$\begin{array}{ll} \min & z = 30x_1 + 35x_2 \\ \text{s.a.:} & \frac{30}{100}x_1 + \frac{40}{100}x_2 \geq 380000 \\ & \frac{65}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 \leq 560000 \\ & x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \; \textit{enteras} \end{array}$$

Ejercicio 3 ***Problema de política de producción:*** *Cada una de las tres escavadoras T_1, T_2 y T_3 extrae un tipo distinto de mineral en una mina y son capaces de proporcionar una extracción máxima diaria de $E_1 = 200$ toneladas, $E_2 = 500$ toneladas y $E_3 = 300$ toneladas respectivamente.*

La producción diaria es almacenada en primer lugar en un local de una capacidad máxima de 1800 m^3, siendo los volúmenes específicos respectivos de los tres minerales de 9/5, 2 y 11/5 $\frac{m^3}{tm}$. Al día siguiente los minerales se lavan. Por el lavadero fluye respectivamente 80. 90 y 100 toneladas por hora para los minerales extraídos por las escavadoras T_1, T_2 y T_3, siendo el trabajo diario del lavadero de 10 horas. Los beneficios por tonelada de cada tipo de mineral son de 4, 5 y 6 unidades monetarias respectivamente.

Construir un modelo de programación lineal que nos determine el mejor reparto de los minerales a extraer cada día.

Resumimos los datos del problema:

	peso (Tm.)	Volumen ($\frac{m^3}{Tm}$)	Lavado ($\frac{Tm}{h}$)	Beneficio(Tm)
Mineral 1	200	$\frac{9}{5}$	80	4
Mineral 2	500	2	90	5
Mineral 3	300	$\frac{11}{5}$	100	6

Capacidad máxima del almacén: 1800 m^3.

Tiempo máximo de lavado 10 horas.

Paso 1

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{cantidad de mineral 1,} \\ x_2 &= \text{cantidad de mineral 2,} \\ x_3 &= \text{cantidad de mineral 3.} \end{aligned}$$

Paso 2

Restricciones de extracción diaria por excavadora:

$$x_1 \leq 200, \qquad x_2 \leq 500, \qquad x_3 \leq 300,$$

Limitación de la capacidad de almacenamiento:

$$\tfrac{9}{5}x_1 + 2x_2 + \tfrac{11}{5}x_3 \leq 1800$$

Limitación del tiempo de lavado:

El tiempo que emplea en lavar cada uno de los minerales es $\frac{x_1}{80}$, $\frac{x_2}{90}$, $\frac{x_3}{100}$.

Así que ha de ser

$$\tfrac{x_1}{80} + \tfrac{x_2}{90} + \tfrac{x_3}{100} \leq 10.$$

Paso 3

Las variables han de ser no negativas.

Paso 4

$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

El modelo del problema de P. L. es:

$$\begin{array}{ll}
\max & z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\
\text{s.a.} & x_1 \leq 200 \\
 & x_2 \leq 500 \\
 & x_3 \leq 300 \\
 & \frac{9}{5}x_1 + 2x_2 + \frac{11}{5}x_3 \leq 1800 \\
 & \frac{x_1}{80} + \frac{x_2}{90} + \frac{x_3}{100} \leq 10 \\
 & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0
\end{array}$$

Ejercicio 4 ***Problema de asignación de recursos:*** *Una empresa produce cuatro tipos de productos denominados A, B, C y D. Las necesidades de materia prima, las tasas de producción (en piezas por hora), espacio para su almacenamiento y beneficio vienen dadas en la tabla:*

	A	B	C	D
$Materia\ prima(\frac{kg}{pieza})$	4	3	5	6
$Tasas\ de\ producción(\frac{pieza}{hora})$	8	12	10	5
$Espacio(\frac{dm^2}{pieza})$	1	1.5	1	2
$Beneficio\ por\ pieza$	7	9	8	11

La cantidad de material disponible para los cuatro productos es de 300 kg, el espacio de almacenamiento es de 1200 dm^2 y son 80 horas por día el tiempo de producción.

1. *Formular un modelo de programación lineal que haga máximo el beneficio.*
2. *Si la compañía se siente satisfecha con que el beneficio esté por encima de 400 unidades monetarias, formular un modelo en el que se utilice la menor cantidad de materia prima posible.*

Parte 1

Paso 1

x_1 = unidades del producto A, $\quad x_2$ = unidades del producto B

x_3 = unidades del producto C, $\quad x_4$ = unidades del producto D

Paso 2

$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 300$

$x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 1200$

$8x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 80$

Paso 3

Las variables han de ser no negativas y enteras.

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$

Paso 4

La función que hay que maximizar es el beneficio:

$z = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4$

El modelo resulta

$$\begin{array}{ll} \max & z = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 \\ \text{s.a.} & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 300 \\ & x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 1200 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 80 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \quad \text{y enteras} \end{array}$$

Parte 2

$$\begin{array}{ll} \min & z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{s.a.} & 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 \geq 400 \\ & x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 1200 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 5x_4 \leq 80 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \quad \text{y enteras} \end{array}$$

Ejercicio 5 ***Problema del corte óptimo:*** *Una fábrica produce bobinas de papel de 500 metros de longitud y 1 metro de ancho. Se ha estimado que la demanda para el mes próximo es de:*

500 bobinas de 20 cm de ancho

400 bobinas de 40 cm de ancho

250 bobinas de 40 cm de ancho

300 bobinas de 70 cm de ancho

Todas las bobinas son de 500 metros y el fabricante debe cortar las bobinas de 1 metro de acuerdo con el ancho de las peticiones.

Construir un modelo lineal que determine el corte óptimo de manera que el número de bobinas que fabrique (de 1 metro) sea mínimo.

Paso 1

La siguiente tabla indica las distintas formas en que se pueden cortar las bobinas de un metro de acuerdo con las distintas medidas de la demanda. No se consideran los cortes que estén mejorados por los dados en la tabla. Las variables representan el número de bobinas que se han de cortar con el corte propuesto:

x_i	20 cm	30 cm	40 cm	70 cm	cm sobrantes
x_1	5	-	-	-	-
x_2	3	1	-	-	10
x_3	3	-	1	-	-
x_4	2	2	-	-	-
x_5	1	-	2	-	-
x_6	1	-	-	1	10
x_7	-	3	-	-	10
x_8	-	2	1	-	-
x_9	-	1	-	1	-
x_{10}	1	1	1	-	-

Paso 2

Bobinas de 20 cm: $5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_{10} \geq 500$

Bobinas de 30 cm: $x_2 + 2x_4 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 + x_{10} \geq 400$

Bobinas de 40 cm: $x_3 + 2x_5 + x_8 + x_{10} \geq 250$

Bobinas de 70 cm: $x_6 + x_9 \geq 300$

Paso 3

Variables enteras y no negativas.

Paso 4

Minimizar el número de bobinas:

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}.$$

El modelo a resolver sería:

$$\begin{array}{ll}
\min & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \\
\text{s.a.} & 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_{10} \geq 500 \\
& x_2 + 2x_4 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 + x_{10} \geq 400 \\
& x_3 + 2x_5 + x_8 + x_{10} \geq 250 \\
& x_6 + x_9 \geq 300 \\
& \forall i,\ x_i \geq 0,\ x_i \text{ enteras}
\end{array}$$

Ejercicio 6 ***Problema de planificación de mano de obra:*** *En una fábrica en la que se trabaja las 24 horas del día hay seis turnos de trabajo que comienzan cada 4 horas, iniciándose el primero a las 6:00 h. de la mañana con una duración de 8 horas cada uno. Por los productos que se elaboran y el tipo de máquina que se utiliza, se necesita para cada turno un número diferente de trabajadores, que viene recogido en la tabla:*

Turno	*Horas*	*Trabajadores necesarios*
1	06 – 10	90
2	10 – 14	210
3	14 – 18	220
4	18 – 22	160
5	22 – 02	110
6	02 – 06	50

Construir un modelo lineal que permita planificar la distribución de trabajadores de manera que su número sea mínimo.

$x_1 =$ n^o de trabajadores del turno 1 $x_2 =$ n^o de trabajadores del turno 2

$x_3 =$ n^o de trabajadores del turno 3 $x_4 =$ n^o de trabajadores del turno 4

$x_5 =$ n^{o}de trabajadores del turno 5 $x_6 =$ n^o de trabajadores del turno 6

El modelo sería:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{s.a.} & x_1 + x_6 \geq 90 \\
& x_1 + x_2 \geq 210 \\
& x_2 + x_3 \geq 220 \\
& x_3 + x_4 \geq 160 \\
& x_4 + x_5 \geq 110 \\
& x_5 + x_6 \geq 50 \\
& \forall i,\ x_i \geq 0,\ \ x_i \text{ entera}
\end{array}
$$

Ejercicio 7 *Resolver gráficamente*

$$
\begin{array}{lll}
max & z = & 4x_1 + x_2 \\
& s.a: & x_1 + x_2 \geq 6 \\
& & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
& & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

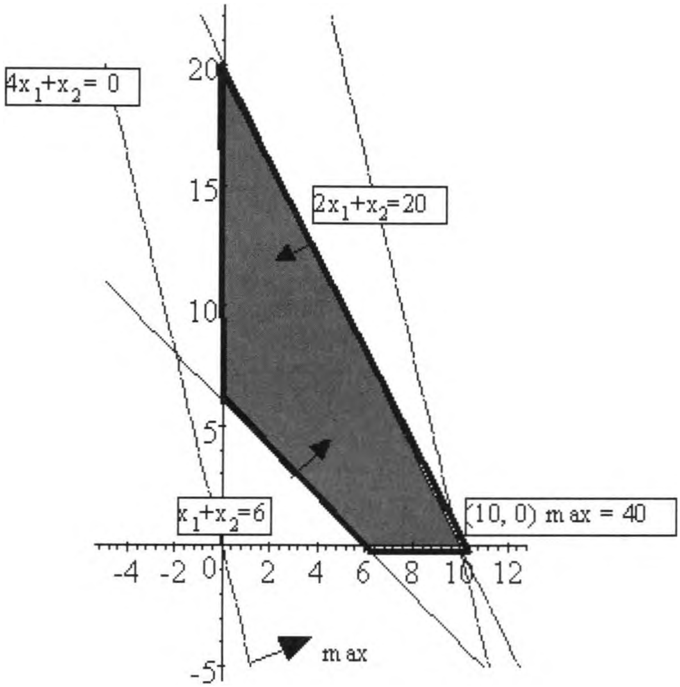


Figura 1.1: Región factible ejercicio 7.

La región factible está representada en gris en la figura 1.1 de la página 272.

Los vértices son los puntos siguientes:

$(6,0)$ donde la función objetivo toma el valor $4{\times}6+0=24$

$(0,6)$ donde la función objetivo toma el valor $4{\times}0+6=6$

$(0,20)$ donde la función objetivo toma el valor $4{\times}0+20=20$

$(10,0)$ donde la función objetivo toma el valor $4{\times}10+0=40$.

$z=40$, es por tanto el mejor valor para la función objetivo.

En la figura 1.1 de la página 272, está representada la región factible del P.L. y el desplazamiento de la función objetivo hacia el óptimo, que se obtiene si $x_1 = 10,\ \ x_2 = 0,\ \ z = 40$.

Ejercicio 8 *Resolver gráficamente*

$$\begin{array}{lll} min & z = & x_1 + 2x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ & & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

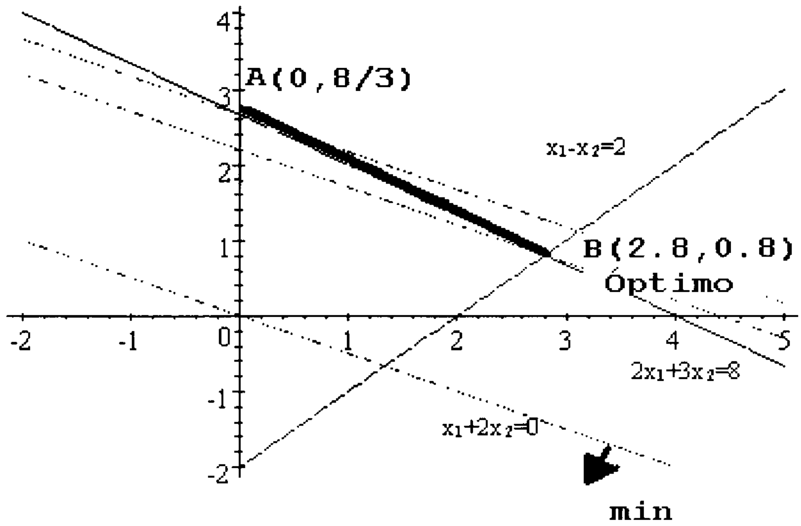


Figura 1.2: La región factible está representada en trazo más grueso.

Determinar la solución si se restringen las variables x_1 y x_2 a que tomen únicamente valores enteros.

Si representamos la región factible de este programa lineal, ver la figura 1.2 de la página 273, obtenemos que la región factible queda reducida al segmento lineal cerrado que une los puntos $A\ (0, \frac{8}{3})$ y $B\ (2.8\ ,\ 0.8)$.

El valor del óptimo es $z = x_1 + 2x_2 = 2.8 + 2 \times 0.8 = 4.4$, si no tuviese la restricción de integridad, como puede verse en la figura 1.2 de la página 273.

Como esta solución no es entera, debemos calcular los valores enteros de la región factible. En este caso el único valor entero de la región factible es $(1, 2)$, pues el punto $(2, 1)$ no cumple la restricción $2x_1 + 3x_2 = 8$, y por tanto no pertenece a la región factible.

Por tanto, si tenemos en cuenta que las variables deben ser enteras, la única solución entera sobre la región factible es $(1,\ 2)$ con un valor del objetivo $z = x_1 + 2x_2 = 1 + 2 \times 2 = 5$.

Ejercicio 9 *Resolver gráficamente*

$$\begin{array}{lll} min & z = & -4x_1 + x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & & x_1 - 3x_2 \leq 15 \\ & & -x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

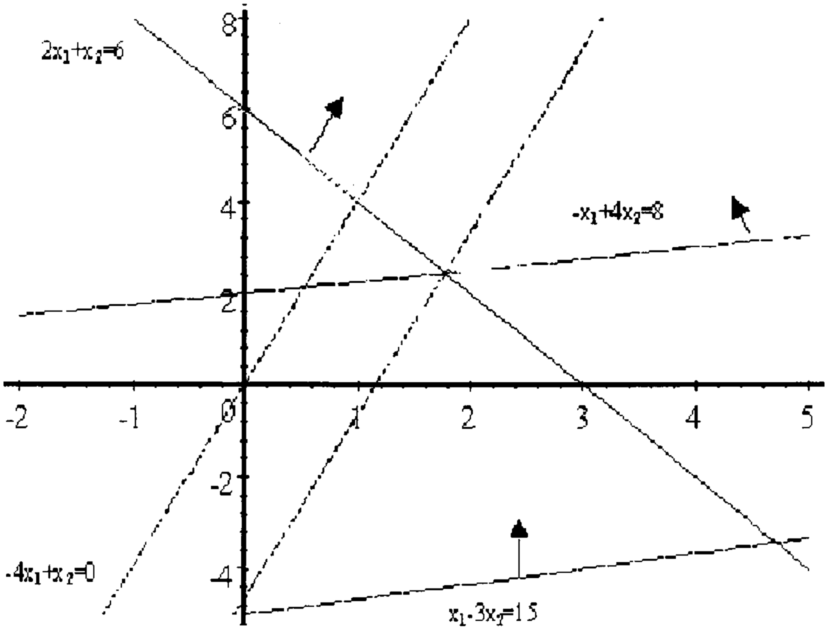


Figura 1.3: Región factible ilimitada

Si representamos la región factible de este programa lineal, ver la figura 1.3 de la página 274, obtenemos que la región factible es ilimitada.

Si desplazamos la función objetivo en sentido minimizante, el problema es no acotado, y la solución óptima es ilimitada, como podemos observar en la figura 1.3 de la página 274

Nota: En este caso, si el problema fuese de maximización, también se obtendría un programa no acotado.

Ejercicio 10 *Resolver gráficamente*

$$\begin{array}{lll} max & z = & -x_1 + 4x_2 \\ & s.a: & -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & & x_2 \geq -3 \\ & & x_1 \ \textit{no restringida} \end{array}$$

El óptimo se alcanza en el punto $A\ \left(-\frac{8}{7}, \frac{18}{7}\right)$, como podemos observar en la figura 1.4 de la página 275, con un valor para la función objetivo:

$z = \left(-\frac{8}{7}\right) + 4\left(\frac{18}{7}\right) = \frac{80}{7}.$

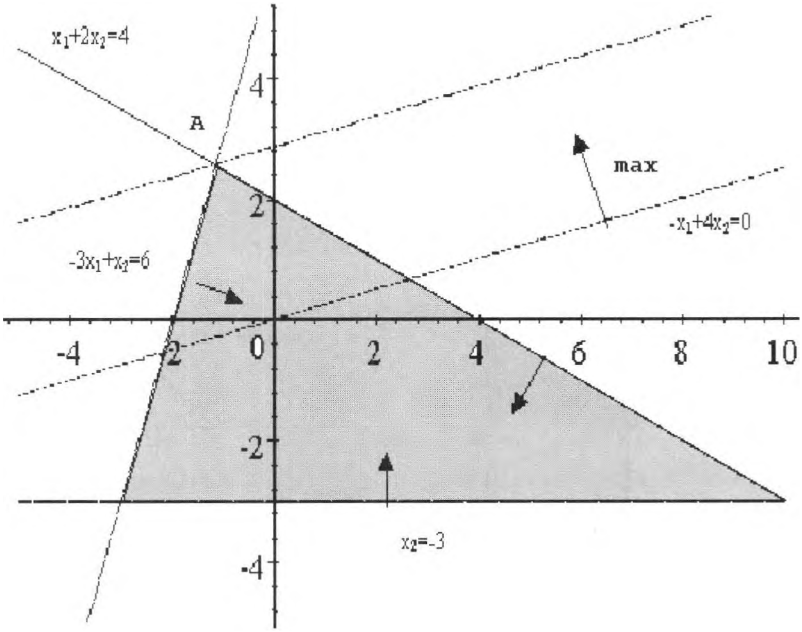


Figura 1.4: Región factible ejercicio 10.

Ejercicio 11 *Una pequeña empresa fabrica ramos de novia y centros de mesa. Tiene tres empleados y cada uno de ellos trabaja 40 horas semanales. Los ramos requieren 3 horas de trabajo y los centros 4. Además se ha decidido que no se fabricarán más de 12 ramos, ni más de 32 centros cada semana, pues de esta forma se venderán todas las piezas fabricadas. Cada ramo de novia reporta una ganancia de 30 u.m. y cada centro de mesa de 60 u.m. Se pide:*

1. *Plantear el problema de P.L. que sirva para saber cuantos ramos y centros se deben fabricar para obtener una ganancia semanal máxima.*
2. *Resolver este problema usando un procedimiento geométrico.*
3. *¿Cuáles son las soluciones básicas factibles?*

1) Si denotamos las variables de decisión:

$$X = \text{Ramos de novia} \qquad Y = \text{Centros de mesa}$$

$$\begin{array}{lc}
\max & z = 30X + 60Y \\
sa: & X \leq 12 \\
 & Y \leq 32 \\
 & 3X + 4Y \leq 120 \\
 & X \geq 0,\ Y \geq 0,\ \ X, Y \text{ enteras}
\end{array}$$

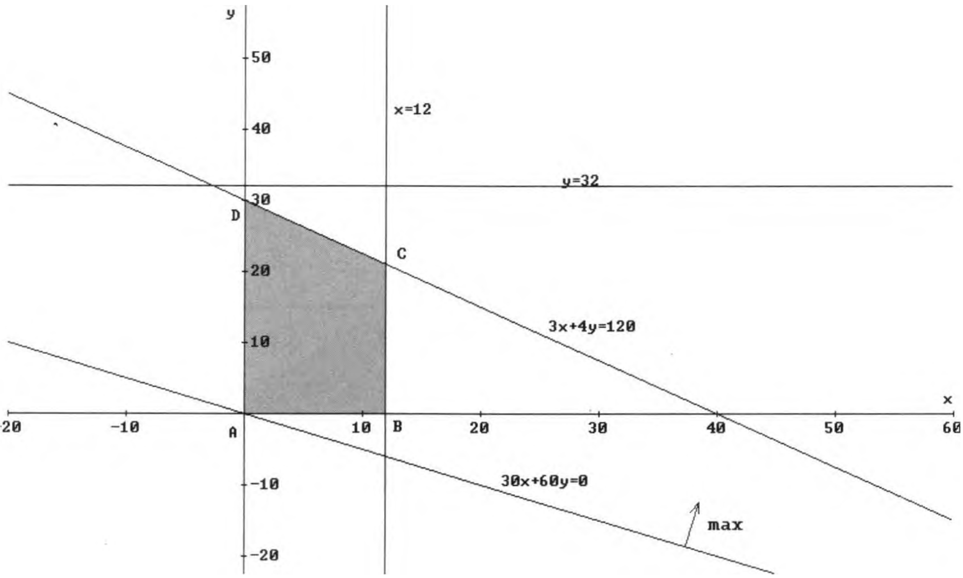


Figura 1.5: Región factible ejercicio 11.

2) Si utilizamos el método geométrico, entonces tendremos que representar las restricciones y la función objetivo.

Deberemos calcular los vértices de la región factible, y analizar el desplazamiento de la función objetivo.

Como las variables deben ser enteras, si los vértices tienen coordenadas enteras, entonces el problema se podrá resolver usando el método geométrico. En otro caso deberemos utilizar un algoritmo específico para su resolución (algoritmo de programación entera).

En este problema los vértices de la región factible tienen coordenadas enteras.

La región factible de este programa lineal, puede verse en la figura 1.5 de la página 276.

La región factible está limitada por los puntos $A(0,0)$, $B(12,0)$, $C(12,21)$ y $D(0,30)$.

El mejor valor se alcanza en el punto $D(0,30)$ con un valor de

$$z = 30 \times 0 + 60 \times 30 = 1800 \text{ unidades monetarias.}$$

3) Las soluciones básicas son los vértices de la región factible:

$$A(0,0),\ B(12,0),\ C(12,21) \text{ y } D(0,30).$$

Ejercicio 12 *Una fábrica produce aceite y vinagre. Tiene tres empleados y cada uno de ellos trabaja 200 horas mensuales. Cada litro de aceite requiere 3 minutos de trabajo, y el de vinagre 4 minutos. Además se ha decidido que no se fabricarán más de 2400 litros de aceite ni más de 6400 litros de vinagre cada mes, pues de esta forma se venderá toda la producción. Cada litro de aceite reporta una ganancia de 100 u.m. y cada litro de vinagre de 50 u.m. Se pide:*

a) Plantear el problema de P.L. que sirva para saber cuántos litros de aceite y vinagre se deben fabricar para obtener una ganancia mensual máxima.

b) Resolver este problema usando un procedimiento geométrico.

c) ¿Cuáles son las soluciones básicas factibles?

a) Si llamamos las variables de decisión del problema:

$$X = \text{litros de aceite} \qquad Y = \text{litros de vinagre}$$

Entonces el programa lineal asociado al problema inicial es:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 100X + 50Y \\ sa: & X \leq 2400 \\ & Y \leq 6400 \\ & 3X + 4Y \leq 36000 \\ & X \geq 0,\ Y \geq 0\ ;\ X, Y \text{ enteras} \end{array}$$

b) Si lo resolvemos usando el método geométrico tendremos la figura 1.6 de la página 278.

La región factible puede verse en la figura 1.6 de la página 278.

Dicha región está limitada por los puntos $A(0,0)$, $B(2400,0)$, $C(2400,6400)$ y $D(0,6400)$.

El mejor valor se alcanza en el punto $C(2400,6400)$ con un valor de la función objetivo:

$$z = 100 \times 2400 + 50 \times 6400 = 560\,000 \quad \text{unidades monetarias.}$$

3) Las soluciones básicas factibles son los vértices de la región factible:

(0,0) (0,6400) (2400,0) y (2400,6400).

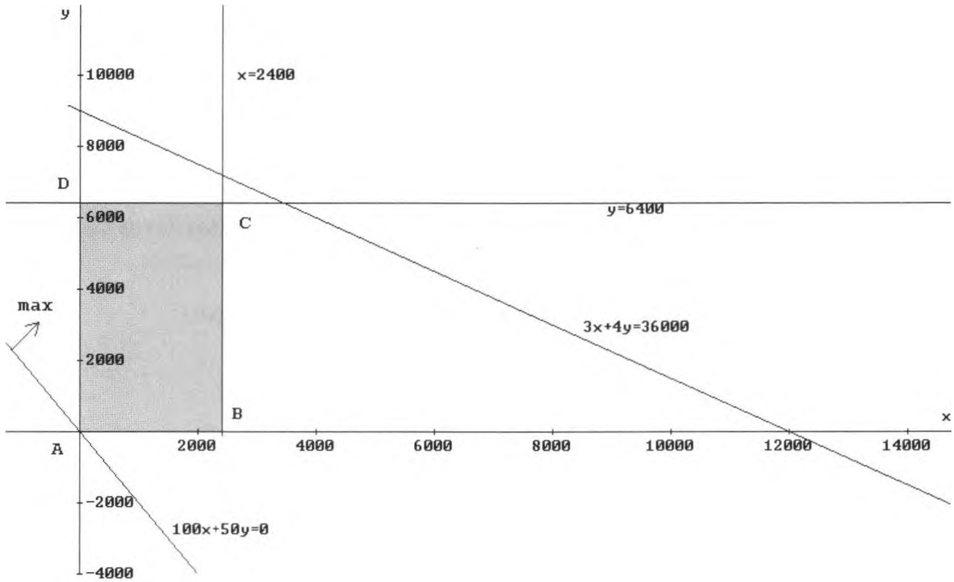


Figura 1.6: Región factible ejercicio 12.

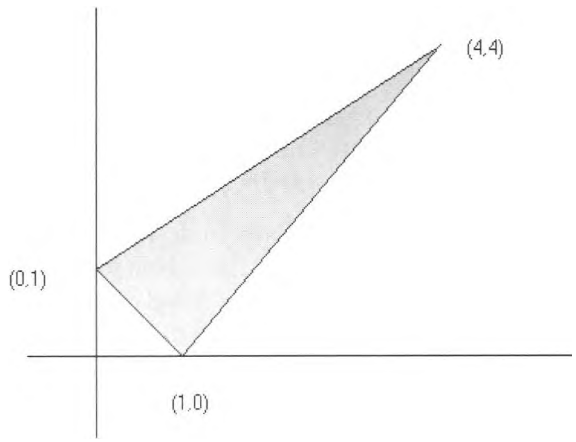
1.2 Ejercicios Propuestos

1. Una empresa dispone de dos plantas industriales P_1 y P_2, que producen respectivamente 200 y 300 unidades de un producto homogéneo. La empresa dispone de tres almacenes A_1, A_2 y A_3, con una demanda respectiva de 125, 200 y 175 unidades de ese producto. El transporte de cada unidad del producto desde cada planta a cada almacén viene dado por la siguiente tabla:

	A_1	A_2	A_3
P_1	7	5	8
P_2	6	6	9

Construir un modelo de programación lineal que determine la distribución de los productos entre las plantas industriales y los almacenes, de manera que el coste total de transporte sea mínimo.

2. Construir un sistema de inecuaciones cuyo conjunto solución corresponda con el señalado en la figura adjunta (incluyendo los bordes).



3. Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 4 \\ x - 4y \leq 2 \end{cases}$$

4. Hallar $z_1 = max\{2x + y\}$ y $z_2 = min\{2x + y\}$ siendo x e y variables no negativas sujetas a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x - y \geq -4 \\ 3x - 4y \leq 6 \end{cases}$$

5. Carlos y Marta desean alquilar un automóvil para hacer una excursión. En una agencia les cobran 45.08 euros fijos más 0.15 euros por kilómetro recorrido. En otra no exigen cantidad inicial, pero cobran 0.48 euros por cada kilómetro recorrido. Por último en una tercera tienen una tarifa única de 72.12 euros sin límite de kilómetros. ¿Qué agencia les interesa más dependiendo de los kilómetros que tenga la excursión?

6. Se quiere organizar un puente aéreo para transportar 1600 personas y 90 toneladas de equipaje. La empresa dispone de dos tipos de aviones: doce del tipo A y nueve del tipo B. Los del tipo A pueden transportar como máximo 200 personas y 6 toneladas de equipaje, y los del tipo B 100 personas y 15 toneladas de equipaje. El coste del alquiler de cada avión del tipo A es 24000 euros y del tipo B 6000 euros. ¿De qué manera será mínimo el coste?

7. En una especie de insectos el número de larvas en una población no puede ser menor que la mitad ni mayor que el doble del número de adultos. En cierta zona estos insectos pueden consumir sin desequilibrios hasta 10 kg. de hojas verdes diarios. Calcular el número máximo de insectos adultos que puede soportar dicha zona sabiendo que entre una larva y un insecto adulto consumen diariamente 100 g. de hojas, pero que la larva consume 4 veces más que el adulto.

8. Una papelería situada cerca de un centro escolar vende alrededor de 150 cuadernos a la semana, de dos tipos diferentes: G (grande) y P (pequeño). El cuaderno del tipo G le cuesta 0.5 euros y lo vende a 0.6 euros, y el del tipo P le cuesta 0.42 euros y lo vende a 0.48 euros. El dueño no quiere invertir en cuadernos más de 66.5 euros a la semana ni que el número de cuadernos que se compran supere las 150 unidades. ¿Cuántos cuadernos de cada tipo le conviene comprar para que la ganancia sea máxima?

9. Un automóvil debe recorrer un trayecto de 100 km. en menos de 45 minutos. Puede circular a 80 km/h o a 140 km/h. Sabiendo que gasta 6 litros de gasolina cada 100 km cuando va a 80 km/h y 7 litros cuando va a 140 km/h, hallar el tiempo que debe circular a 80 km/h para que el gasto de gasolina sea mínimo. Calcular dicho gasto.

10. En un laboratorio existen dos contadores de bacterias disponibles. El contador A puede ser manejado por un alumno que gana dos dólares por hora, y es capaz de verificar 6 muestras en una hora. El contador B, mas rápido pero más complicado, sólo puede ser manejado por una persona bien preparada que gana 5 dólares por hora, y verifica 10 muestras en una hora. Tenemos 1000 muestras para verificar dentro de un periodo de tiempo que no exceda de 80 horas. ¿Cuánto tiempo debe ser empleado cada contador para llevar a cabo la tarea con un coste mínimo, y cuál es dicho coste?

11. Tres artesanos construyen dos modelos A y B de un barco en miniatura. Los barcos del modelo A requieren dos horas de trabajo del primer artesano y cuatro del segundo y los del modelo B dos horas de trabajo del primer artesano y dos del tercero. El número de horas semanales que puede trabajar cada uno es de 20, 20 y 16 respectivamente. Considerando que el coste de los materiales es prácticamente el mismo para los dos modelos y que el A se vende a 360 euros cada uno y el B a 240 euros, determinar el número de barcos de cada clase que deben construir semanalmente para que el beneficio sea máximo. ¿Cómo se repartirán los beneficios si valoran por igual la hora de trabajo y el coste de los materiales es de 60 euros por unidad?

12. D. José decide emplear hasta un máximo de 18000 euros en la adquisición de acciones de dos empresas X e Y. El precio de las acciones es en ambos casos de 6 euros. Ambas empresas dedican sus actividades a los sectores seguros, inmobiliario e industrial según los siguientes porcentajes:

Empresa	Seguros	Inmobiliario	Industrial
X	35 %	45 %	20 %
Y	30 %	25 %	45 %

D. José no quiere invertir más del 40 % de su capital en el sector industrial ni más del 35 % en el sector inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si la empresa X prevé arrojar un dividiendo de 0.72 euros por acción y la empresa Y de 0.6 euros por acción?

13. En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa con veinte minutos de variedades y un minuto de publicidad capta

30.000 espectadores mientras que otro programa con 10 minutos de variedades y 1 minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado periodo la dirección de la red decide dedicar 80 minutos de variedades y los anunciantes 6 minutos de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

14. Desde dos fabricas de ladrillos A y B, cuya producción mensual es de 10 y 9 millones de unidades respectivamente, deben distribuirse a tres puntos de venta P, Q y R cuyas necesidades mensuales son, respectivamente 7, 6 y 6 millones de unidades. El coste del transporte por millar de ladrillos viene especificado en el cuadro siguiente:

	P	Q	R
A	100	200	100
B	200	100	300

Programar el transporte para que el coste sea mínimo.

15. Una refinería de petróleo destila dos tipos de crudo: uno procedente de Arabia y el otro de Venezuela, cuyos precios son de 24 y 20 dólares el barril respectivamente. De cada uno de los dos crudos se obtiene tres productos: gasolina super, gasolina normal y gas-oil. Del crudo procedente de Arabia se obtiene: 40% de super, 21% de normal y 24 % de gasoil, desaprovechándose el resto. Del crudo procedente de Venezuela se obtiene: 30 % de super, 42% de normal y 18 % de gasoil, desaprovechándose el resto. Sabiendo que se tienen que suministrar 555.000 barriles de super, 420.000 de normal y 300.000 de gas-oil. ¿Qué cantidad de crudo de ambos tipos hemos de comprar para hacer el suministro con la mínima inversión posible?

16. Formular un problema de programación lineal de dos variables, que se resuelva a partir del siguiente conjunto de inecuaciones:

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \geq y,\ x + y \leq 10$$

siendo $F(x, y) = 3x+5y$ la función a optimizar (máximo). Resolver el problema una vez formulado.

17. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las tres siguientes inecuaciones:

$$x \leq 2\ ; \quad x \geq -2\ ; \quad y \leq 1.$$

18. Describir mediante un sistema de desigualdades la región interior del polígono convexo con vértices en los puntos: O(0,0) , A(0,4), B(4,0), C(3,3).

19. Escribe inecuaciones que definan una región plana cerrada de modo que los puntos (1,0) y (0,1) pertenezcan a dicha región, y que los puntos (0,0) y (2,2) no pertenezcan. Haz una representación gráfica de la región que elijas.

20. Escribe un conjunto de inecuaciones que tengan como solución común el interior de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 respectivamente y se apoyan en los ejes coordenados X e Y. (Puedes elegir cualquiera de las posibles colocaciones).

21. Dada la región del plano definida por las inecuaciones: $x+y-1 \geq 0$; $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq y \leq 2$. ¿Para qué valores de la región es máxima la función $Z = 5x + 2y$?

22. Maximizar la función $F(x, y) = 3x + 2y$ en el dominio $y + 2x \geq 0$; $3y - x \leq 1$; $2 \geq x \geq 0$; $y \geq 0$.

23. Considera la región del primer cuadrante determinada por las inecuaciones:

$$x + y \leq 8 \; ; \; x + y \geq 4 \; ; \; x + 2y \geq 6 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0.$$

a) Dibujar la región del plano que definen, y calcular sus vértices.

b) Hallar el punto de esa región en el que la función $F(x, y) = 3x + 2y$ alcanza el valor mínimo y calcular dicho valor.

24. a) Representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes inecuaciones lineales:

$$x + 2y \leq 10; \; x + y \geq 2 \; ; \; x \leq 8 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0.$$

b) Hallar el máximo y el mínimo de $F(x, y) = x - 3y$, sujeto a las restricciones representadas por las inecuaciones del apartado anterior.

25. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 2y - 2$, sometida a las restricciones:

$$x + y - 2 \geq 0 \; ; \; x - y + 2 \geq 0 \; ; \; x \leq 3 \; ; \; y \geq 1; \; y \leq 3.$$

26. Resolver gráficamente el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = 0.75x + y \\ \text{Sujeto a :} & x + 3y \leq 15 \\ & 5x + y \leq 20 \\ & 3x + 4y \leq 24 \\ & x \geq 0 \; ; \; y \geq 0. \end{array}$$

¿Es única la solución?

27. Sea el recinto poligonal convexo definido por el sistema de inecuaciones:

$$x - 4y \geq -4 \; ; \; x + 2y - 4 \leq 0 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; y \geq 0.$$

a) Dibujarlo y hallar sus vértices.

b) Razonar si es posible maximizar en él la función $F(x, y) = x + 2y$.

c) En caso afirmativo, calcular el valor óptimo correspondiente y puntos dónde se alcanza.

28. Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 unidades monetarias por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 unidades monetarias por

impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. Lo que se pregunta el estudiante es: ¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

29. En una fábrica de bombillas se producen dos tipos de ellas, las de tipo normal valen 3 euros y las halógenas 5 euros. La producción está limitada por el hecho de que no pueden fabricarse al día más de 400 normales y 300 halógenas ni más de 500 en total. Si se vende toda la producción, ¿cuántas de cada clase convendrá producir para obtener la máxima facturación?

30. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer al menos el mismo número de veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer al menos 60 vuelos y a lo sumo 200. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana 1800 euros y 1200 euros por cada viaje del B. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

31. Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene dos naves. En la nave A, para hacer la carrocería de un camión, se invierten 7 días-operario, para fabricar la de un coche se precisan 2 días-operario. En la nave B se invierten tres días operario tanto en carrocerías de camión como de coche. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días operario, y la nave B de 270 días-operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 36000 euros y por cada automóvil 12000 euros, ¿cuántas unidades de cada uno se deben producir para maximizar las ganancias?

32. Un pastelero tiene 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27'5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P y Q. Para hacer una docena de pasteles de tipo P necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 de mantequilla y para hacer una docena de tipo Q necesita 6 kg de harina, 0'5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. El beneficio que obtiene por una docena de tipo P es 20 y por una docena de tipo Q es 30. Halla, utilizando las técnicas de programación lineal, el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo.

33. Una empresa fabrica dos tipos de rotuladores, de la clase A a 1.2 euros la unidad y de la clase B a 0.9 euros. En la producción diaria se sabe que el número de rotuladores de la clase B no supera en 1000 unidades a los de la A; además, entre las dos clases no superan las 3000 unidades y la de la clase B no bajan de 1000 unidades por día. Hallar el costo máximo y mínimo de la producción diaria.

34. Una compañía fabrica dos modelos de sombrero: Cordobés y Charro. La fabricación de los sombreros se realiza en las secciones de moldeado, pintura y montaje. La fabricación de cada modelo Cordobés requiere 2 horas de moldeado,

3 de pintura y una de montaje. La fabricación del modelo Charro requiere 3 horas de moldeado, 2 de pintura y una de montaje. Las secciones de moldeado y pintura disponen, cada una, de un máximo de 1.500 horas cada mes, y la de montaje de 600. Si el modelo Cordobés se vende a 60 euros y el modelo Charro a 72 euros, ¿qué cantidad de sombreros de cada tipo ha de fabricar para maximizar el beneficio mensual?

35. Cada mes una gran empresa puede gastar, como máximo, 1 millón de euros en salarios y 1.8 millones de euros en energía (electricidad y gasoil). La empresa sólo elabora dos tipos de productos A y B. Por cada unidad de A que elabora gana 80 euros y 50 euros por cada unidad de B. El coste salarial y energético que acarrea la elaboración de una unidad del producto A y una del B aparece en la siguiente tabla:

	A	B
Coste salarial	200	100
Coste energético	100	300

Se desea determinar cuántas unidades de cada uno de los productos A y B debe producir la empresa para que el beneficio mensual sea máximo.¿Cuál es el máximo beneficio mensual?

36. Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Por otra parte, el triple de la producción de vinagre sumado con cuatro veces la producción de vino se mantiene siempre menor o igual a 18 unidades. Halla el número de camiones cisterna de cada producto que se deben producir mensualmente para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada camión cisterna de vino deja un beneficio mensual de 800 euros y cada camión cisterna de vinagre deja un beneficio mensual de 200 euros.

37. Un hipermercado necesita como mínimo 16 cajas de langostino, 5 cajas de nécoras y 20 de percebes. Dos mayoristas, A y B, se ofrecen al hipermercado para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden dicho marisco en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de langostinos, 1 de nécoras y 2 de percebes. Por su parte, B envía en cada contenedor 2, 1 y 7 cajas respectivamente. Cada contenedor que suministra A cuesta 1262 euros, mientras que los del mayorista B cuestan 1800 euros cada uno. ¿Cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades mínimas con el menor coste posible?

38. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son 8, 12, 9 unidades respectivamente. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando los productos A y B cuyos contenidos por kilogramo son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste(kg)
Producto A	2	6	1	6 euros
Producto B	1	1	3	4 euros

¿Cuántos kilogramos de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?

39. Podemos comprar paquetes de abono A o B. Cada paquete contiene las unidades de potasio (K), fósforo (P) y nitrógeno (N) indicadas en la tabla, donde se da el precio del paquete.

Marca	K	P	N	Precio
A	4	6	1	15
B	1	10	6	24

¿En qué proporción hay que mezclar ambos tipos de abono para obtener al mínimo precio un abono que contenga 4 unidades de K, 23 de P y 6 de N?

40. Dos mataderos, P y Q, se encargan de suministrar la carne consumida semanalmente en tres ciudades, R, S y T: 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. El matadero P produce cada semana 26 toneladas de carne, y el Q, 30. Si sabemos que los costes de transporte, por tonelada de carne, desde cada matadero a cada ciudad, son los reflejados en la siguiente tabla:

	R	S	T
P	1	3	1
Q	2	1	1

Plantear el problema de programación lineal que resuelve la distribución de transporte con un coste mínimo.

41. Desde dos almacenes A y B, se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste del transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado por el siguiente cuadro:

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10	15	20
B	15	10	10

Planificar el transporte para que el coste sea mínimo.

42. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos; por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 20 electricistas y 30 mecánicos. El beneficio de la empresa al año es 25000 euros por electricista y 20000 euros por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

43. Una empresa fabrica dos tipos de colonia: A y B. La primera contiene un 15% de extracto de jazmín, un 20% de alcohol y el resto es agua y la segunda lleva un 30% de extracto de jazmín, un 15% de alcohol y el resto es agua. Diariamente se dispone de 60 litros de extracto de jazmín y de 50 litros de alcohol. Cada día se pueden producir como máximo 150 litros de la colonia B. El precio de venta por litro de la colonia A es de 3 euros y el de la colonia B es 12 euros. Hallar los litros de cada tipo que deben producirse diariamente para que el beneficio sea máximo.

44. Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses con 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 48 euros y el de cada uno de los pequeños 36 euros. ¿Cuántos autobuses de cada clase convendrá alquilar para que el viaje resulte lo más económico posible?

45. A una persona que quiere adelgazar se le ofrecen dos productos A y B para que tome una mezcla de ambos con las siguientes recomendaciones: No debe tomar más de 150 g de la mezcla ni menos de 50 g. La cantidad de A debe ser igual o superior a la de B. No debe incluir más de 100 g de A. Si 100g de A contiene 30 mg de vitaminas y 450 calorías y 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas y 150 calorías:

    a) ¿Cuántos gramos de cada producto debe mezclar para obtener el preparado que sea más rico en vitaminas?

    b) ¿Y el más pobre en calorías?

46. Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Si se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos respectivamente y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B, calcule los kilos de A y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de A vale 1.2 euros y uno de B 6 euros. ¿Puede eliminarse alguna restricción?

47. Los precios de venta de dos productos A y B están en la misma relación que 7 y 6. La producción de estos está definida por las siguientes condiciones: La producción de A es mayor o igual que la mitad de B y menor o igual que el doble de B. La producción total es tal que si sólo se produce A, se producen 10

kg, y si sólo se produce B, se producen 15 kg. Y si se producen conjuntamente, la producción máxima se encuentra en la recta que une los puntos anteriores. Dar la función objetivo de la venta de ambos productos. Expresar mediante inecuaciones el recinto definido. Determinar los kilos que se han de producir de cada producto para obtener el máximo beneficio.

48. Un carpintero tiene que construir mesas rectangulares cuyas dimensiones no sobrepasen 2 metros y tales que la suma de su dimensión mayor y el doble de la menor no sobrepase 4 metros. ¿Cuál es el máximo valor del perímetro de dichas mesas?

49. Una compañía de petróleos produce en sus refinerías gasóleo (G), gasolina normal (N) y gasolina súper (S) a partir de dos tipos diferentes de crudos C_1 y C_2. Las refinerías están dotadas de dos tipos de tecnologías, la tecnología nueva utiliza por cada sesión de destilación 7 unidades de C_1 y 12 de C_2 para producir 8 unidades de G, 6 de N y 5 de S, mientras que con la tecnología antigua se obtienen en cada destilación 10 unidades de G, 7 de N y 4 de S con un gasto de 10 unidades de C_1 y 8 de C_2 (en ambos casos se admiten valores fraccionarios en la producción).

    Según estudios de mercado, la compañía estima que debe producir al menos 900 unidades de G, 300 de N y entre 800 y 1700 de S. La disponibilidad de crudo C_1 es de 1400 unidades y la de C_2 de 2000 unidades. Los beneficios por unidad producida de G, N y S son respectivamente de 4, 6 y 7 unidades monetarias.

    Construir el modelo de programación lineal para determinar cómo utilizar ambos procesos de destilación y el crudo disponible, para que el beneficio sea lo mayor posible.

1.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

   Si denominamos x_{ij} = número de unidades transportadas de la Planta i al Almacén j. Entonces el modelo de programación lineal queda:

$$
\begin{array}{ll}
Min & z = 7x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 6x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23} \\
\text{s.a.} & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\
 & x_{11} + x_{21} = 125 \\
 & x_{12} + x_{22} = 200 \\
 & x_{13} + x_{23} = 175 \\
 & x_{ij} \ \text{variables enteras y positivas}
\end{array}
$$

2. **Solución:**

   El sistema de inecuaciones es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \geq 1 \\ 4x-3y \leq 4 \\ -3x+4y \leq 4 \end{array}\right\}$$

3. **Solución:**

   El sistema de inecuaciones nos proporciona la región triangular delimitada por los vértices A(0,2) , B(2,0) y C(-10,-3).

4. **Solución:**

   El valor que proporciona el máximo $z_1 = +\infty$, o sea, es un problema no acotado, y el valor para el mínimo $z_2 = 4$ cuando $x = 0, \quad y = 4$.

5. **Solución:**

   La decisión más conveniente sería la siguiente:

   Hasta los 150 km. conviene la Agencia 2.

   Desde los 150 km. hasta los 180 km. conviene la Agencia 1.

   A partir de los 180 km. conviene la Agencia 3.

6. **Solución:**

   La solución óptima del problema consiste en contratar 4 aviones del tipo A y 8 aviones de tipo B. Así el gasto total del transporte asciende a 144000 euros.

7. **Solución:**

   El número máximo de insectos adultos es de 56. Y el número de larvas es de 111.

8. **Solución:**

   Debe comprar 133 cuadernos grandes y ninguno pequeño, siendo la ganancia máxima de 13.3 euros.

9. **Solución:**

   La solución es ir a 80 km/h durante 5 minutos (0.833333 h.), y a 140 km/h durante 40 minutos (0.6666667 h.)

10. **Solución:**

    Este problema no tiene solución factible.

11. **Solución:**

    La solución es hacer 5 barcos del modelo A y 5 barcos del modelo B, y se obtendrán 3000 euros por la venta de los barcos. Si se descuenta el coste de los materiales que es de 60 euros por unidad, tendremos el beneficio neto: $3000 - 10 \times 60 = 2400$ euros. El artesano A tendrá que trabajar 20 horas para completar el trabajo, el artesano B debe dedicar otras 20 horas, y el artesano C dedicará 10 horas. Si se obtienen 2400 euros de beneficio neto, entre el total de horas de todos los artesanos que son 50 horas, tenemos que los beneficios por hora son de $2400/50 = 48$ euros por hora. Y por tanto cada artesano obtiene los siguientes beneficios:

Artesano 1	$48 \times 20 = 960$ euros.
Artesano 2	$48 \times 20 = 960$ euros.
Artesano 3	$48 \times 10 = 480$ euros.

12. **Solución:**

    Debe adquirir 1500 acciones de cada empresa.

13. **Solución:**

    La solución para maximizar el número de espectadores es emitir 2 veces el primer programa y 4 veces el segundo programa.

14. **Solución:**

    Si denominados:

    x_1 número de ladrillos que se transportan de A a P,

    x_2 número de ladrillos que se transportan de A a Q,

    x_3 número de ladrillos que se transportan de A a R,

    x_4 número de ladrillos que se transportan de B a P,

    x_5 número de ladrillos que se transportan de B a Q,

    x_6 número de ladrillos que se transportan de B a R.

    El problema de transporte queda como sigue:

$$\begin{array}{ll} Min & z = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 + 0.1x_5 + 0.3x_6 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \times 10^6 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 9 \times 10^6 \\ & x_1 + x_4 = 7 \times 10^6 \\ & x_2 + x_5 = 6 \times 10^6 \\ & x_3 + x_6 = 6 \times 10^6 \\ & \text{x}_i \quad \text{variables enteras y positivas} \end{array}$$

15. **Solución:**

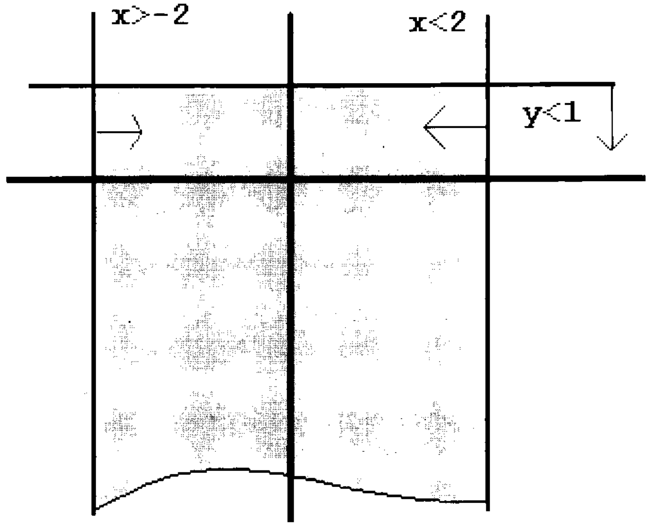
    Para minimizar la inversión, debemos comprar 1 millón de barriles de crudo procedente de Arabia y medio millón de barriles de crudo procedente de Venezuela.

16. **Solución:**

    La solución óptima del problema de programación lineal es $x = 5$, $y = 5$, con $F(5,5) = 40$.

17. **Solución:**

    El conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones es:



18. **Solución:**

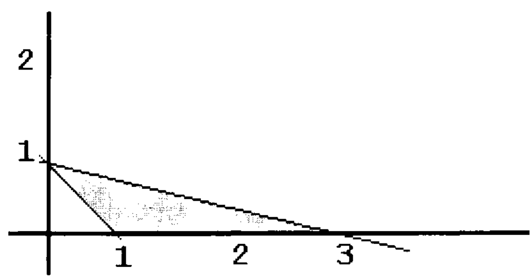
El sistema de desigualdades es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} 3x + y \leq 12 \\ x + 3y \leq 12 \\ x, \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

19. **Solución:**

El sistema de desigualdades y la región correspondiente son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} x + y \geq 1 \\ x + 3y \leq 3 \\ x. \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$



20. **Solución:**

Hay dos posibles colocaciones que dan lugar a los sistemas de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y \leq 2 \\ x, \quad y \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} x + 2y \leq 2 \\ x, \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

21. **Solución:**

El máximo de la función se alcanza si $x = 3, \ y = 2,$ con $Z = 19$.

22. **Solución:**

El máximo de la función se alcanza si $x = 2, \ y = 1,$ con $F(2, 1) = 8$.

23. **Solución:**

    (a) Los vértices de la región factible son $(0,4)$, $(2,2)$, $(6,0)$, $(8,0)$ y $(0,8)$.

    (b) La función F alcanza el mínimo en el punto $(0,4)$ y $F(0,4) = 8$.

24. **Solución:**

    (a) Los vértices de la región factible son $(0,2)$, $(2,0)$, $(8,0)$, $(8,1)$ y $(0,5)$.

    (b) La función F alcanza el mínimo en el punto $(0,5)$ y $F(0,5) = -15$.
    La función F alcanza el máximo en el punto $(8,0)$ y $F(8,0) = 8$.

25. **Solución:**

    El máximo de la función se alcanza si $x = 3,\ y = 3,$ con $F(3,3) = 7$.

    El mínimo de la función se alcanza si $x = 1,\ y = 1,$ con $F(1,1) = 1$.

26. **Solución:**

    El máximo de la función se alcanza si $x = \frac{12}{5},\ y = \frac{21}{5},$ con $F(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}) = 6$.

    La solución no es única, pues todos los puntos del segmento lineal cerrado de vértices $C(\frac{12}{5}, \frac{21}{5})$, $D(\frac{56}{17}, \frac{60}{17})$ son soluciones óptimas.

27. **Solución:**

    (a) Los vértices de la región factible son $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ y $D(0,1)$.

    (b) La función F alcanza el máximo en los puntos $(4,0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, con valor de la función objetivo $F(4,0) = F(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = 4$.

    (c) La solución no es única, pues todos los puntos del segmento lineal cerrado de vértices $B(4,0)$, $C(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ son soluciones óptimas.

28. **Solución:**

    Tendrá que repartir 50 impresos de la empresa A y 100 de la empresa B para obtener el máximo beneficio de 950 unidades monetarias.

29. **Solución:**

    Se deberán producir 200 bombillas normales y 300 bombillas halógenas para obtener la máxima facturación.

30. **Solución:**

    Para maximizar las ganancias de la compañía se deben realizar el avión A, 120 viajes y el avión B, 80 viajes con un beneficio de 312000 euros. Y para que el consumo de combustible sea mínimo deben hacerse tanto el avión tipo A como el tipo B, 30 viajes con un consumo de 48000 litros de combustible.

31. **Solución:**

    Para obtener el máximo beneficio debemos producir 24 carrocerías de camiones y 66 de coches, con unas ganancias de

    $$z = 36000 \times 24 + 12000 \times 66 = 1656\,000 \text{ euros.}$$

32. **Solución:**

    Para que el pastelero obtenga el máximo beneficio debe hacer un total de 5 docenas de dulces tipo P y 23 docenas de dulces tipo Q.

33. **Solución:**

    El costo mínimo se produce cuando se produce cuando sólo se fabrican 1000 rotuladores de la clase B, al que corresponde un costo de 900 euros. El costo máximo se produce cuando se fabrican 2000 rotuladores de la clase A y 1000 de la clase B con un costo total de 3300 euros.

34. **Solución:**

    Para que el beneficio mensual sea máximo habrá que fabricar 300 sombreros de cada tipo.

35. **Solución:**

    Para que la empresa obtenga el máximo beneficio deberá producir 2400 unidades del producto A y 5200 del producto B, obteniendo un beneficio mensual de 452000 euros.

36. **Solución:**

    Se deben producir 3 camiones cisterna de vino y 2 camiones cisterna de vinagre para que el beneficio sea máximo. Este beneficio es de 2800 euros al mes.

37. **Solución:**

    Para minimizar el coste y atender sus necesidades mínimas el hipermercado debe hacer un pedido de 3 contenedores al mayorista A y 2 contenedores al mayorista B, con lo que el coste mínimo total será de 7386 euros.

38. **Solución:**

    Para que el costo de preparar la dieta sea mínimo debemos comprar 3 kg del producto A y 2 kg del producto B. El costo mínimo semanal de la dieta es de 26 euros.

39. **Solución:**

    Habrá que mezclar medio paquete de la marca A con dos paquetes de la marca B para obtener un abono al precio mínimo que contenga 4 unidades de K, 23 de P y 6 de N.

40. **Solución:**

    Si denominados:

    x_1 número de toneladas de carne que se transportan de P a R,

    x_2 número de toneladas de carne que se transportan de P a S,

    x_3 número de toneladas de carne que se transportan de P a T,

    x_4 número de toneladas de carne que se transportan de Q a R,

    x_5 número de toneladas de carne que se transportan de Q a S,

x_6 número de toneladas de carne que se transportan de Q a T.

El problema de transporte queda como sigue:

$$\begin{array}{lr} Min & z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 1x_6 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 30 \\ & x_1 + x_4 = 20 \\ & x_2 + x_5 = 22 \\ & x_3 + x_6 = 14 \\ & x_i \quad \text{variables enteras y positivas} \end{array}$$

41. **Solución:**

Si denominados:

x_1 número de toneladas de frutas que se transportan de A a M1,

x_2 número de toneladas de frutas que se transportan de A a M2,

x_3 número de toneladas de frutas que se transportan de A a M3,

x_4 número de toneladas de frutas que se transportan de B a M1,

x_5 número de toneladas de frutas que se transportan de B a M2,

x_6 número de toneladas de frutas que se transportan de B a M3.

El problema de transporte queda como sigue:

$$\begin{array}{lr} Min & z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 10x_6 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 15 \\ & x_1 + x_4 = 8 \\ & x_2 + x_5 = 8 \\ & x_3 + x_6 = 9 \\ & x_i \quad \text{variables enteras y positivas} \end{array}$$

42. **Solución:**

Para que el beneficio sea máximo se deben elegir 20 electricistas y 30 mecánicos.

43. **Solución:**

Habrá que producir 100 litros de colonia A y 150 litros de colonia B al día para obtener beneficio máximo diario de 2100 euros.

44. **Solución:**

Habrá que alquilar 4 autobuses grandes y 5 autobuses pequeños para que el viaje resulte lo más económico posible. El importe total mínimo del alquiler de los autobuses asciende a 372 euros.

45. **Solución:**

(a) Para obtener el preparado más rico en vitaminas habrá que tomar 100 g. de A y 50 g. de B, con un aporte de vitaminas de 40 mg.

(b) La mezcla más pobre en calorías tiene 25 g. de cada producto, y el aporte calórico será de 150 calorías.

46. **Solución:**

El coste será mínimo si de la sustancia A tomamos 1.6 kilos y de la sustancia B 0.8 kg. Se puede eliminar la restricción:

$$0.002x + 0.002y \leq 0.02.$$

47. **Solución:**

La función objetivo es $z = 7x + 6y$. Las cantidades que deben producirse de A y B para obtener el máximo beneficio son: De A debemos producir 4.286 kg. y de B 8.571 kg.

48. **Solución:**

Las mesas tendrán un perímetro de 6 m. (Nota: 2 metros de largo por 1 m. de ancho).

49. **Solución:**

Si denominamos

x_1 número de destilaciones con la tecnología nueva,

x_2 número de destilaciones con la tecnología antigua.

Entonces el modelo de programación lineal quedará:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & 4(8x_1 + 10x_2) + 6(6x_1 + 7x_2) + 7(5x_1 + 4x_2) \\ \text{s.a.} & 7x_1 + 10x_2 \leq 1400 \\ & 12x_1 + 8x_2 \leq 2000 \\ & 8x_1 + 10x_2 \geq 900 \\ & 6x_1 + 7x_2 \geq 300 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 1700 \\ & 5x_1 + 4x_2 \geq 800 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Ejercicios tema 2

Programación lineal

2.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 13 *Dado el P. L.*

$$\begin{array}{lll} \min & z = & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & & 2x_1 + x_3 = -3 \\ & & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8 \\ & & x_1, x_3 \geq 0, \quad x_2 \textit{ no restringida} \end{array}$$

escribirlo en forma estándar minimizante, en forma estándar maximizante, en forma canónica maximizante y en forma canónica minimizante

Forma estándar minimizante

Sustituimos $x_2 = x_2' - x_2''$ siendo estas nuevas variables no negativas, con lo cual la función objetivo quedaría

$$\min \quad z = \quad 3x_1 - (x_2' - x_2'') + 2x_3 \quad = 3x_1 - x_2' + x_2'' + 2x_3.$$

Transformando las desigualdades en igualdades sumando a la primera la variable de holgura x_4 y restando a la última la variable de holgura x_5 , y cambiando el signo a la segunda restricción para conseguir un término independiente positivo, se obtiene por fin el problema en la forma:

$$\begin{array}{lll} \min & z = & 3x_1 - x_2' + x_2'' + 2x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + x_4 = 4 \\ & & -2x_1 - x_3 = 3 \\ & & x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3 - x_5 = 8 \\ & & x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Forma estándar maximizante

Únicamente se requiere transformar en el anterior problema la función objetivo de minimización por otra de minimización:

$$\begin{array}{lll} \max & z' = -z = & -3x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + x_4 = 4 \\ & & -2x_1 - x_3 = 3 \\ & & x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3 - x_5 = 8 \\ & & x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Forma canónica minimizante

Sustituimos en él primer problema la variable $x_2 = x_2' - x_2''$. Todas la restricciones han de ser de $\geq$. Así que sólo se requiere cambiar el signo en la primera y transformar la segunda en una doble desigualdad. El modelo resultante sería:

$$\begin{array}{lll} \min & z = & 3x_1 - x_2' + x_2'' + 2x_3 \\ & s.a: & -x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \geq -4 \\ & & -2x_1 - x_3 \geq 3 \\ & & 2x_1 + x_3 \geq -3 \\ & & x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3 \geq 8 \\ & & x_1, x_2', x_2'', x_3 \geq 0 \end{array}$$

Forma canónica maximixante

Tomamos la función objetivo del segundo modelo y cambiamos todos los signos en las restricciones del modelo anterior, resultando:

$$\begin{array}{lll} \max & z' = -z = & -3x_1 + x_2' - x_2'' - 2x_3 \\ & s.a: & x + 2x_2' - 2x_2'' \leq 4 \\ & & 2x_1 + x_3 \leq -3 \\ & & -2x_1 - x_3 \leq 3 \\ & & -x_1 - 3x_2' + 3x_2'' - x_3 \leq -8 \\ & & x_1, x_2', x_2'', x_3 \geq 0 \end{array}$$

Ejercicio 14 *Demostrar que si A y B son dos conjuntos convexos, su intersección $A \cap B$ también es un conjunto convexo.*

Se pretende demostrar que si X, Y son dos puntos de $A \cap B$ el segmento que los une está también en $A \cap B$

En efecto

$$X, Y \in A \cap B \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} X,Y \in A \Longrightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in A \text{ si } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ por ser A conjunto convexo} \\ X,Y \in B \Longrightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in B \text{ si } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ por ser B conjunto convexo} \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow \lambda X + (1-\lambda)Y \in A \cap B$ si $0 \leq \lambda \leq 1$ y por tanto $A \cap B$ es un conjunto convexo.

Ejercicio 15 *Sean A y B dos conjuntos convexos de $I\!R^n$. Se define $A + B = \{z \in I\!R^n / \ z = x + y, \ x \in A, \ y \in B\}$. Demostrar que $A + B$ es también un conjunto convexo.*

Hay que demostrar que si Z_1, Z_2, son dos puntos de $A + B$ el segmento que los une $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2$ si $0 \leq \lambda \leq 1$ está en $A + B$.

Si $Z_1, Z_2 \in A + B \Longrightarrow Z_1 = X_1 + Y_1, X_1 \in A, \ Y_1 \in B$ y $Z_2 = X_2 + Y_2, X_2 \in A, \ Y_2 \in B$. Por tanto $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2 = \lambda(X_1 + Y_1) + (1-\lambda)(X_2 + Y_2) = [\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] + [\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2]$.

Si $0 \leq \lambda \leq 1$ el elemento del primer corchete pertenece a A, por ser A convexo. De la misma forma, el del segundo corchete pertenece a B y entonces $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2 \in A + B$.

Ejercicio 16 *Sea A un conjunto convexo de $I\!R^n$. Se define el conjunto $\alpha A = \{z \in I\!R^n / \ z = \alpha x, \ x \in A\}$. Demostrar que αA es también convexo.*

Si $Z_1, Z_2 \in \alpha A \Longrightarrow Z_1 = \alpha X_1, X_1 \in A$, y $Z_2 = \alpha X_2, X_2 \in A$. Por tanto $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2 = \lambda(\alpha X_1) + (1-\lambda)(\alpha X_2) = \alpha[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2]$. Si $0 \leq \lambda \leq 1$ el elemento del corchete pertenece a A, por ser A convexo. Entonces $\lambda Z_1 + (1-\lambda)Z_2 \in \alpha A$.

Ejercicio 17 *Determinar todas las soluciones básicas del siguiente sistema de ecuaciones indicando en cada caso la correspondiente base, las variables básicas y no básicas. ¿Cuál es el máximo número de posibles soluciones básicas?*

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22 \end{array}$$

El número de posibles submatrices de segundo orden de A es $\binom{5}{2} = 10$ que es, en general el número máximo de soluciones básicas (factibles o no). No obstante para que exista solución básica asociada a una submatriz es necesario que el determinante de esta matriz no sea nulo, por lo que este número máximo no se alcanza en algunas ocasiones. Analizamos todos los casos posibles:

1. $B_1 = (a_1 \ a_2) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz no es básica, porque su determinante es nulo.

2. $B_2 = (a_1 \ a_3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Las variables no básicas son $x_2 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$.

El sistema resultante es $\left\{ \begin{array}{c} 3x_1 - 3x_3 = 16 \\ x_1 + x_3 = 22 \end{array} \right.$.

La solución de este sistema es $x_1 = \frac{41}{3},\quad x_3 = \frac{25}{3}$. La presente solución es básica factible ya que todas las variables toman valores no negativos.

3. $B_3 = (a_1\ a_4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Las variables no básicas son $x_2 = 0,\quad x_3 = 0,$ $x_5 = 0$.

   El sistema resultante es $\left\{ \begin{array}{c} 3x_1 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_4 = 22 \end{array} \right.$.

   La solución de este sistema es $x_1 = -3,\quad x_4 = 25$. La presente solución es básica pero no factible ya que hay una variable que toma un valor negativo.

4. $B_4 = (a_1\ a_5) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz no es básica, porque su determinante es nulo.

5. $B_5 = (a_2\ a_3) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Las variables no básicas son $x_1 = 0,\quad x_4 = 0,$ $x_5 = 0$. El sistema resultante es $\left\{ \begin{array}{c} 6x_2 - 3x_3 = 16 \\ 2x_2 + x_3 = 22 \end{array} \right.$

   La solución de este sistema es $x_2 = \frac{25}{6},\quad x_3 = 3$. La presente solución es básica factible ya que todas las variables toman valores no negativos.

6. $B_6 = (a_2\ a_4) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Las variables no básicas son $x_1 = 0,\quad x_3 = 0,$ $x_5 = 0$. El sistema resultante es $\left\{ \begin{array}{c} 6x_2 + x_4 = 16 \\ 2x_2 + x_4 = 22 \end{array} \right.$.

   La solución de este sistema es $x_2 = -\frac{3}{2},\quad x_4 = 25$. La presente solución es básica pero no factible ya que hay una variable que toma un valor negativo.

7. $B_7 = (a_2\ a_5) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz no es básica, porque su determinante es nulo.

8. $B_8 = (a_3\ a_4) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Las variables no básicas son $x_1 = 0,\quad x_2 = 0,$ $x_5 = 0$. El sistema resultante es $\left\{ \begin{array}{c} -3x_3 + x_4 = 16 \\ x_3 + x_4 = 22 \end{array} \right.$.

   La solución de este sistema es $x_3 = \frac{3}{2},\quad x_4 = \frac{41}{2}$. La presente solución es básica factible ya que todas las variables toman valores no negativos.

9. $B_9 = (a_3\ a_5) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Las variables no básicas son $x_1 = 0,\quad x_2 = 0,$ $x_4 = 0$. El sistema resultante es $\left\{ \begin{array}{c} -3x_3 + 3x_5 = 16 \\ x_3 + x_5 = 22 \end{array} \right.$.

   La solución de este sistema es $x_3 = \frac{25}{3},\quad x_5 = \frac{45}{3}$. La presente solución es básica factible ya que todas las variables toman valores no negativos.

10. $B_{10} = (a_4\, a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Las variables no básicas son $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$. El sistema resultante es $\begin{cases} x_4 + 3x_5 = 16 \\ x_4 + x_5 = 22 \end{cases}$.

La solución de este sistema es $x_4 = 25,\ x_5 = -3$. La presente solución es básica pero no factible ya que alguna variable toma valor negativo.

Ejercicio 18 *Resolver el siguiente problema:*

$$\begin{array}{rrl} \min & z = & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \\ & & \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & +x_4 & & +6x_6 & = 9 \\ 3x_1 & +x_2 & -4x_3 & & & +2x_6 & = 2 \\ x_1 & & +2x_3 & & +x_5 & +2x_6 & = 6 \end{array} \\ & s.a: & \\ & & x_i \geq 0 \end{array}$$

Lo resolvemos por el algoritmo del simplex en forma minimizante:

Min	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	0	0	1	0	6	9
x_2	3	1	-4	0	0	2	2
x_5	1	0	2	0	1	2	6
$-c_j$	-1	1	-1	-1	-1	1	

Reducimos a cero los valores de la última fila que corresponden a las variables básicas, para conseguir que el valor de la función objetivo aparezca en el último lugar de esta fila realizando operaciones lineales con las restantes filas:

Min	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	0	0	1	0	6	9
x_2	3	1	-4	0	0	2	2
x_5	1	0	2	0	1	2	6
	-1	1	-1	-1	-1	1	0
$f_4 = f_4 - f_2$	-4	0	3	-1	-1	-1	-2
$f_4 = f_4 + f_1$	-3	0	3	0	-1	5	7
$f_4 = f_4 + f_3$	-2	0	5	0	0	7	13

Por tanto partimos de la tabla:

Min	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	0	0	1	0	6	9
x_2	3	1	-4	0	0	2	2
x_5	1	0	2	0	1	2	6
$z_j - c_j$	-2	0	5	0	0	7	13

A idéntico resultado llegamos si calculamos para esta última fila los valores de los costos reducidos $z_j - c_j$.

Recordemos el origen de esta expresión:

$$z = (c'_B, c'_N)\binom{X_B}{X_N} = c'_B X_B + c'_N X_N = c'_B\left(B^{-1}b - B^{-1}NX_N\right) + c'_N X_N =$$

$$= z^0 + \left(c'_N - c'_B B^{-1}N\right)X_N.$$

$$z - \left(c'_N - c'_B B^{-1}N\right)X_N = z^0 \Longrightarrow z + \left(c'_B B^{-1}N - c'_N\right)X_N = z^0.$$

Si tomamos como matriz $B = I$, el valor de z para la solución actual es:

$$z^0 = \quad x_1^0 - x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 + x_5^0 - x_6 \quad = 0 - 2 + 0 + 9 + 6 - 0 = 13.$$

Se obtiene la expresión de la última ecuación.

$$z + \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = 13$$

Desarrollando se obtienen los coeficientes:

Coeficiente de x_1

$$z_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = -2$$

Coeficiente de x_3

$$z_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = 5$$

Coeficiente de x_6

$$z_6 - c_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 = 7$$

Así que la última ecuación es:

$$z - 2x_1 + 5x_3 + 7x_6 = 13.$$

Tabla I		1	−1	1	1	1	−1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	1	0	0	1	0	6	9
−1	x_2	3	1	−4	0	0	$\boxed{2}$	2
1	x_5	1	0	2	0	1	2	6
$r_j =$	$z_j - c_j$	−2	0	5	0	0	7	13

Para aplicar el primer ciclo del método de Simplex tengo que introducir en la base la variable x_6 , con coste reducido mayor (más positivo) y sacar la variable x_2, ya que $\min\left\{\frac{9}{6}, \frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{2}$ que corresponde a la segunda fila. Hemos recuadrado el elemento pivote.

Realizando las transformaciones adecuadas se obtiene la tabla:

Tabla	II	1	−1	1	1	1	−1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	-8	-3	$\boxed{12}$	1	0	0	3
−1	x_6	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	0	0	1	1
1	x_5	-2	-1	6	0	1	0	4
$r_j =$	$z_j - c_j$	$\frac{-25}{2}$	$\frac{-7}{2}$	19	0	0	0	6

Ahora entra x_3 con coste reducido más positivo. y sale x_4 ya que se verifica $\min\left\{\frac{3}{12}, \frac{4}{6}\right\} = \frac{3}{12}$ que corresponde a la primera fila.

Tabla	III	1	−1	1	1	1	−1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{4}$
−1	x_6	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{3}{2}$
1	x_5	2	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{5}{2}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	$\frac{1}{26}$	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{19}{2}$	0	0	$\frac{5}{4}$

Ahora entra x_2, de coste reducido $\frac{5}{4}$ que es el más positivo y sale x_5 ya que $\frac{1}{2}$ es el único valor positivo de la segunda columna. Pivoteando sobre este elemento, obtenemos la tabla:

Tabla	IV	1	−1	1	1	1	−1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
−1	x_6	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{3}{2}$
-1	x_2	4	1	0	-1	2	0	5
$r_j =$	$z_j - c_j$	$\frac{-29}{6}$	0	0	0	$-\frac{7}{2}$	0	-5

Esta tabla ya es óptima, porque todos los costes reducidos son no positivos.

Detallando, la solución óptima es $x_1 = 0,\ \ x_2 = 5,\ \ x_3 = \frac{3}{2},\ \ x_4 = 0,\ \ x_5 = 0,$ $x_6 = \frac{3}{2},\ \ z = -5.$

En este caso tenemos una variable no básica con coste reducido nulo, x_4, por lo tanto introducir esta variable en la base no debería cambiar el valor de la función objetivo.

Si introducimos x_4 en la base podría salir x_3 o x_6 ya que $\min\left\{\frac{3/2}{1/6}, \frac{3/2}{1/6}\right\} = \frac{3/2}{1/6}$ y ambos tienen el mismo valor mínimo. Decidiéndonos por sacar x_3, se obtiene la tabla:

Tabla	V	1	-1	1	1	1	-1	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_4	2	0	6	1	-3	0	9
-1	x_6	$-\frac{1}{6}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
-1	x_2	6	1	6	0	-1	0	14
$r_j =$	$z_j - c_j$	$\frac{-29}{6}$	0	0	0	$-\frac{7}{2}$	0	-5

Por tanto tendremos otra solución alternativa $x_1 = 0,\ x_2 = 14,\ x_3 = 0,\ x_4 = 9,$ $x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ z = -5.$

Si hubiese salido x_6 y entrado x_4 en la Tabla IV, se obtendría la misma solución anterior.

Como es sabido si hay dos soluciones óptimas, también es solución óptima cualquier punto del segmento lineal cerrado que los une. Por lo tanto en este caso tendremos el conjunto de soluciones:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \lambda(0,\ 5,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{3}{2}) + (1-\lambda)(0,\ 14,\ 0,\ 9,\ 0,\ 0)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Ejercicio 19 *Resolver el P.L.*

$$
\begin{array}{lrl}
\max & z = & 12x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 20x_5 + x_6 + x_7 \\
 & & \begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & & +x_3 & & -x_5 & +x_6 & & = & 3 \\ -x_1 & -x_2 & & +3x_4 & & & & = & 12 \\ & x_2 & +x_3 & & +x_5 & & +x_7 & = & 4 \end{array} \\
 & s.a: & \\
 & & x_i \geq 0
\end{array}
$$

En este caso puedo obtener una primera solución básica factible dividiendo la segunda ecuación por 3, con lo que puedo iniciar el algoritmo del simplex partiendo de la tabla:

Tabla	I	12	8	4	4	20	1	1	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	3	0	1	0	-1	1	0	3
4	x_4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	0	0	4
1	x_7	0	1	1	0	$\boxed{1}$	0	1	4
$r_j =$	$z_j - c_j$	$-\frac{31}{3}$	$-\frac{25}{3}$	-2	0	-20	0	0	23

Como el problema es de maximización seleccionamos para entrar en la base las variables con coste reducido más negativo. En lo que sigue mostramos las tablas sucesivas con el correspondiente elemento pivote recuadrado:

Tabla	II	12	8	4	4	20	1	1	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	$\boxed{3}$	1	2	0	0	1	1	7
4	x_4	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	0	0	4
20	x_5	0	1	1	0	1	0	1	4
$r_j =$	$z_j - c_j$	$-\frac{31}{3}$	$\frac{35}{3}$	18	0	0	0	20	103

Tabla	III	12	8	4	4	20	1	1	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
12	x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
4	x_4	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{43}{9}$
20	x_5	0	1	1	0	1	0	1	4
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	$\frac{136}{9}$	$\frac{224}{9}$	0	0	$\frac{39}{9}$	$\frac{211}{9}$	$\frac{1144}{9}$

Ya que todos los costes reducidos son no negativos tenemos la solución óptima: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (\frac{7}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{43}{9},\ 4,\ 0,\ 0)$ con $z = \frac{1144}{9}$.

Ejercicio 20 *Resolver el problema de programación lineal*

$$\begin{array}{lrl} min & z = & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & & -2x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ & & -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ & & x_1, x_3 \geq 0, \quad x_2 \leq 0 \end{array}$$

Ya que $x_2 \leq 0$, definimos $x_2' = -x_2$, que ya cumplirá la condición $x_2' \geq 0$. Sustituyendo en el problema primitivo, éste se transforma en:

$$\begin{array}{lrl} min & z = & x_1 - 3x_2' + 2x_3 \\ & s.a: & 3x_1 - x_2' + 3x_3 \leq 7 \\ & & -2x_1 + 4x_2' \leq 12 \\ & & -4x_1 + 3x_2' + 8x_3 \leq 10 \\ & & x_1, x_2', x_3 \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo ahora las variables de holgura a todas las desigualdades obtengo el sistema

$$\begin{array}{lr} 3x_1 - x_2' + 3x_3 + x_4 & = 7 \\ -2x_1 + 4x_2' + \qquad\qquad +x_5 & = 12 \\ -4x_1 + 3x_2' + 8x_3 \qquad\qquad + x_6 & = 10 \end{array}$$

La tabla de simplex inicial es:

Tabla I		1	-3	2	0	0	0	
Min		x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	3	-1	3	1	0	0	7
0	x_5	-2	$\boxed{4}$	0	0	1	0	12
0	x_6	-4	3	8	0	0	1	10
$r_j =$	$z_j - c_j$	-1	3	-2	0	0	0	

Usando el algoritmo de minimización el elemento pivote de esta tabla es el recuadrado. Entra x_2' y sale x_5

Las tablas sucesivas son:

Tabla II		1	-3	2	0	0	0	
Min		x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	3	1	$\frac{1}{4}$	0	10
-3	x_2'	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
0	x_6	$-\frac{5}{2}$	0	8	0	$-\frac{3}{4}$	1	1
$r_j =$	$z_j - c_j$	$\frac{1}{2}$	0	-2	0	$-\frac{3}{4}$	0	-9

Tabla III		1	-3	2	0	0	0	
Min		x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	1	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	4
-3	x_2'	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	5
0	x_6	0	0	11	1	$-\frac{1}{2}$	1	11
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{-9}{10}$	0	-11

Por lo tanto la solución óptima es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, -5, 0, 4, 0, 11) \text{ con un valor de } z = -11.$$

Ejercicio 21 *Resolver el programa lineal*

$$\begin{array}{rrl} min & z = & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo en la primera ecuación una variable de holgura, resulta:

$$\begin{array}{rrl} min & z = & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

La tabla inicial puede ser:

Tabla I		2	−3	5	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_4	1	2	0	1	8
5	x_3	$\boxed{2}$	1	1	0	12
$r_j =$	$z_j - c_j$	8	8	0	0	60

y las tablas sucesivas:

Tabla II		2	−3	5	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_4	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	2
2	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	4	−4	0	12

Tabla III		2	−3	5	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	
−3	x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{20}{3}$

La solución óptima es $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, 0)$ y $z = \frac{20}{3}$.

Ejercicio 22 *Resolver el programa lineal*

$$\begin{array}{rrl} min & z = & 2x_1 + 8x_2 \\ & s.a: & 5x_1 + x_2 \geq 8 \\ & & 2x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ & & x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo las variables de holgura x_3, x_5, x_7 y las variables artificiales x_4, x_6, x_8 y usando el método de las penalizaciones o de la M grande, resuelvo el problema:

$$\begin{array}{rrl} min & z = & 2x_1 + 8x_2 + mx_4 + mx_5 + mx_8 \\ & s.a: & 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \\ & & 2x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 14 \\ & & x_1 + 4x_2 - x_7 + x_8 = 12 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{array}$$

Partimos de la tabla:

Tabla	I	2	8	0	m	0	m	0	m	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
m	x_4	$\boxed{5}$	1	-1	1	0	0	0	0	8
m	x_6	2	2	0	0	-1	1	0	0	14
m	x_8	1	4	0	0	0	0	-1	1	12
$r_j =$	$z_j - c_j$	$8m-2$	$6m-8$	$-m$	0	$-m$	0	$-m$	0	$36m$

Se elimina x_4, que tomará el valor 0 y ya no va a ser variable básica.

Tabla	II	2	8	0	0	m	0	m	
Min		x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	
2	x_1	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	0	0	2
m	x_6	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	-1	1	0	0	10
m	x_8	0	$\boxed{\frac{19}{5}}$	$\frac{1}{5}$	0	0	-1	1	10
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	$\frac{27m-38}{5}$	$\frac{3m-2}{5}$	$-m$	0	$-m$	0	$20m-4$

Entra x_2 y sale de la base x_8. Esta variable artificial tomará el valor 0 y puede eliminarse, porque ya no es necesaria.

Tabla	III	2	8	0	0	m	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	
2	x_1	1	0	$-\frac{4}{19}$	0	0	$\frac{1}{19}$	$\frac{28}{19}$
m	x_6	0	0	$\frac{6}{19}$	-1	1	$\boxed{\frac{8}{19}}$	$\frac{110}{19}$
8	x_2	0	1	$\frac{1}{9}$	0	0	$-\frac{5}{19}$	$\frac{50}{19}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	$\frac{6m}{19}$	$-m$	0	$\frac{8}{19}m-2$	$\frac{110m+456}{19}$

Entra x_7 y sale de la base x_6 que es eliminada de la tabla:

Tabla	IV	2	8	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_5	x_7	
2	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
0	x_7	0	0	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$-\frac{19}{8}$	1	$\frac{55}{4}$
8	x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{475}{76}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{19}{4}$	0	$\frac{103}{2}$

Tabla	V	2	8	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_5	x_7	
2	x_1	1	0	0	-2	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
0	x_3	0	0	1	$-\frac{19}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{55}{3}$
8	x_2	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	0	0	$\frac{10}{3}$	24

Esta solución ya es óptima, pero se pueden encontrar soluciones óptimas alternativas, ya que la variable x_5 no es básica y tiene un coste reducido nulo. Entrando en la base x_5, sale x_2. Se obtiene la solución alternativa $x_1 = 12$, $x_2 = 0$, $z = 24$.

También serán soluciones óptimas todo elemento del segmento lineal cerrado que une ambas soluciones. Este conjunto de soluciones óptimas es:

$$(x_1, x_2) = \lambda(\tfrac{16}{3}, \tfrac{5}{3}) + (1-\lambda)(12, 0) \quad \text{con } 0 < \lambda < 1.$$

Ejercicio 23 *Resolver el programa lineal*

$$\begin{array}{rrl} \max & z = & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 14 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \ x_3 \ \textit{libre} \end{array}$$

Como x_3 es libre la sustituimos por $x_3 = x_3' - x_3''$. Añadiendo, además, las variables de holgura, y artificiales precisas, resulta el siguiente problema, que resolveremos por el método de las penalizaciones.

$$\begin{array}{rrl} \max & z = & 2x_1 + 3x_2 + 4\,(x_3' - x_3'') - mx_5 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + (x_3' - x_3'') + x_4 = 10 \\ & & x_1 + x_2 + 2\,(x_3' - x_3'') + x_5 = 12 \\ & & 3x_1 + 2x_2 + (x_3' - x_3'') + x_6 = 14 \\ & & x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

La tabla inicial del simplex es:

Tabla	I	2	3	4	-4	0	$-m$	0	
Max		x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	1	1	1	-1	1	0	0	10
$-m$	x_5	1	1	$\boxed{2}$	-2	0	1	0	12
0	x_6	3	2	1	-1	0	0	1	14
$r_j =$	$z_j - c_j$	$-m-2$	$-m-3$	$-2m-4$	$2m+4$	0	0	0	$-12m$

Como el problema es de max. seleccionamos para entrar en la base la variable con costo reducido más negativo. De esta forma entra en la base x_3' y sale x_5 que es la variable artificial que puede eliminarse, puesto que vale 0 y ya no es necesaria.

Tabla II		2	3	4	-4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_6	
0	x_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	4
4	x_3'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	0	0	6
0	x_6	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	0	0	1	8
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	-1	0	0	0	0	24

Entra x_2 y sale x_6

Tabla III		2	3	4	-4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_6	
0	x_4	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
4	x_3'	$-\frac{1}{3}$	0	1	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
3	x_2	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	$\frac{5}{3}$	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{88}{3}$

Hay soluciones óptimas alternativas porque hay una variable no básica x_3'' con coste reducido 0. Si se quisiera introducir esta variable en la base no es posible puesto que no hay elementos en su columna que sean positivos.

Despejando las variables básicas de las ecuaciones y tomando las variables no básicas nulas, a excepción de x_3'', obtenemos las soluciones óptimas:

$(0, \frac{16}{3}, \frac{10}{3} + x_3'', x_3'', \frac{4}{3}, 0)$. Decimos que hay un rayo óptimo.

No obstante este resultado es sólo de este problema intermedio, pero en la solución del problema primitivo debe aparecer $x_3 = x_3' - x_3'' = \left(\frac{10}{3} + x_3''\right) - x_3'' = \frac{10}{3}$.

Por lo tanto el problema propuesto tiene la solución única $(x_1, x_2, x_3) = \left(0, \frac{16}{3}, \frac{10}{3}\right)$ con $z = \frac{88}{3}$.

Ejercicio 24 *Resolver el programa lineal*

$$\begin{array}{rrl} \max & z = & |x_1 - 2x_2 + x_3| + x_4 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 12 \\ & & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Dividamos el problema en dos supuestos:

1. Si $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 0$. En este caso $|x_1 - 2x_2 + x_3| = x_1 - 2x_2 + x_3$

   El problema sería en este caso:

$$\begin{array}{rrl} \max & z = & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 12 \\ & & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

resolviéndolo por el algoritmo del simplex obtenemos la solución óptima:

$$(x_1, x_3, x_3, x_4) = (0, 0, 5, 12) \quad \text{con} \quad z = 17.$$

2. Si $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 0$. En este caso $|x_1 - 2x_2 + x_3| = -x_1 + 2x_2 - x_3$.

   El problema sería en este caso:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 + x_4 \leq 12 \\ & & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

   resolviéndolo por el algoritmo del simplex obtenemos la solución óptima

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6, 0, 0) \quad \text{con} \quad z = 12.$$

   Como en el primer supuesto se obtiene un valor mayor para la función objetivo, z, se considera la solución del supuesto 1 como óptima.

   Y por tanto, la solución óptima del programa inicial es:

$$(x_1, x_3, x_3, x_4) = (0, 0, 5, 12) \quad \text{con} \quad z = 17.$$

Ejercicio 25 *Resolver el programa lineal*

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & |2x_1 + 3x_2 - x_3| \leq 12 \\ & & |x_1| + 2x_2 \leq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

La primera restricción es equivalente a $-12 \leq 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 12$. En cuanto a la segunda puede sustituirse

$|x_1| = x_1$ ya que debido a las restricciones de las variables x_1 siempre es positiva.

Así que el problema es equivalente al siguiente:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 12 \\ & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -12 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Resolviendo este problema usando el algoritmo del simplex obtenemos que la solución es:

$$(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 20) \quad \text{con} \quad z = 92.$$

Ejercicio 26 *Resolver por el método de las dos fases el P.L.*

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 = 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ & 3x_1 - x_2 = 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo variables artificiales resolvemos, en la primera fase, el problema:

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_3 + x_4 + x_5 \\ s.a: & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x4 = 3 \\ & 3x_1 - x_2 + x_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Fase 1) Las tablas del simplex para la primera fase son:

Tabla	I	0	0	1	1	1	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	1	1	1	0	0	4
1	x_4	$\boxed{2}$	-3	0	1	0	3
1	x_5	3	-1	0	0	1	8
$r_j =$	$z_j - c_j$	6	-3	0	0	0	15

Tabla	II	0	0	1	1	1	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_3	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
0	x_1	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
1	x_5	0	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{2}$
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	6	0	-3	0	6

Tabla	III	0	0	1	1	1	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1
0	x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	3
1	x_5	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	$\frac{12}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0

Fase 2) En la segunda fase elimino las variables artificiales nulas, y tomo como objetivo la función del problema original.

Tabla	IV	1	2	
Max		x_1	x_2	
2	x_2	0	1	1
1	x_1	1	0	3
$r_j =$	$z_j - c_j$	0	0	5

Evidentemente la solución de este problema es $(x_1, x_2) = (3, 1)$ con $z = 5$.

Ejercicio 27 *Resolver el siguiente problema de P. L. usando el método de las penalizaciones.*

$$\begin{array}{rc} \max & z = 6x_1 + 12x_2 \\ sa: & 2x_1 - 6x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 - 15x_2 \geq -6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Para poner el problema en forma apropiada para su resolución por el método de simplex, añadiendo variables artificiales, de holgura y cambiando de signo la última restricción obtenemos:

$$\begin{array}{rc} \max & z = 6x_1 + 12x_2 - Ma_1 \\ sa: & 2x_1 - 6x_2 - h_1 + a_1 = 4 \\ & x_1 + 4x_2 + h_2 = 5 \\ & -3x_1 + 15x_2 + h_3 = 6 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, a_1 \geq 0 \end{array}$$

Las respectivas tablas del simplex que se obtienen son:

Tabla	I	6	12	0	$-M$	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	a_1	h_2	h_3	
$-M$	a_1	$\boxed{2}$	-6	-1	1	0	0	4
0	h_2	1	4	0	0	1	0	5
0	h_3	-3	15	0	0	0	1	6
		$-2M-6$	$6m-12$	M	0	0	0	$-4M$

Tabla	II	6	12	0	$-M$	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	a_1	h_2	h_3	
6	x_1	1	-3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2
0	h_2	0	$\boxed{7}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
0	h_3	0	6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	12
		0	-30	-3	$M+3$	0	0	12

Tabla	III	6	12	0	$-M$	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	a_1	h_2	h_3	
6	x_1	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{23}{7}$
12	x_2	0	1	$\frac{1}{14}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$
0	h_3	0	0	$-\frac{27}{14}$	$\frac{27}{14}$	$-\frac{6}{7}$	1	$\frac{66}{7}$
		0	0	$-\frac{6}{7}$	$\frac{6}{7}+M$	$\frac{30}{7}$	0	$\frac{174}{7}$

Tabla	IV	6	12	0	$-M$	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	a_1	h_2	h_3	
6	x_1	1	4	0	0	1	0	5
0	h_1	0	14	1	-1	2	0	6
0	h_3	0	27	0	0	3	1	21
		0	12	0	M	6	0	30

La solución óptima es $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, con $z = 30$.

Ejercicio 28 *Resolver usando el algoritmo revisado de simplex el P.L.*

$$\begin{array}{rrl} \max & z = & x_1 + 2x_3 \\ & s.a: & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo las variables de holgura el sistema resulta ser:

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 3 \end{array}$$

Iteración 1

Tomo como primera base:

$$B = (a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solución correspondiente es:

$$X_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

¿Es esta solución óptima?

$r = z - c = c'_B B^{-1} N - c'_N =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

El valor más negativo corresponde a x_3 que entrará en la base. Vemos qué variable va a salir.

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \min\left(\tfrac{4}{1}, \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2}.$$

Por lo tanto sale x_5.

Iteración 2

La siguiente matriz básica es:

$$B = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La solución correspondiente es:

$$X_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

¿Es esta solución óptima?

$$r = z - c = c'_B B^{-1} N - c'_N =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El valor más negativo corresponde a x_1 que entrará en la base. Vemos qué variable va a salir.

$$y_3 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}; \quad \min\left(\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}\right).$$ Por lo tanto sale x_4.

Iteración 3

La siguiente matriz básica es:

$$B = (a_1, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

La solución correspondiente es

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

¿Es esta solución óptima?

$$r = z - c = c'_B B^{-1} N - c'_N =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

El valor más negativo corresponde a x_2 que entrará en la base. Vemos qué variable va a salir.

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$ Por lo tanto sale x_3.

Iteración 4

La siguiente matriz básica es:

$$B = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \; B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solución correspondiente es:

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

¿Es esta solución óptima?

$$r = z - c = c'_B B^{-1} N - c'_N =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los valores son no negativos la solución actual es óptima.

La solución óptima es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (7, 10, 0, 0, 0)$ con $z = 7$.

Ejercicio 29 *Dado el problema:*

$$\begin{array}{rc} \max & z = 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ sa: & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{array}$$

Resolverlo usando el algoritmo de simplex revisado.

Si añadimos las variables de holgura positivas tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Iteración 1

1. Las variables básicas son x_4, x_5, x_6. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$.

   Entra en la base x_1, y como $\min\left\{\frac{10}{3}, \frac{20}{2}, \frac{12}{2}\right\} = \frac{10}{3}$, por tanto sale de la base x_4.

Iteración 2

1. Las variables básicas son x_1, x_5, x_6.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los costes reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{aligned} z_N - c_N &= \vec{s}N - c_N = c_B \cdot B^{-1}N - c_N \\ z_N - c_N &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto va a entrar en la base la variable x_3. Para determinar la variable de salida calculamos:

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y la solución actual que es:

$$x_b = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{40}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{40}{3}}{\frac{10}{3}}, \frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{3}} \right\} = 4$$

Por lo tanto la variable que deja la base es x_5.

Iteración 3

1. Las variables básicas son x_1, x_3, x_6

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

Los costes reducidos de las variables no básicas son:

$$\begin{aligned} z_N - c_N &= \vec{s}N - c_N = c_B \cdot B^{-1}N - c_N \\ z_N - c_N &= \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto la solución actual es óptima. La calculamos:

$$x_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 10.$$

La solución óptima es $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4;$ con $z = 10$.

Ejercicio 30 *Considerar el problema:*

$$\begin{array}{rrl} max & z = & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6 \\ & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 12 \\ & & x_1 + x_3 + x_4 \leq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Buscar una solución factible básica con las variables x_1, x_2, x_4. ¿Es esta solución óptima? Si no, comenzando con esta solución buscar la solución óptima.

Vamos a resolverlo usando el algoritmo revisado del simplex:

Primer ciclo

Tomamos la base x_1, x_2, x_4, entonces:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1.5 \\ .5 \end{pmatrix}$$

Esta es la solución básica actual. Veamos si es óptima:

$c_B B^{-1} N - c_N =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8.5 & -2.5 & 2.0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Como es un problema escrito en forma maximizante, y hay valores negativos, no es óptima. Y por tanto, entra x_3, por ser su costo reducido, -8.5, el más negativo. Veamos qué variable deja de ser básica:

$$y_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ -\frac{9}{4} \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

Y entonces, sale x_1, ya que le corresponde el único valor positivo (19/4).

Segundo ciclo

Las nuevas variables básicas son x_2, x_3, x_4.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{2}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{3}{19} & -\frac{2}{19} & \frac{5}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} & \frac{14}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{19} \\ \frac{14}{19} \\ \frac{62}{19} \end{pmatrix}$$

$c_B B^{-1} N - c_N =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{3}{19} & -\frac{2}{19} & \frac{5}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} & \frac{14}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{34}{19} & -\frac{22}{19} & \frac{21}{19} & \frac{52}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7895 & -1.1579 & 1.1053 & 2.7368 \end{pmatrix}.$$

Entra h_1 que es la variable de holgura de la primera ecuación. Veamos la variable de salida de la base:

$$y_5 = \begin{pmatrix} \frac{2}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{3}{19} & -\frac{2}{19} & \frac{5}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} & \frac{14}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{19} \\ \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} \end{pmatrix}$$

Eligiendo el mínimo

$$\min \left(\frac{60/19}{2/19}, \frac{14/19}{3/19}, - \right) = \min \left(\frac{60}{2}, \frac{14}{3} \right) = \frac{14}{3}.$$

Con lo que la variable que sale es x_3.

Tercer ciclo

La nueva base es x_2, x_4, x_5

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 4 \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$c_B B^{-1} N - c_N =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{22}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}.$$

Tenemos por tanto que la nueva solución es óptima, ya que todos los costes reducidos son no negativos y el problema está escrito en forma maximizante.

Así, la solución óptima es:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{3} & 0 & 4 & \frac{14}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } z = \frac{68}{3}.$$

2.2 Ejercicios Propuestos

1. Determinar todas las soluciones básicas de los siguientes sistemas de ecuaciones indicando en cada caso la correspondiente base, las variables básicas y las variables no básicas. ¿Cuál es el máximo número de posibles soluciones básicas?

a) $$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 22 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 2 \end{array}\right\}$$

2. Resolver los siguientes programas lineales mediante el Algoritmo del Simplex:

$$\begin{array}{llll} a) & \min & z = & 12x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 + \\ & & & +20x_5 + x_6 + x_7 \\ & & s.a: & 3x_1 + x_3 - x_5 + x_6 \leq 3 \\ & & & x_1 + x_2 - 3x_4 = -12 \\ & & & x_2 + x_3 + x_5 + x_7 = 4 \\ & & & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & \min & z = & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & & & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ & & & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 14 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \text{ irrestringida} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} c) & \max & z = & x_1 + 2x_2 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 = 4 \\ & & & 2x_1 - 3x_2 \geq 3 \\ & & & 3x_1 - x_2 = 8 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \\ d) & \min & z = & 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\ & & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

3. Resolver los siguientes problemas de programación lineal transformando previamente los valores absolutos:

$$\begin{array}{llll} a) & \max & z = & |x_1 - 2x_2 + x_3| + x_4 \\ & & s.a: & x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 12 \\ & & & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 15 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & \max & z = & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & & s.a: & x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7 \\ & & & |2x_1 + x_2| \leq 1 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

4. Resolver mediante el Algoritmo Revisado del Simplex los siguientes problemas lineales:

$$a) \quad max \quad z = 2x_1 + 2x_3$$
$$\begin{aligned} s.a: \; & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 14 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$b) \quad min \quad z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{aligned} s.a: \; & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5. Resolver mediante el método de las dos fases y por el método de las penalizaciones, los siguientes problemas:

$$a) \quad max \quad z = 2x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} s.a: \; & 11x_1 + 3x_2 \geq 33 \\ & 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$b) \quad min \quad z = 5x_1 + 8x_2$$
$$\begin{aligned} s.a: \; & x_1 \leq 400 \\ & x_2 \geq 200 \\ & x_1 + x_2 = 500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

6. En un problema de programación lineal con n variables no restringidas en signo, x_i, con $i = 1, ...n$, puede hacerse el siguiente cambio de variables: $x_i = x_i' - x_0$, $x_i' \geq 0$, $i = 1, ...n$, $x_0 \geq 0$. Usar este cambio de variables para resolver el P. L. Resolver a continuación el mismo problema si las variables son no negativas.

$$a) \quad \max \quad z = 3x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} s.a: \; & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \text{ variables libres} \end{aligned}$$

$$b) \quad \max \quad z = 3x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} s.a: \; & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7. Resolver mediante el algoritmo revisado del simplex el problema lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & x_1 + 3x_2 \\ & s.a: & x_1 \leq 5 \\ & & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & & x_2 \leq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

8. Resolver mediante el algoritmo del simplex los problemas:

$$\begin{array}{llll} a) & max & z = & x_1 + x_2 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & & & 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & min & z = & 2x_1 + x_2 \\ & & s.a: & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & & & 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & & & x_1 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} c) & min & z = & x_1 + x_2 \\ & & s.a: & x_1 + 2x_2 \geq 0 \\ & & & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} d) & max & z = & 3x_1 + 2x_2 \\ & & s.a: & x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & & & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & & & 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & & & 3x_1 - x_2 \leq 11 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

9. Resolver con el método de las penalizaciones los programas:

$$\begin{array}{llll} a) & max & z = & x_1 + x_2 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & min & z = & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ & & s.a: & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 9 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

10. Resolver por el método de las dos fases los problemas lineales:

$$a)\quad \max \quad z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 = 7 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$b)\quad \max \quad z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$c)\quad \min \quad z = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$d)\quad \max \quad z = x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

11. Resolver los problemas lineales:

$$(a)\quad \max \quad z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & |x_1 + 4x_2 - x_3| \leq 14 \\ & |x_1| + x_4 \leq 10 \\ & -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 15 \\ & |x_1| \leq 7, x_3 \leq 9, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(b)\quad \min \quad z = |x_1 + x_2 - 7| + |-x_1 + x_3 + 6| + {}$$
$$+ |x_1 - 2x_2 + x_3| + |-x_2 + x_3 - 10|$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & 2x_1 - x_3 \geq 0 \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

12. Resolver los problemas lineales:

$$(a)\quad \min \quad z = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 9 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(b)\quad \min \quad z = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$$
$$\begin{aligned} s.a:\ & 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20 \\ & x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

13. Sea el problema:

$$\left.\begin{array}{lll} max & z = & x_1 + x_2 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

    (a) Escribirlo en forma estándar.
    (b) Obtener la solución óptima mediante el método del simplex.
    (c) Dibujar la región factible e indicar los puntos de ésta en cada iteración del algoritmo del simplex.

14. Determinar la solución óptima de los problemas lineales:

$$\begin{array}{llll} a) & min & z = & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & & s.\grave{a}: & x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ & & & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ & & & x_1 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & max & z = & x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & & s.a: & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ & & & 3x_1 + 2x_3 \leq 9 \\ & & & x_1, x_3 \geq 0 \end{array}$$

15. Resolver el problema lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

16. Resolver el problema lineal:

$$\begin{array}{lll} min & z = & x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 20 \\ & & 3x_1 + x_3 = 14 \\ & & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

17. Resolver el problema lineal:

$$\begin{array}{lll} min & z = & x_1 + x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 20 \\ & & 3x_1 + x_3 = 14 \\ & & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

18. Resolver por el método de las penalizaciones y el de las dos fases el problema lineal.

$$
\begin{array}{lrl}
\min & z = & 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 \\
& & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\
& & x_3 \geq 400 \\
& s.a: & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 4000 \\
& & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 3300 \\
& & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

2.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

   (a) El número máximo de soluciones básicas es $C_{4,2} = 6$. En este caso sólo hay 5.

Variables básicas	Variables no básicas	Solución
$x_1 = \frac{41}{3},\ x_3 = \frac{25}{3}$	$x_2 = x_4 = 0$	Solución básica factible
$x_2 = \frac{41}{6},\ x_3 = \frac{25}{3}$	$x_1 = x_4 = 0$	Solución básica factible
$x_2 = \frac{-3}{2},\ x_4 = 25$	$x_1 = x_3 = 0$	Solución básica infactible
$x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = \frac{41}{2}$	$x_1 = x_2 = 0$	Solución básica factible
$x_1 = -3,\ x_4 = 25$	$x_2 = x_3 = 0$	Solución básica infactible

   (b) El número máximo de soluciones básicas es $C_{4,2} = 6$. En este caso hay exactamente 6.

2. **Solución:**

   (a) La solución óptima única es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 4$; $z = 20$.

   (b) La solución óptima única es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $z = 24$.

   (c) La solución óptima única es $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 5$.

   (d) La solución óptima única es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_2 = 7$, $z = 28$.

3. **Solución:**

   (a) Problema no acotado.

   (b) La solución óptima única es $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{13}{2}$, $z = 21$.

4. **Solución:**

   (a) La solución óptima única es $x_1 = 44$, $x_2 = 74$, $x_3 = 0$; $z = 88$.

   (b) La solución óptima única es $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; $z = 18$.

5. **Solución:**

   (a) La solución óptima única es $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 10$.

(b) La solución óptima única es $x_1 = 300$, $x_2 = 200$, $z = 3100$.

6. **Solución:**

   (a) Si las variables son irrestringidas el problema es no acotado.

   (b) Si las variables son no negativas, la solución única es $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $z = 9$.

7. **Solución:**

   La solución óptima única es $x_1 = 4$, $x_2 = 4$; $z = 16$.

8. **Solución:**

   (a) Hay soluciones múltiples: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $z = 4$ y $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$, $z = 4$.

   (b) Problema no acotado.

   (c) La solución óptima única es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $z = 0$.

   (d) La solución óptima única es $x_1 = 7/2$, $x_2 = 3/2$, $z = 27/2$.

9. **Solución:**

   (a) Problema infactible.

   (b) La solución óptima es $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 12$.

10. **Solución:**

    (a) Problema infactible.

    (b) La solución óptima es $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $z = -9$.

    (c) La solución óptima es $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 2$.

    (d) Problema no acotado.

11. **Solución:**

    (a) La solución óptima es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 10$, $z = 87$.

    (b) La solución óptima es $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = 0$, $z = \frac{41}{3}$.

12. **Solución:**

    (a) La solución óptima única es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}, \frac{3}{5})$ con $z = \frac{6}{5}$.

    (b) La solución óptima única es
    $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0)$ con $z = -\frac{60}{7}$.

13. **Solución:**

(a) El problema escrito en forma estándar queda:

$$\left.\begin{array}{lll} max & z = & x_1 + x_2 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ & & 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ & & x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\}$$

(b) La solución óptima única es $(x_1, x_2) = (\frac{8}{5}, \frac{8}{5})$ con $z = \frac{16}{5}$.

14. **Solución:**

(a) Problema no acotado.

(b) La solución óptima única es $(x_1, x_2, x_3) = (3, -\frac{1}{2}, 0)$ con $z = \frac{5}{2}$.

15. **Solución:**

El problema tiene una única solución óptima $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 12)$ con $z = 60$.

16. **Solución:**

La solución óptima única es $(x_1, x_2, x_3) = (14/3, 23/3, 0)$ con $z = 37/3$.

17. **Solución:**

El problema es infactible.

18. **Solución:**

La solución óptima única es

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (400, 200, 400, 0)$ con $z = 11600$.

Ejercicios tema 3

Dualidad en programación lineal

3.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 31 *Obtener el dual de los siguientes programas:*

$$
\begin{array}{llll}
a) & max & z = & c'x \\
 & & s.a: & Ax \geq b \\
 & & & x \geq 0 \\
c) & min & z = & c'x \\
 & & s.a: & Ax = b \\
 & & & x \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
b) & max & z = & c'x \\
 & & s.a: & Ax \leq b \\
 & & & x \ \ irrestringida \\
d) & min & z = & c'x \\
 & & s.a: & Ax \leq b \\
 & & & x \leq 0
\end{array}
$$

a) Para obtener el dual del programa:

$$
\begin{array}{lll}
max & z = & c'x \\
 & s.a: & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{lll}
max & z = & c'x \\
 & s.a: & -Ax \leq -b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
$$

Por la definición de dualidad:

$$
\begin{array}{lll}
\min & w = & -b'y \\
 & s.a: & -A'y \geq c \\
 & & y \geq 0
\end{array}
$$

Cambiando $y = -y_1$ resulta el programa dual:

$$
\begin{array}{lll}
\min & w = & b'y_1 \\
 & s.a: & A'y_1 \geq c \\
 & & y_1 \leq 0
\end{array}
$$

b) Para obtener el dual de este programa:

$$\begin{array}{lll} max & z = & c'x \\ & s.a: & Ax \leq b \\ & & x \;\; irrestringida \end{array}$$

Defino $x = x_1 - x_2$ y por tanto obtenemos:

$$\begin{array}{lll} max & z = & c'(x_1 - x_2) \\ & s.a: & A(x_1 - x_2) \leq b \\ & & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \max & z = & \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ & s.a: & \left(\text{A} \mid \text{-A} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \leq b \\ & & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Usando la definición de dualidad:

$$\begin{array}{lll} \min & w = & b'y \\ & s.a: & \left(A \mid -A \right)' y \leq \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \min & w = & b'y \\ & s.a: & \begin{pmatrix} A'y \\ -A'Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

Y por tanto, la forma dual es:

$$\begin{array}{lll} \min & w = & b'y \\ & s.a: & A'y = c \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

c) Para obtener el dual del problema:

$$\begin{array}{lll} min & z = & c'x \\ & s.a: & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lll} \min & z = & c'x \\ & s.a: & \begin{array}{l} Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \end{array} \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Hallando el dual:

$$\begin{array}{lll} \max & w = & (b' \mid -b')\, y \\ & s.a: & \left(A' \mid -A' \right) y \leq c \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \max \quad w = & (b'| - b')\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = b'(y_1 - y_2) \\ s.a: & \begin{pmatrix} A \mid -A \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A'(y_1 - y_2) \leq c \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{array}$$

Tomando $y' = y_1 - y_2$, el dual toma la forma:

$$\begin{array}{rl} \max \quad w = & b'y' \\ s.a: & A'y' \leq c \\ & y' \text{ libre} \end{array}$$

d) Para obtener el dual del problema:

$$\begin{array}{rl} min \quad z = & c'x \\ s.a: & Ax \leq b \\ & x \leq 0 \end{array}$$

Aplicamos, en esta ocasión, las reglas de dualidad. En un problema de minimización, las restricciones de $\leq$ dan lugar a variables duales de $\leq$ y las variables negativas a restriccciones $\geq$ para el dual. Por tanto el problema dual será:

$$\begin{array}{rl} \max \quad w = & b'y \\ s.a: & A'y \geq c \\ & y \leq 0 \end{array}$$

Ejercicio 32 *Hallar los duales de los siguientes problemas:*

$$\begin{array}{lrl} a) & min \quad z = & x_1 + 2x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & & x_1 - x_2 = 3 \\ & & x_1 \geq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} b) & min \quad z = & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & s.a: & 3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ & & 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 4 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \quad \textit{irrestringida} \end{array}$$

a) Para obtener el dual del problema:

$$\begin{array}{rl} min \quad z = & x_1 + 2x_2 \\ s.a: & 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Si aplicamos las reglas de dualidad siguientes:

La primera restricción hace que la variable dual correspondiente, y_1 sea de $\leq$.

La segunda restricción hace que la variable dual correspondiente y_2, sea libre.

La tercera restricción hace que la variable dual correspondiente y_3 sea de $\geq$.

Ambas variables con signo $\geq$ hacen que las restricciones del dual sean ambas desigualdades de $\leq$.

Por tanto el problema dual es:

$$\begin{array}{lll} \max & w = & 16y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\ & s.a: & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\ & & 4y_1 - y_2 \leq 2 \\ & & y_1 \leq 0,\ y_2 \quad libre, \quad y_3 \geq 0 \quad irrestringida \end{array}$$

b) En esta ocasión detallamos todo el proceso:

$$\begin{array}{lll} min & z = & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & s.a: & 3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ & & 2x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 4 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \quad irrestringida \end{array}$$

Definiendo las variables $\left\{ \begin{array}{c} x_2 = -x_2' \\ x_3 = x_3' - x_3'' \end{array} \right.$ obtengo:

$$\begin{array}{lll} min & z = & 2x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \geq 2 \\ & & 2x_1 - 5x_2 - x_3' + x_3'' \geq 4 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0 \end{array}$$

Como está escrito en forma canónica minimizante, hallo directamente el dual que resulta:

$$\begin{array}{lll} \max & w = & 2y_1 + 4y_2 \\ & & 3y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ & s.a: & y_1 - y_2 \leq -1 \\ & & 4y_1 - y_2 \leq 1 \\ & & -4y_1 + y_2 \leq -1 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lll} \max & w = & 2y_1 + 4y_2 \\ & & 3y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ & s.a: & -y_1 + y_2 \geq 1 \\ & & 4y_1 - y_2 = 1 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Ejercicio 33 *Hallar el dual del siguiente problema y obtener la solución del primal y del dual*

$$\begin{array}{lll} \max & z = & x_1 + 6x_2 \\ & s.a: & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Expresándolo en forma canónica maximizante obtenemos:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & x_1 + 6x_2 \\ & s.a: & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Su dual es

$$\begin{array}{lll} \min & w = & -2y_1 + 3y_2 \\ & s.a: & -y_1 + y_2 \geq 1 \\ & & -y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ & & y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0 \end{array}$$

Cambiando $y_1 = -y_1'$ obtenemos:

$$\begin{array}{lll} \min & w = & 2y_{1'} + 3y_2 \\ & s.a: & y_1' + y_2 \geq 1 \\ & & y_1' + 3y_2 \geq 6 \\ & & y_1 \leq 0, \; y_2 \geq 0 \end{array}$$

Para resolver el primal se añaden variables de holgura y una artificial para la primera restricción. La tabla inicial y las restantes tablas hasta llegar al óptimo son las siguientes:

Tabla	I	1	6	0	$-m$	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-m$	x_4	1	1	-1	1	0	2
0	x_5	1	$\boxed{3}$	0	0	1	3
		$-m-1$	$-m-6$	m	0	0	$-2m$

Tabla	II	1	6	0	$-m$	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-m$	x_4	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	1	$\frac{-1}{3}$	1
6	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	1
		$\frac{-2m}{3}+1$	0	m	0	$\frac{-m}{3}+2$	$-m+6$

Tabla	III	1	6	0	$-m$	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_1	1	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$
6	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}+m$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$

La solución óptima para el primal es:

$x_1 = \frac{3}{2}, \; x_2 = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{9}{2}$

La solución del dual es:

$y_1 = z_4 = \frac{-3}{2} + m - m = \frac{-3}{2}, \; y_2 = z_5 = \frac{5}{2}, \quad w = \frac{9}{2}.$

Ejercicio 34 *Hallar la solución del siguiente problema por medio de la tabla óptima del problema dual*

$$\begin{array}{lll} \min & z = & x_1 + x_2 \\ & s.a: & x_2 \leq 2 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & & x_1, \; x_2 \; \textit{libres} \end{array}$$

El problema dual es

$$\begin{array}{lll} \max & w = & 2y_1 + 3y_2 \\ & s.a: & y_1 = 1 \\ & & y_1 + 2y_2 = 1 \\ & & y_1 \leq 0, \;\; y_2 \leq 0 \end{array}$$

Para resolverlo transformamos las variables en no negativas mediante el cambio $y_1 = -y_1', \;\; y_2 = -y_2'$, con lo que el problema toma la forma:

$$\begin{array}{lll} \max & w = & -2y_1' - 3y_2' \\ & s.a: & -y_1' = 1 \\ & & -y_1' - 2y_2' = 1 \\ & & y_1' \geq 0, \;\; y_2' \geq 0 \end{array}$$

Añadiendo variables artificiales la tabla inicial resulta:

Tabla	I	-2	-3	$-m$	$-m$	
Max		y_1'	y_1'	x_3	x_4	
$-m$	x_3	0	-1	1	0	1
$-m$	x_4	-1	-2	0	1	1
		$m+2$	$3m+1$	0	0	$-2m$

La tabla es óptima. Como las variables artificiales son positivas, el problema es infactible, por lo que el problema primitivo ha de ser no acotado o infactible. En este caso es no acotado, ya que al menos admite la solución factible $x_1 = 0, \; x_2 = 0$.

Ejercicio 35 *En el siguiente ejemplo $x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4$ representan las cantidades de los productos que se pueden fabricar en un proceso en el que hay limitación de tiempo de maquinaria para producirlos. Se tiene que*

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \\
 & s.a: & 1.5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 550 \ \textit{(Tiempo máquina A)} \\
 & & 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 700 \ \textit{(Tiempo máquina B)} \\
 & & 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4 \leq 200 \ \textit{(Tiempo máquina C)} \\
 & & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

a) Resolver el problema.

b)Usando la tabla óptima, halle la solución del dual.

c)¿Qué máquinas están trabajando al máximo?

d) Si vamos a aumentar la producción de alguna de las máquinas, ¿cuál ha de tener prioridad? ¿Por qué?

a) Si resolvemos el programa primal, la tabla inicial, tras introducir las variables de holgura, es:

Tabla	I	4	6	3	1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	1.5	2	4	3	1	0	0	550
0	x_6	4	1	2	1	0	1	0	700
0	x_7	2	3*	1	2	0	0	1	200
$z_j - c_j$		-4	-6	-3	-1	0	0	0	$z = 0$

Las tablas que aparecen a continuación corresponden a las distintas iteraciones del algoritmo del simplex para este programa lineal. En las sucesivas tablas, aparece con asterisco el elemento pivote correspondiente.

Tabla	II	4	6	3	2	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_5	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{3}$*	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1250}{3}$
0	x_6	$\frac{10}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1900}{3}$
6	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{200}{3}$
$z_j - c_j$		0	0	-1	3	0	0	2	$z = 400$

Tabla	III	4	6	3	2	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_3	$\frac{1}{20}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	125
0	x_6	$\frac{13}{4}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	425
6	x_2	$\frac{13}{20}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	25
$z_j - c_j$		$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{9}{5}$	$z = 550$

La solución del primal es

$$x_1 = 0, \ x_2 = 25, \ x_3 = 125, \ x_4 = 0; \text{con } \ z = 550.$$

b) La solución óptima del dual es

$$y_1 = \frac{3}{10} = 0.3,\ y_2 = 0,\ y_3 = \frac{9}{4} = 1.8;\ \text{con } w = 550.$$

c) Las máquinas que trabajan al máximo son la A y la C, ya que son nulas sus variables de holgura.

d) Para decidir qué máquina ha de aumentar la producción, ésta será La C, ya que es la que tiene mayor precio sombra, y por tanto un aumento de 1 unidad de tiempo en esta máquina aumentará el valor del objetivo en 1.8.

Ejercicio 36 *Hallar el dual del siguiente problema y obtener la solución del primal y del dual*

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 3x_1 + 4x_2 \\ & s.a: & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Hallamos el dual usando las reglas de dualidad, y obtenemos que el programa dual es:

$$\begin{array}{lll} \min & w = & y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ & s.a: & y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ & & -y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 4 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Para resolver el primal añadimos variables de holgura y una variable artificial:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 3x_1 + 4x_2 \\ & s.a: & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & & x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ & & x_1 - 3x_2 + x_6 = 3 \\ & & x_i \geq 0 \end{array}$$

La tabla inicial del simplex es:

Tabla I		3	4	0	0	$-m$	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	1	-1	1	0	0	0	1
$-m$	x_5	1	$\boxed{1}$	0	-1	1	0	4
0	x_6	1	-3	0	0	0	1	3
		$-m-3$	$-m-4$	0	m	0	0	$-4m$

Tabla	II	3	4	0	0	$-m$	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	2	0	1	-1	1	0	5
4	x_2	1	$\boxed{1}$	0	-1	1	0	4
0	x_6	1	0	0	-3	3	1	15
		1	0	0	-4	$m+4$	0	16

Debería entrar en la base la variable x_4, pero como toda la columna es negativa no podemos sacar ninguna variable de la base. En este caso el problema es no acotado. La dirección detectada de crecimiento de z es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4+\lambda, \quad x_3 = 5+\lambda, \quad x_4 = \lambda, \quad x_5 = 0, \quad \mathrm{x}_6 = 15+3\lambda$$

El valor del objetivo es: $z = \; 3x_1 + 4x_2 \; = 3 \times 0 + 4 \times (4+\lambda) = 16 + 4\lambda$

que tiende a ∞ con λ.

Como el problema primal es no acotado el dual es infactible.

Ejercicio 37 *Resolver usando el algoritmo dual del simplex el programa:*

$$\begin{array}{rl} \min \quad z = & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a: & x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_2 - x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Si cambio de signo la primera y tercera inecuación y añadiendo variables de holgura obtengo la tabla siguiente:

Tabla	I	1	2	3	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	$\boxed{-1}$	1	-1	1	0	0	-4
0	x_5	1	1	2	0	1	0	8
0	x_6	0	-1	1	0	0	1	-2
		-1	-2	-3	0	0	0	$z=0$

El más negativo de los términos independientes es el primero. Considerando sólo los elementos negativos de la primera fila

$\min \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-3}{-1} \right\} = 1$, que corresponde a la primera columna. Por tanto el pivote está en la primera fila y primera columna. Pivoteando sobre este elemento se obtiene:

Tabla	II	1	2	3	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_1	1	-1	1	-1	0	0	4
0	x_5	0	2	1	1	1	0	4
0	x_6	0	$\boxed{-1}$	1	0	0	1	-2
		-1	-2	-3	0	0	0	$z=4$

En esta ocasión sólo hay un valor negativo en la fila por lo tanto sólo hay un posible pivote, en la segunda columna, obteniéndose la siguiente tabla:

Tabla	III	1	2	3	0	0	0	
Min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	x_1	1	0	0	-1	0	-1	6
0	x_5	0	0	3	1	1	2	0
2	x_2	0	1	-1	0	0	-1	2
		0	0	-5	-1	0	-3	$z=10$

La solución óptima es

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0; \quad \text{con } z = 10.$$

Esta solución es degenerada porque la variable básica $x_5 = 0$.

Ejercicio 38 *Dado el problema*

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 2x_1 + 4x_2 \\ & s.a: & -2x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ & & x_1 + x_2 = 4 \\ & & 5x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ & & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \ \textit{irrestringida} \end{array}$$

a) Determinar el dual en forma simétrica.

b) Resolver el problema dual. Obtener a partir de esta solución la del primal, usando el teorema de holgura complementaria.

a) Expresamos el problema dado en forma canónica de maximización:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 2x_1 + 4x_2 \\ & s.a: & -2x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ & & x_1 + x_2 = 4 \\ & & 5x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ & & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \ \textit{irrestringida} \end{array}$$

Cambiamos de signo la primera restricción, descomponemos la segunda en dos restricciones en desigualdad, y obtenemos:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 2x_1 + 4x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & -x_1 - x_2 \leq -4 \\ & & 5x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ & & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \ irrestringida \end{array}$$

Hacemos el cambio
$x_2 = x_2' - x_2''$

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 2x_1 + 4x_2' - 4x_2'' \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \leq 12 \\ & & x_1 + x_2' - x_2'' \leq 4 \\ & & -x_1 - x_2' + x_2'' \leq -4 \\ & & 5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' \leq 18 \\ & & x_1 + x_2' - x_2'' \leq 8 \\ & & x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{array}$$

El dual de este problema es:

$$\begin{array}{lll} \min & w = & 12y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 18y_4 + 8y_5 \\ & & 2y_1 + y_2 - y_3 + 5y_4 + y_5 \geq 2 \\ & s.a: & 3y_1 + y_2 - y_3 + 6y_4 + y_5 \geq 4 \\ & & -3y_1 - y_2 + y_3 - 6y_4 - y_5 \geq -4 \\ & & y_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., 5 \end{array}$$

b) Para resolver este problema conviene cambiar de signo las ecuaciones y resolverlo por el algoritmo dual del simplex. Aplicando el algoritmo dual, obtenemos la solución óptima.

La solución óptima del dual resulta:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 8,\ y_4 = 2,\ y_5 = 0, \quad w = 4.$$

El teorema de holgura complementaria nos indica que son nulas las holguras de la ecuación tercera y cuarta del primal, ya que las variables correspondientes del dual no lo son.

Sustituyendo esta solución en el primal obtengo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 - x_2' + x_2'' = -4 \\ 5x_1 + 6x_2' - 6x_2'' = 18 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 - x_2 = -4 \\ 5x_1 + 6x_2 = 18 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{array} \right. \qquad z = 4.$$

Ejercicio 39 *Dado el problema:*

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ sa: & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 8x_2 \leq 20 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Resolverlo usando el algoritmo de simplex revisado.

b) Hallar la solución del problema dual usando el teorema de holgura complementaria.

a) Añadiendo las variables de holgura resulta:

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ sa: & 3x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & 2x_1 + 8x_2 + x_4 = 20 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Iteración 1:

Partiendo de las variables básicas $x_3,\ x_4$, la matriz básica es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector multiplicador del Simplex es:

$$\vec{s} = c_B \cdot B^{-1} = (0, 0).$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ tendremos:

$$z_N - c_N = (0,0) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - (2,1) = (-2,-1)$$

La variable de entrada será x_1 con coste reducido -2.

Si calculamos $y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La solución actual es: $x_b = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Y la variable de salida será x_3 pues $min \left\{ \frac{10}{3}; \frac{20}{2} \right\} = \frac{10}{3}$.

Iteración 2:

Las nuevas variables básicas son $x_1,\ x_4$, y la matriz básica es

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

El vector multiplicador del Simplex es:

$$\vec{s} = c_B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ tendremos:

$$z_N - c_N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

La variable de entrada será x_2 con coste reducido $-\frac{1}{3}$.

Si calculamos $\quad y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}.$

La solución actual es $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix}.$

Deja de ser básica x_4 pues se cumple que $min \left\{ \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{40}{3}}{\frac{22}{3}} \right\} = \frac{\frac{40}{3}}{\frac{22}{3}}.$

Iteración 3:

Las nuevas variables básicas son x_1, x_2, y la matriz básica es:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix}.$$

El vector multiplicador del Simplex es:

$$\vec{s} = c_B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}.$$

Si calculamos los $z_j - c_j$ tendremos:

$$z_N - c_N = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{1}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}.$$

Los costes reducidos son no negativos, por lo tanto la presente solución es óptima.

La solución actual es $B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{11} \\ \frac{20}{11} \end{pmatrix}.$

El valor óptimo es $\quad z = 2 \times \frac{30}{11} + 1 \times \frac{20}{11} = \frac{80}{11}.$

b) Por ser distintos de cero los valores x_1 y x_2 las variables de holgura del dual son nulas. Por lo tanto bastará resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = 2 \\ y_1 + 8y_2 = 1 \end{cases}.$$

Y por tanto, la solución del dual es: $\{y_1 = \frac{7}{11};\ y_2 = \frac{1}{22},\}$

El valor del objetivo del dual es $\quad z = 10y_1 + 20y_2 = 10 \times \frac{7}{11} + 20 \times \frac{1}{22} = \frac{80}{11}.$

Ejercicio 40 *Una empresa que produce mezclas de frutas enlatadas dispone de 10.000 kg de peras, 7.500 de piña y 10.000 de cerezas. La empresa produce dos tipos de mezclas, cada una en latas de un kilo. La primera mezcla tiene la mitad de peras y la mitad de piña y se vende a 20 u.m. la lata. La segunda mezcla tiene un tercio de peras, un sexto de piña y la mitad de cerezas, y se vende a 10 u.m. la lata. Se pide:*

a) Plantear razonadamente un modelo de programación lineal del problema y resolverlo gráficamente.

b) Obtener la solución dual e interpretar económicamente los valores de las variables duales.

a) Tomando las unidades en miles de kilos, representamos las variables y restricciones siguientes:

Si llamamos a las variables del problema:

x_1 = número de latas de la mezcla 1.

x_2 = número de latas de la mezcla 2.

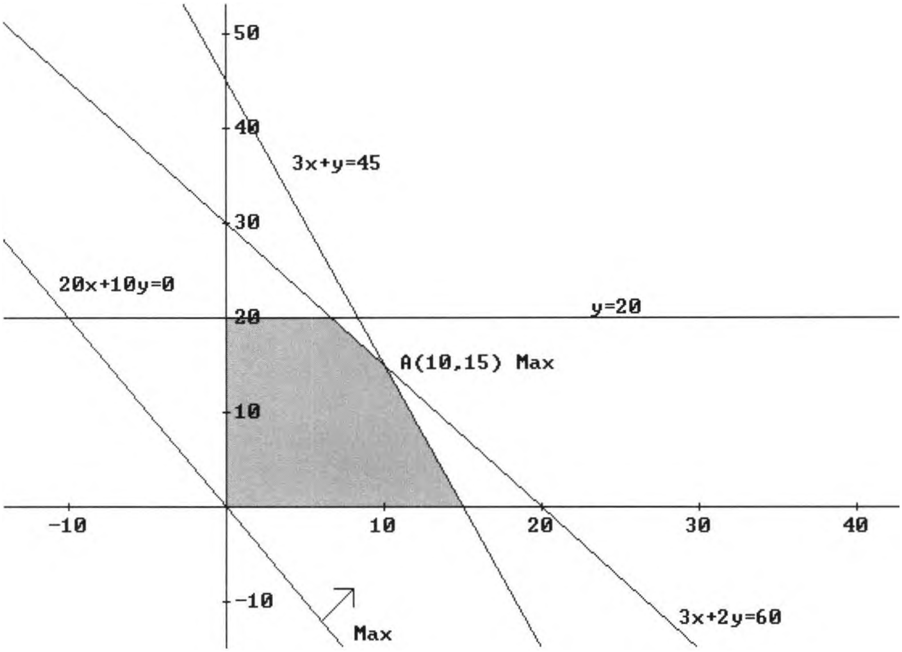
Entonces las restricciones del problema son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + & \frac{1}{3}x_2 & \leq & 10 \\ \frac{1}{2}x_1 + & \frac{1}{6}x_2 & \leq & 7.5 \\ & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x_1 + & 2x_2 & \leq & 60 \\ 3x_1 + & x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \leq & 20 \end{cases}$$

Las variables x_1, x_2 han de ser positivas y enteras.

La función objetivo es: Max $z = 20x_1 + 10x_2$.

Si resolvemos el programa lineal usando el método geométrico, obtenemos que la región factible es la que aparece en la siguiente figura:



Región factible ejercicio 40. Las unidades están representadas en miles de latas.

Y por tanto, el programa primal queda:

$$
\begin{array}{rrl}
max & z = & 20x_1 + 10x_2 \\
 & s.a: & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 10000 \\
 & & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \leq 7500 \\
 & & \frac{1}{2}x_2 \leq 10000 \\
 & & x_1,\ x_2 \geq 0 \ \text{ enteras}
\end{array}
$$

Aunque es un problema de programación lineal entera, como la solución obtenida es entera, ya estaría resuelto.

Por lo que la solución óptima del primal se obtiene en el punto $A(10, 15)$ de la figura anterior, y la solución óptima del programa primal es:

$$x_1 = 10.000,\ x_2 = 15.000, \ \text{ con } \ z = 350.000 \text{ u.m.}$$

b) El programa dual será:

$$\begin{array}{lll} \min & w = & 10000y_1 + 7500y_2 + 10000y_3 \\ & s.a: & \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \geq 20 \\ & & \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \geq 10 \\ & & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \ \text{ enteras} \end{array}$$

Usando el teorema de holgura complementaria, como las variables x_1, x_2 son no nulas en la solución óptima del primal, entonces las dos variables de holgura del programa dual son nulas, con lo que la solución óptima del dual debe verificar el sistema siguiente de restricciones para el programa dual:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 20 \\ \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 10 \end{array} \right. .$$

Y como la variable de holgura de la tercera restricción del primal es no nula, entonces se debe cumplir que $y_3 = 0$.

Si tenemos en cuenta que $y_3 = 0$, y resolvemos el sistema de ecuaciones anterior, obtenemos la solución óptima del dual, que es: $y_1 = y_2 = 20,\ \ y_3 = 0;$ con $w = 350.000$.

Si aumentan en $\triangle$ la cantidad de kilos de peras o de piñas, el beneficio aumenta en $20\triangle$. En cambio si se aumentara la cantidad de cerezas el beneficio no aumentaría porque el precio sombra del kilo de cerezas es 0.

3.2 Ejercicios Propuestos

1. Empleando el teorema de holgura complementaria en forma canónica, obtener las soluciones primal y dual de los programas:

$$\begin{array}{lll} a)\ max & z = & 10x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ & s.a: & 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} b)\ max & z = & 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 19 \\ & & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 57 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

2. Obtener razonadamente el dual de los siguientes problemas de P.L. y hallar las soluciones primal y dual tras estudiar las posibles formas de resolverlo:

$$\begin{array}{lll} a)\ max & z = & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ & s.a: & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} b)\ max & z = & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & s.a: & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & & x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$c)\quad \begin{array}{lll} min & z = & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & & -4x_1 - 2x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ & & x_1, x_3 \geq 0, \quad x_2 \leq 0 \end{array}$$

$$d)\quad \begin{array}{lll} min & z = & x_1 + x_2 + x_3 \\ & s.a: & x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ & & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & & 2x_2 - x_3 \geq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \ irrestringida \end{array}$$

$$e)\quad \begin{array}{lll} min & z = & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & s.a: & x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & & x_2 - x_3 \geq 2 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$f)\quad \begin{array}{lll} max & z = & x_1 + 3x_2 \\ & s.a: & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & & 2x_1 + x_2 = 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

3. Dados los programas lineales siguientes, resolverlos mediante el algoritmo dual del simplex y obtener las soluciones primal y dual.

$$a)\quad \begin{array}{lll} max & z = & -3x_1 - 4x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & & -3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & & -x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{lll} max & z = & x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ & s.a: & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & & -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0 \end{array}$$

4. Plantear el dual del problema:

$$\begin{array}{lll} max & z = & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ & & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Obtener las soluciones primal y dual del problema anterior, estudiando previamente las posibles formas de resolverlo y aplicando la más adecuada.

5. Dado el problema lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & & -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \leq 10 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \;\; x_3 \leq 0 \end{array}$$

Obtener razonadamente el problema dual y hallar las soluciones de ambos.

6. Dado el problema lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & & 4x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & & -4x_1 - 2x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ & & x_1, x_3 \geq 0 \;\; x_2 \leq 0 \end{array}$$

Obtener razonadamente el problema dual y hallar las soluciones de ambos.

7. Una empresa agrícola tiene una granja de 100 hectáreas, dispone de 20.000 u.m. para invertir y 4.000 horas-hombre de mano de obra. La empresa puede invertir en dos cosechas: trigo y maíz; y en tres tipos de animales: vacas, cerdos y gallinas. Para la cosecha no se necesita inversión inicial, pero cada vaca costará 500 u.m., cada cerdo 100 u.m. y cada gallina 5 u.m.

   Cada vaca necesita 0.2 hectáreas de terreno y 75 horas-hombre y proporcionará un beneficio anual de 400 u.m. Cada cerdo necesita 0.1 hectáreas de terreno y 25 horas-hombre y proporcionará un beneficio anual de 50 u.m. Las vacas y cerdos deberán ir a un corral y no se desea que ese corral ocupe más de 15 hectáreas.

   Las gallinas no necesitan terreno de la granja, pues irán a un gallinero con una capacidad máxima de 600 gallinas; cada gallina requiere 1 hora-hombre y proporciona un ingreso anual de 2 u.m. Por otra parte, las necesidades de horas-hombre y el beneficio anual por hectárea sembrada son:

	Trigo	*Maíz*
Horas − hombre	30	40
Beneficio anual	600	900

   En caso de que no se necesite una parte de las horas-hombre, los trabajadores de la granja pueden trabajar en una granja vecina con un beneficio de 5 u.m. por hora-hombre empleada. Resolver el problema de programación lineal planteado, obteniendo las soluciones primal y dual con sus respectivas interpretaciones.

3.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

(a) $x_1 = 0, x_2 = 0,\ \ x_3 = \frac{40}{3},\ \ y_1 = 3,\quad z = w = 120.$

(b) $x_1 = 0, x_2 = 14,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1,\ y_1 = 4,\ y_1 = 5,\ z = w = 361.$

2. **Solución:**

   (a) $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3},\ \ y_1 = \frac{-7}{3}, y_2 = \frac{-1}{3}, z = w = \frac{-23}{3}.$

   (b) $x_1 = x_3 = 0, x_2 = 2,\ \ y_1 = \frac{1}{5}, y_2 = \frac{6}{5},\ \ z = w = 6.$

   (c) $x_1 = 4, x_2 = -5, x_3 = 0,\ \ y_1 = -5, y_2 = 4,\ \ y_3 = 0,\ \ z = w = -11.$

   (d) $x_1 = 0, x_2 = \frac{21}{5}, x_3 = \frac{22}{5},\ \ y_1 = \frac{3}{5}, y_2 = 0, y_3 = \frac{7}{5}, z = w = \frac{43}{5}.$

   (e) $x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 0,\ \ y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 3,\ \ z = w = 10.$

   (f) Primal no factible, dual ilimitado.

3. **Solución:**

   (a) $x_1 = 2, x_2 = 4,\ \ y_1 = 0,\quad y_2 = 5,\ \ y_3 = -12,\ \ z = w = -22.$

   (b) Primal no acotado, dual infactible.

4. **Solución:**

   $x_1 = 0,\ \ x_2 = 1, x_3 = 0,\quad y_1 = -\frac{2}{3},\quad y_2 = 0,\ \ z = w = -2.$

5. **Solución:**

   $x_1 = 0,\ \ x_2 = 43, x_3 = -12,\quad y_1 = 14,\quad y_2 = 0,\ \ y_3 = \frac{11}{2},\ \ z = w = 153.$

6. **Solución:**

   $x_1 = 1.5,\quad x_2 = 0,\ x_3 = 0.833,\quad y_1 = 0.667,\quad y_2 = -0.25,\quad y_3 = 0,$ $z = w = 3.1667.$

7. **Solución:**

   Si denominamos las variables de decisión V, C, G, T, M, R como sigue:

   $V =$ Número de vacas. $C =$ Número de cerdos. $G =$ Número de gallinas.

   $T =$ Hectáreas que se siembran de trigo. $M =$ Hectáreas que se siembran de maíz.

   $R =$ Resto de las horas hombre que se destinan a la granja vecina.

   Entonces la solución óptima es $M = 100$ y el resto de variables nulas.

   La solución óptima del problema consiste en sembrar únicamente 100 hectáreas de maíz, lo que reportaría un beneficio de 90000 u.m.

   No se dedica ningún terreno a la ganadería ni se gasta el dinero dedicado a la inversión (20000 u.m.).

   La solución del problema dual es:

   $y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = 0,\ \ y_4 = 22.5.$

   La restricción cuarta se refiere a las horas de trabajo. Por lo tanto por cada hora más de trabajo se prevé un aumento del beneficio de 22.5 unidades monetarias, siempre que quedemos dentro del campo de variación permitido por la base óptima actual. En este caso el rango de variación para el número de horas es de 0 a 4000 horas. Por tanto este valor de 22. 5 por unidad sólo es válido para la disminución del número de horas que acarrearía una pérdida del beneficio.

Ejercicios tema 4

Análisis de sensibilidad

4.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 41 *Resolver el problema de P.L.*

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ s.a.:\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

y usando su tabla óptima ver que ocurriría si la función objetivo pasara a ser $Z' = x_1 + 3x_2 - x_3$.

Si resolvemos el programa usando el algoritmo del Simplex tenemos la tabla inicial siguiente:

Tabla	I	3	2	1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_4	0	1	2	1	1	0	0	10
x_5	0	1	1	2	0	1	0	9
x_6	0	2*	0	3	0	0	1	12
$Z_j - C_j$		-3	-2	-1	0	0	0	$Z_0 = 0$

Como la tabla anterior no es óptima, pivotamos sobre el elemento marcado con asterisco, y tras efectuar las iteraciones correspondientes, obtenemos las tablas que aparecen a continuación.

La variable de salida es x_1 y la variable de salida es x_6 pues $\min\{\frac{10}{1}, \frac{9}{1}, \frac{12}{2}\} = 6$. Tras cambiar de base, tenemos la siguiente tabla:

Tabla	II	3	2	1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_4	0	0	2^*	$-1/2$	1	0	$-1/2$	4
x_5	0	0	1	$1/2$	0	1	$-1/2$	3
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	6
$Z_j - C_j$		0	-2	$7/2$	0	0	$3/2$	$Z = 18$

La variable de salida es x_2 y la variable de salida es x_4 pues $min\{\frac{4}{2}, \frac{3}{1}\} = 2$.

Tabla	III	3	2	1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_2	2	0	1	$-1/4$	$1/2$	0	$-1/4$	2
x_5	0	0	0	$3/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	1
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	6
$Z_j - C_j$		0	0	3	1	0	1	$Z = 22$

La solución óptima es $x_1 = 6, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad Z = 22.$

Para hacer el cambio en la función objetivo, tenemos en cuenta que

la base es $B = (a_2, a_5, a_1)$

$$X_B = B^{-1} \cdot b; \qquad y_j = B^{-1} \cdot a_j; \qquad Z_j - C_j = C_B^t \cdot y_j - C_j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C^t = (3, 2, 1, 0, 0, 0,) \quad C_B^t = (2, 0, 3).$$

Si hacemos cambios en la función objetivo

$X_B = B^{-1} \cdot b \ \ , y_j = B^{-1} \cdot a_j, \ Z_j - C_j = B_B^t \cdot y_j - C_j \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Z_j - C_j' = C_B'^t \cdot y_j - C_j'$

$$\begin{array}{lcl} C^t = (3, 2, 1) & \longrightarrow & C'^t = (1, 3, -1) \\ C_B^t = (2, 0, 3) & \longrightarrow & C_B'^t = (3, 0, 1) \end{array}$$

$$Z_3 - C_3 = (3,0,1)\begin{pmatrix} -1/4 \\ 3/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} - 1 = \frac{-3}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$Z_4 - C_4 = (3,0,1)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{3}{2}$$

$$Z_6 - C_6 = (3,0,1)\begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} - 0 = \frac{-3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}.$$

Si todos hubiesen sido positivos la solución seguiría siendo óptima y sólo cambiaría la función objetivo. Como nos da un número negativo, $z_6 - c_6 < 0$, seguimos haciendo iteraciones hasta que nos salgan todos los valores positivos.

Tendríamos la siguiente tabla:

Tabla	IV	1	3	−1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_2	3	0	1	−1/4	1/2	0	−1/4	2
x_5	0	0	0	3/4	−1/2	1	−1/4	1
x_1	1	1	0	3/2	0	0	1/2*	6
$Z_j - C_j$		0	0	7/4	3/2	0	−1/4	$Z = 12$

Tabla	V	1	3	−1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_2	3	1/2	1	1/2	1/2	0	0	5
x_5	0	1/2	0	3/2	−1/2	1	0	4
x_6	0	2	0	3	0	0	1	12
$Z_j - C_j$		1/2	0	5/2	3/2	0	0	$Z = 15$

La solución óptima del programa en el que hemos modificado la función objetivo es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad Z' = 15.$$

Ejercicio 42 *Suponiendo que en el problema del enunciado en el ejercicio que aparece con la etiqueta (4.1) de la página 347, hacemos cambios en los términos independientes:*

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \longrightarrow b' = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Resolver el problema resultante.

Si cambio $b \longrightarrow b'$, $X_B = B^{-1} \cdot b \longrightarrow X'_B = B^{-1} \cdot b'$ varía, pero las demás expresiones no varían.

Si nos fijamos en el ejemplo anterior tenemos:

$$X'_B = B^{-1} \cdot b' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ -5/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si hubiesen salido todos los X'_i positivos, la solución sería óptima, como no es así construimos la tabla:

Tabla	I	3	2	1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_2	2	0	1	$-1/4$	$1/2$	0	$-1/4$	9/2
x_5	0	0	0	$3/4$	$-1/2^*$	1	$-1/4$	-5/2
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	3
$Z_j - C_j$		0	0	3	$1/2$	0	1	$Z = 18$

La tabla anterior es la tabla óptima del problema primitivo, Tabla III del ejercicio anterior (ver página 348), en la que se ha actualizado el valor de la última columna.

Para continuar resolviendo el problema usamos el algoritmo dual del simplex. Pivotamos sobre el elemento marcado con asterisco en la Tabla I, pues se verifica que $max\{\frac{1/2}{-1/2}, \frac{1}{-1/4}\} = max\{-1, -4\} = -1$.

Tabla	II	3	2	1	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	X_B
x_2	2	0	1	$1/2$	0	1	$-1/2$	2
x_4	0	0	0	-3/2	1	-2	$1/2$	5
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	3
$Z_j - C_j$		0	0	$11/2$	0	2	$1/2$	$Z = 13$

La solución óptima es $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $Z = 13$.

Ejercicio 43 *Suponiendo que en el problema del enunciado en el ejercicio etiquetado con (4.1) de la página 347, hacemos cambios en la columna tercera:*

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow a'_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 9 \\ 2x_1 + 2x_3 & \leq & 12 \end{cases}$$

Resolver el problema resultante.

Como esta columna es de una variable no básica podemos partir de la tabla óptima del problema correspondiente, la Tabla III de la página 348.

Cambiando $a_k \longrightarrow a'_k$ resulta:

$X_B = B{-}1 \cdot b$ no varía

$y_j = b^{-1} \cdot a_j$ varía la columna y_k

$Z_j - C_j = C_B^t \cdot y_j - C_j$, y por tanto sólo varía $Z_k - C_k$

a) Si $Z_k - C_k$ sigue siendo positivo, la solución sigue siendo óptima pero su valor cambia.

b) Si $Z_k - C_k$ pasa a ser negativo, entonces hay que hacer mas iteraciones.

Vamos a ver qué ocurre en este caso:

$$y'_3 = B^{-1} \cdot a'_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_3 - C_3 = C_B^t \cdot y'_3 - C_3 = (2,0,3) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 3.$$

Y por tanto la solución anterior sigue siendo óptima porque todos los $Z_j - C_j$ son positivos.

Ejercicio 44 *Resolver el problema que resulta de añadir al enunciado del ejercicio número (41) de la página 347, una nueva variable, x_7, con los coeficientes:*

$$a_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y con coste C_7=1.

Si añadimos nuevas variables tenemos:

$$A_{m \times n} \text{ (hay } n \text{ variables)} \longrightarrow \begin{matrix} x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \\ a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots \end{matrix}$$

Entonces:

$X_B = B^{-1} \cdot b$ no varía

$y_j = B^{-1} \cdot a_j \quad j = 1, 2, \cdots n$ no varían, pero hay nuevas columnas $\quad y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots$

$Z_j - C_j = C_B^t \cdot y_j - C_j \quad j = 1, 2, \cdots, n$ no varían, pero hay que calcular

$Z_{n+1} - C_{n+1}; Z_{n+2} - C_{n+2}, \cdots$

Vamos a ver qué ocurre en este caso: Introducimos la variable de decisión x_7.

Tenemos que calcular $y_7, \; Z_7 - C_7$.

$$y_7 = B^{-1} \cdot a_7 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$Z_7 - C_7 = C_B^t \cdot y_7 - C_7 = (2, 0, 3) \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 1 = -1.$$

Si hubiera salido positivo seguiría teniendo la condición de óptimo, pero como no ha sido así, tenemos que construir la nueva tabla a partir de la Tabla III de la página 348 del ejercicio número (41), y obtenemos:

Tabla	I	3	2	1	0	0	0		
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_B
x_2	2	0	1	$-1/4$	$1/2$	0	$-1/4$	$3/4$	2
x_5	0	0	0	$3/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	$3/4^*$	1
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	$-1/2$	6
$Z_j - C_j$		0	0	3	1	0	1	-1	$Z = 22$

Como no es óptima, pivotamos sobre el elemento marcado con asterisco, y obtenemos que x_5 deja de ser básica, y entra en la base x_7 pues se verifica que $min\{\frac{1}{3/4}, \frac{2}{3/4}\} = \frac{4}{3}$. Entonces tenemos la siguiente tabla:

Tabla	II	3	2	1	0	0	0		
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_B
x_2	2	0	1	-1	1	-1	0	0	1
x_7	1	0	0	1	$-2/3$	$4/3$	$-1/3$	1	$4/3$
x_1	3	1	0	2	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	0	$20/3$
$Z_j - C_j$		0	0	4	$1/3$	$4/3$	$2/3$	0	$Z = 70/3$

Y la solución óptima para el nuevo problema es:

$$x_1 = \tfrac{20}{3}, \;\; x_2 = 1, \;\; x_3 = 0, \;\; x_7 = \tfrac{4}{3}, \qquad Z = 70/3.$$

Ejercicio 45 *Si incluimos la restricción: $x_1 + x_2 \leq 7$, en el problema enunciado en (4.1) de la página 347. ¿Cuál sería la nueva solución óptima?*

Como la nueva restricción es $x_1 + x_2 \leq 7 \Longrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_7 = 7$, donde x_7 es una variable de holgura.

Cuando incluimos restricciones, si la solución X_B verifica las nuevas restricciones entonces es óptima. Si no verifica alguna restricción hay que incluirla en la tabla. Como la solución óptima X_B del problema original del ejercicio (4.1) es: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, y no verifica la restricción anterior, entonces hay que incluirla.

Si partimos de la tabla óptima del problema inicial, Tabla III (ver página 348), tras añadir la variable x_7 a la base, obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	I	3	2	1	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_B
x_2	2	0	1	$-1/4$	$1/2$	0	$-1/4$	0	2
x_5	0	0	0	$3/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	0	1
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	0	6
x_7	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	7
$Z_j - C_j$		0	0	3	1	0	1	0	$Z = 22$

Los valores que aparecen encuadrados en la tabla anterior, tenemos que hacerlos cero. Conseguimos hacerlos cero simultáneamente restando a la cuarta fila de la tabla las filas 1 y 3, así obtenemos la siguiente tabla:

Tabla	II	3	2	1	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_B
x_2	2	0	1	$-1/4$	$1/2$	0	$-1/4$	0	2
x_5	0	0	0	$3/4$	$-1/2$	1	$-1/4$	0	1
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	0	6
x_7	0	0	0	$-5/4$	$-1/2^*$	0	$-1/4$	1	-1
$Z_j - C_j$		0	0	3	1	0	1	0	$Z = 22$

Si aplicamos el algoritmo dual del simplex, tenemos que sale de la base x_7 y entra en la base x_4 pues:

$$max\{\frac{3}{-5/4}, \frac{1}{-1/2}, \frac{1}{-1/4}\} = max\{\frac{-12}{5}, -2, -4\} = -2.$$

Tabla	III	3	2	1	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_B
x_2	2	0	1	$-3/2$	0	0	$-1/2$	1	1
x_5	0	0	0	2	0	1	0	-1	2
x_1	3	1	0	$3/2$	0	0	$1/2$	0	6
x_4	0	0	0	$5/2$	1	0	$1/2$	-2	2
$Z_j - C_j$		0	0	$1/2$	0	0	$1/2$	2	$Z = 20$

La solución óptima es $x_1 = 6, \;\; x_2 = 1, \;\; x_3 = 0$ con $Z = 20$.

Ejercicio 46 *Dado el programa lineal:*

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 3x_1 + 5x_2 \\ s.a.:\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Determinar la solución óptima.

(b) Efectuar el análisis de sensibilidad para cada coeficiente de coste.

(c) Efectuar el análisis de sensibilidad para los dos coeficientes de coste.

(a) Para determinar la solución óptima del programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{Max Z} &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a.:}\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \\ & x_1 + x_4 = 4 \\ & x_2 + x_5 = 6 \\ & x_1, \cdots, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Si construimos la tabla del simplex tenemos la tabla inicial y las restantes, en las que pivotamos sobre los elementos etiquetados con asterisco, y así obtenemos las siguientes tablas:

Tabla	I	3	5	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_3	0	3	2	1	0	0	18
x_4	0	1	0	0	1	0	4
x_5	0	0	1^*	0	0	1	6
$Z_j - C_j$		-3	-5	0	0	0	$Z = 0$

$min\{\frac{18}{2}, \frac{6}{1}\} = 6$

Tabla	II	3	5	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_3	0	3*	0	1	0	-2	6
x_4	0	1	0	0	1	0	4
x_2	5	0	1	0	0	1	6
$Z_j - C_j$		-3	0	0	0	5	$Z = 30$

$min\{\frac{6}{3}, \frac{4}{1}\} = 2$

		3	5	0	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_1	3	1	0	1/3	0	$-2/3$	2
x_4	0	0	0	$-1/3$	1	2/3	2
x_2	5	0	1	0	0	1	6
$Z_j - C_j$		0	0	1	0	3	$Z = 36$

(4.2)

La solución óptima es $x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad Z = 36$.

(b) **Estudio para c_1 (solo varía c_1).**

$c_1 = 3 \longrightarrow c_1 = 3 + \Delta c_1$

Ha de cumplirse que $Z_j - C_j \geq 0$

Hay que estudiar:

$$Z_3' - c_3 = (3 + \Delta c_1, 0, 5) \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 + \tfrac{1}{3}\Delta c_1 \geq 0$$

$$Z_5' - c_5 = (3 + \Delta c_1, 0, 5) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 =$$

$$= -2 - \tfrac{2}{3}\Delta c_1 + 5 = 3 - \tfrac{2}{3}\Delta c_1 \geq 0.$$

Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{3}\Delta c_1 \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{3}\Delta c_1 \geq -1 \longrightarrow \Delta c_1 \geq -3 \\ 3 - \frac{2}{3}\Delta c_1 \geq 0 \Longrightarrow \frac{2}{3}\Delta c_1 \leq 3 \longrightarrow \Delta c_1 \leq \frac{9}{2} \end{array} \right\} -3 \leq \Delta c_1 \leq \frac{9}{2}.$$

Pero como $c_1' = c_1 + \Delta c_1 = 3 + \Delta c_1 \Longrightarrow \boxed{0 \leq c_1' \leq 15/2}$.

En este intervalo la solución del apartado (a) sigue siendo óptima.

Estudio para c_2 (solo varía c_2).

$c_2 = 5 \longrightarrow c_2' = 5 + \Delta c_2$

Ha de cumplirse que $Z_j - C_j \geq 0$

Hay que estudiar

$$Z'_3 - c_3 = (3, 0, 5 + \Delta c_2) \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 \geq 0$$

$$Z'_5 - c_5 = (3, 0, 5 + \Delta c_2) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 =$$
$$= 2 + 5 + \Delta c_2 = 3 + \Delta c_2 \geq 0.$$

Entonces $\Delta c_2 \geq -3$ pero como $c'_2 = 5 + \Delta c_2 \Longrightarrow c'_2 \geq 2$.

La solución del apartado (a) sigue siendo óptima si $c'_2 \geq 2$.

(c)**Estudio de la sensibilidad para C_1 y C_2.**

$$\begin{array}{l} c_1 = 3 \longrightarrow c'_1 = 3 + \Delta c_1 \\ c_2 = 5 \longrightarrow c'_2 = 5 + \Delta c_2 \end{array}$$

Ha de cumplirse que $Z_j - c_j \geq 0$.

Hay que estudiar:

$$Z'_3 - c_3 = (3\Delta c_1, 0, 5 + \Delta c_2) \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1 + \tfrac{1}{3}\Delta c_1 \geq 0$$

$$Z'_5 - c_5 = (3 + \Delta c_1, 0, 5 + \Delta c_2) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 =$$
$$= -\tfrac{2}{3}\Delta c_1 + \Delta c_2 + 3 \geq 0.$$

Ejercicio 47 *Si consideramos el ejemplo anterior, cuya tabla óptima es la que aparece etiquetada con (4.2) en la página 355. Estudiar el análisis de sensibilidad independientemente para b_1, b_2 y b_3.*

Estudio para b_1 :

$$b = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow b' = \begin{pmatrix} 18 + \Delta b_1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x'_B &= B^{-1}b = B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3\Delta b_1 \\ -1/3\Delta b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \\ 2 - \frac{1}{3}\Delta b_1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \geq -6 \\ \Delta b_1 \leq 6 \end{cases}$$

$$-6 \leq \Delta b_1 \leq 6$$

Como $b_1 = 18$ entonces $12 \leq b'_1 \leq 24$.

La tabla sigue siendo óptima pero ahora la solución óptima es:

$$x'_1 = 2 + \frac{1}{3}\Delta b_1 \quad x'_2 = 6.$$

Estudio para b_2 :

$$b = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow b' = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 + \Delta b_3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'_B &= B^{-1}b = B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow 2 + \Delta b_2 \geq 0 \Longrightarrow \Delta b_2 \geq -2 \Longleftrightarrow b'_2 \geq 2.$$

La tabla sigue siendo óptima, la solución óptima es:

$$x'_1 = 2, \quad x'_2 = 6.$$

Estudio para b_3 :

$$b = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow b' = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6+\Delta b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'_B &= B^{-1}b = B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3\Delta b_3 \\ 2/3\Delta b_3 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2 - \frac{2}{3}\Delta b_3 \geq 0 \\ 2 + \frac{2}{3}\Delta b_3 \geq 0 \\ 6\Delta b_3 \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Delta b_3 \leq 3 \\ \Delta b_3 \geq -2 \\ \Delta b_3 \geq -6 \end{array} \right. \Longrightarrow -2 \leq \Delta b_3 \leq 3 \end{aligned}$$

Como $b_3 = 6$ entonces $4 \leq b'_1 \leq 9$.

La tabla sigue siendo óptima pero ahora la solución óptima es:

$$x'_1 = 2 - \frac{2}{3}\Delta b_3, \quad x'_2 = 6 + \Delta b_3.$$

Ejercicio 48 *Una empresa metalúrgica fabrica tres tipos de aluminio. El beneficio por tonelada de cada tipo es respectivamente de 3, 1 y 4 u.m. Para fabricar una tonelada de cada tipo de aluminio se necesitan respectivamente 6, 3 y 5 kg de manganeso, siendo la disponibilidad máxima diaria de manganeso de 25 kg. Además para producir una tonelada de cada uno de los tipos se precisa de 3, 4 y 5 horas de trabajo respectivamente, siendo 20 las horas de trabajo diarias. Se pide:*

1. *Construir un modelo de programación lineal para obtener el máximo beneficio.*

2. *Obtener el plan de producción óptima.*

3. *Obtener los planes óptimos de producción a medida que ocurran los siguientes cambios, que se consideran acumulativos:*

a) Debido a una fluctuación de mercado los beneficios por tonelada pasan a ser de 2, 3 y 4.

b)Por problemas de mantenimiento las horas de trabajo bajan a 18 diarias.

c) Debido a un nuevo método de fabricación del aluminio II sus necesidades de manganeso por tonelada se reducen a 2 kg.

d) La empresa se plantea fabricar un cuarto tipo de aluminio de baja calidad que por tonelada da un beneficio de $\frac{5}{2}$ u.m., necesita 1 kg. de manganeso y precisa dos horas de trabajo. ¿Merece la pena fabricarlo?

1) Si consideramos las variables x_i como las Tm. de cada uno de los tres tipos de aluminio, el modelo de programación lineal es:

$$\begin{array}{l} \text{Max Z} = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ \qquad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2) Añadiendo las variables de holgura, obtenemos la tabla inicial de simplex y el resto de tablas necesarias hasta llegar al óptimo:

Tabla	I	3	1	4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_4	0	6	3	5	1	0	25
x_5	0	3	4	5*	0	1	20
$Z_j - C_j$		-3	-1	-4	0	0	0

Tabla	II	3	1	4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_4	0	3	-1	0	1	-1	5
x_3	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	4
$Z_j - C_j$		$-\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	16

Tabla	III	3	1	4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_1	3	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	4	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3
$Z_j - C_j$		0	2	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	17

El plan de producción óptima es:

$\frac{5}{3}$ de aluminio I, 0 de aluminio II y 3 de aluminio III con $Z = 17$ u.m.

3a) Si hay fluctuaciones de mercado en los beneficios, tenemos que:

$$z_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = \frac{1}{3}$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} - 0 = -\frac{2}{15}$$

$$z_5 - c_5 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} - 0 = \frac{14}{15}.$$

Realizando estos cambios en la Tabla III anterior, obtenemos las siguientes:

Tabla	IV	2	3	4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_1	2	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}*$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	4	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3
$Z_j - C_j$		0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{46}{3}$

Tabla	V	3	1	4	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_B
x_4	0	3	-1	0	1	-1	5
x_3	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	4
$Z_j - C_j$		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	16

La fabricación debe ser en este caso 0 Tm. tanto de aluminio I como de aluminio II y 4Tm. de aluminio III, con $Z = 16$ u.m.

3b) Si las horas de trabajo bajan, entonces cambian los recursos.

Se trata del siguiente cambio en los recursos:

$$b = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix} \longrightarrow b' = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la base actual permanece óptima. En este caso la solución es:

0 Tm. tanto de aluminio I como de aluminio II, $\frac{18}{5}$ Tm. del III, con $Z = \frac{72}{5}$ u.m.

3c) Si las necesidades de manganeso se reducen, se produce un cambio en una de las columnas.

Es un cambio en la columna de una variable no básica, y por tanto:

$$z_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 = \frac{11}{5}.$$

Como el programa está escrito en forma maximizante, y $z_2 - c_2 > 0$, no cambia la base óptima y la solución anterior sigue siendo óptima: 0 Tm. de aluminio I y 0 Tm. de al. II, $\frac{18}{5}$ Tm. de al. III, con $Z = \frac{72}{5}$ u.m.

3d) Cuando la empresa se plantea fabricar un nuevo tipo de aluminio, tendremos que añadir una nueva columna.

Se trata en este caso de añadir una nueva columna, x_6. Los elementos de esta columna serían 1 y 2 en la tabla inicial y $-\frac{5}{2}$ en la última. En la última tabla serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

y en la columna de los costes reducidos:

$$z_6 - c_6 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} = -\frac{9}{10}.$$

Como este valor es negativo, la tabla no sería óptima:

Tabla	VI	3	1	4	$\frac{5}{2}$	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_6	x_4	x_5	X_B
x_4	0	3	-1	0	-1	1	-1	5
x_3	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{2}{5}*$	0	$\frac{1}{5}$	4
$Z_j - C_j$		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{9}{10}$	0	$\frac{4}{5}$	16

Tabla	VII	3	1	4	$\frac{5}{2}$	0	0	
Max		x_1	x_2	x_3	x_6	x_4	x_5	X_B
x_4	0	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_6	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	10
$Z_j - C_j$		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$	25

Esta es la tabla óptima. Por lo tanto resulta que sí merece la pena fabricarlo, ya que se obtiene mayor beneficio. La solución consiste en fabricar 0 Tm de aluminio I, II y III, y 10 Tm de aluminio IV, con un beneficio $Z = 25$ u.m.

Ejercicio 49 *El problema*

$$\begin{array}{lrl} Max & & z = x_1 + 3x_2 \\ & s.a: & x_1 + x_2 \leq 6 - t \\ & & -x_1 + 2x_2 \leq 6 + t \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

tiene como tabla óptima para $t = 0$

x_1	x_2	h_1	h_2	
1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Da la solución óptima y el valor de la función objetivo para todo valor de t.

La tabla inicial es:

Tabla I	x_1	x_2	h_1	h_2	X_B	$X_B(t)$
h_1	1	1	1	0	6	-1
h_2	-1	2	0	1	6	1
$z_j - c_j$	-1	-3	0	0		

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Transformando la última columna aparece:

$$B^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que obtenemos la nueva tabla:

x_1	x_2	h_1	h_2	
1	0	$\frac{2}{3}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$2-t$
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	

que será óptima si $t \leq 2$.

Si $t > 2$, el primer elemento de la columna de las b_i es negativo, pero los costes reducidos son positivos. Se puede aplicar el algoritmo dual del simplex usando como pivote el único elemento negativo de la columna de h_2. Realizando este pivotaje se obtiene:

x_1	x_2	h_1	h_2	
-3	0	-2	1	$-6+3t$
1	1	1	0	$6-t$
2	0	3	0	

Esta solución es óptima si t está entre 2 y 6.

Si $t > 6$ la solución actual es dual factible, ya que el segundo elemento de la columna de las b_i sería negativo. Como en esta fila todos los elementos son positivos no se puede elegir un pivote. El dual es acotado y el primal es infactible.

En resumen, las soluciones óptimas de este programa paramétrico son:

Si $t \leq 2$, la solución es $x_1 = 2 - t$, $x_2 = 4$, $z = (2-t) + 3 \times 4 = 14 - t$.

Si $2 \leq t \leq 6$, la solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 6 - t$, $z = 3(6-t)$.

Si $t > 6$, el problema es infactible.

Ejercicio 50 *Resolver el programa lineal paramétrico*

$$\begin{array}{lll} Max & z = & (2-t)x_1 + (4+2t)x_2 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

indicando en cada caso el intervalo de t para el que la base permanece óptima.

La tabla óptima correspondiente a $t = 0$ viene dada por:

Tabla	I	x_1	x_2	x_3	x_4	
4	x_2	1/2	1	1/2	0	5/2
0	x_4	1/2	0	−1/2	1	3/2
		0	0	2	0	10

Veamos el intervalo de t en que esta solución permanece óptima:

Tabla	II		−1	2	0	0	
			2	4	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
2	4	x_2	1/2	1	1/2	0	5/2
0	0	x_4	$\boxed{1/2}$	0	−1/2	1	3/2
			0	0	2	0	10
			2	0	1	0	5

La solución actual permanece óptima si:

$$2t \geq 0,\ 2+t \geq 0 \Longrightarrow t \geq 0.$$

En este extremo es nulo el coste reducido de la primera columna. Entra x_1 y sale x_4. Realizando el pivoteo se obtiene la nueva solución:

Tabla	III						
			-1	2	0	0	
			2	4	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
2	4	x_2	0	1	$\boxed{1}$	-1	1
-1	2	x_1	1	0	-1	2	3
			0	0	2	0	10
			0	0	3	-4	-1

Esta solución es óptima si se cumple:

$$2+3t \geq 0,\ -4t \geq 0 \Longrightarrow -\tfrac{2}{3} \leq t \leq 0.$$

Si $t = -\frac{2}{3}$ entra x_3 en la base y sale x_2, obteniéndose la tabla siguiente:

Tabla	IV						
			-1	2	0	0	
			2	4	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	x_3	0	1	1	-1	1
-1	2	x_1	1	1	0	1	4
			0	-2	0	2	8
			0	-3	0	-1	-4

La solución actual se mantiene óptima si:

$$-2-3t \geq 0,\ 2-t \geq 0 \Longrightarrow t \leq -\tfrac{2}{3}.$$

En resumen, el programa lineal paramétrico tiene como solución óptima:

Si $-\infty \leq t \leq -\frac{2}{3}$, la solución es $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ z = 8 - 4t$.

Si $-\frac{2}{3} \leq t \leq 0$, la solución es $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ z = 10 - t$.

Si $0 \leq t \leq \infty$, la solución es $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{2},\ z = 10 + 5t$.

Ejercicio 51 *Resolver el siguiente problema para todos los valores del parámetro t:*

$$\begin{array}{rl} \max & z = 2x_1 + (1+t)x_2 \\ sa: & 4x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 1500 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Hallamos la tabla óptima para $t = 0$ y obtenemos:

Tabla	I	2	1	0	0	
0	h_1	4	3	1	0	2400
0	h_2	$\boxed{4}$	1	0	1	1500
		-2	-1	0	0	0

Tabla	II	2	1	0	0	
0	h_1	0	$\boxed{2}$	1	-1	900
2	x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	375
		0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	750

Tabla	III	2	1	0	0	
1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	450
2	x_1	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{525}{2}$
		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	975

Hacemos ahora las transformaciones correspondientes a la parte paramétrica:

Tabla	IV						
			0	1	0	0	
			2	1	0	0	
1	1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	450
0	2	x_1	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{525}{2}$
			0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	975
			0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	450

Imponemos las condiciones de factibilidad:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t \geq 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow t \geq -\frac{1}{2} \\ \Longrightarrow t \leq \frac{1}{2} \end{array}$$

Por lo tanto la solución anterior permanece óptima para $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Ahora damos a t los valores finitos extremos obtenidos anteriormente, hasta que no hallemos más soluciones.

Si $t = -\frac{1}{2}$ la tabla óptima sería:

Tabla	V		2	1	0	0	
1	1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	450
0	2	x_1	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{525}{2}$
			0	0	0	$\frac{1}{2}$	975

Podemos encontrar otra solución introduciendo en la base h_1. El pivote está en $\frac{1}{2}$, así que sale x_2 de la base.

Realizando las transformaciones, calculamos ahora el rango de t en que esta nueva solución sea válida:

Tabla	VI						
			0	1	0	0	
			2	1	0	0	
0	0	h_1	0	2	1	-1	900
0	2	x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	375
			0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	750
			0	-1	0	0	0

Imponemos las condiciones de factibilidad:

$$-\tfrac{1}{2} - t \geq 0 \qquad \Longrightarrow t \leq -\tfrac{1}{2}\ .$$

Por lo tanto la solución anterior vale para $t \leq -\frac{1}{2}$.

Si $t = \frac{1}{2}$ la tabla óptima sería:

Tabla	VII						
			2	1	0	0	
1	1	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	450
0	2	x_1	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$*	$\frac{525}{2}$
			0	0	$\frac{1}{2}$	0	975

Podemos encontrar otra solución introduciendo en la base h_2. El pivote está en $\frac{3}{8}$, así que sale x_1 de la base.

Realizando las transformaciones, calculamos ahora el rango de t en que esta nueva solución es óptima:

Tabla	VIII						
			0	1	0	0	
			2	1	0	0	
1	1	x_2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	800
0	0	h_2	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	700
			$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	800
			$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	800

Imponemos las condiciones de factibilidad:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}t \geq 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \Longrightarrow t \geq \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow t \geq -1 \end{array}$$

Por lo tanto la solución anterior vale para $t \geq \frac{1}{2}$.

En resumen, las soluciones óptimas del programa paramétrico son:

$$\begin{cases} \text{Si } t \leq -\frac{1}{2} & \Longrightarrow x_1 = 375,\ x_2 = 0;\ h_1 = 900,\ h_2 = 0, & z = 750 \\ \text{Si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} & \Longrightarrow x_1 = \frac{525}{2},\ x_2 = 450;\ h_1 = 0,\ h_2 = 0, & z = 975 + 450t \\ \text{Si } t \geq \frac{1}{2} & \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 800;\ h_1 = 0,\ h_2 = 700, & z = 800 + 800t \end{cases}$$

Ejercicio 52 *Resolver el siguiente problema para todos los valores del parámetro t:*

$$\begin{array}{ll} \max & z = 60x_1 + 30(1-t)x_2 \\ sa: & 2x_1 + 1.5x_2 \leq 1200 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 1500 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Hallamos la tabla óptima para $t = 0$:

Tabla	I	60	30	0	0	
0	h_1	2	1.5	1	0	1200
0	h_2	$\boxed{4}$	1	0	1	1500
		-60	-30	0	0	0

Tabla	II	60	30	0	0	
0	h_1	0	$\boxed{1}$	1	$-\frac{1}{2}$	450
60	x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	375
		0	-15	0	15	22500

Tabla	III	60	30	0	0	
30	x_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	450
60	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{525}{2}$
		0	0	15	$\frac{15}{2}$	29250

Hacemos ahora las transformaciones correspondientes a la parte paramétrica:

Tabla	IV		0	-30	0	0	
			60	30	0	0	
-30	30	x_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	450
0	60	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{525}{2}$
			0	0	15	$\frac{15}{2}$	29250
			0	0	-30	15	-13500

Imponemos las condiciones de factibilidad:

$$\left.\begin{array}{r} 15 - 30t \geq 0 \\ \frac{15}{2} + 15t \geq 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow t \leq \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow t \geq -\frac{1}{2} \end{array}$$

Por lo tanto la solución anterior vale para $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Ahora damos a t los valores finitos extremos obtenidos anteriormente, hasta que no hallemos más soluciones.

Si $t = -\frac{1}{2}$ la tabla óptima sería:

Tabla	V	60	30	0	0	
30	x_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	450
60	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}^*$	$\frac{525}{2}$
		0	0	45	0	29250

Podemos encontrar otra solución introduciendo en la base h_2. El pivote está en $\frac{3}{8}$, así que sale x_1 de la base.

Realizando las transformaciones, calculamos ahora el rango de t en que esta nueva solución sea óptima.

Tabla	VI		0	-30	0	0	
			60	30	0	0	
-30	30	x_2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	800
0	0	h_2	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	700
			-20	0	20	0	24000
			-40	0	-20	0	-24000

Imponemos las condiciones de factibilidad:

$$\left.\begin{array}{r} -20-40t \geq 0 \\ 20-20t \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} t \leq -\frac{1}{2} \\ t \leq 1 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto la solución anterior vale para $t \leq -\frac{1}{2}$.

Si $t = \frac{1}{2}$ la tabla óptima sería:

Tabla	VII	60	30	0	0	
30	x_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	450
60	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{525}{2}$
		0	0	0	30	29250

Podemos encontrar otra solución introduciendo en la base h_1. Como el pivote está en 1, sale x_2 de la base.

Realizando las transformaciones, calculamos ahora el rango de t en que una nueva solución es válida.

Tabla	VIII		0	−30	0	0	
			60	30	0	0	
0	0	h_1	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	450
0	60	x_1	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	375
			0	−15	0	15	22500
			0	30	0	0	0

Imponemos las condiciones de factibilidad:

$$-15 + 30t \geq 0 \qquad \Longrightarrow t \geq \tfrac{1}{2}\,.$$

Por lo tanto la solución anterior vale para $t \geq \frac{1}{2}$.

En resumen, las soluciones del programa lineal paramétrico son:

$$\begin{cases} \text{Si } t \leq -\frac{1}{2} & \Longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 800;\ h_1 = 0,\ h_2 = 700,\ z = 24000 - 24000t \\ \text{Si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} & \Longrightarrow x_1 = \frac{525}{2},\ x_2 = 450;\ h_1 = 0,\ h_2 = 0,\ z = 29250 - 13500t \\ \text{Si } t \geq \frac{1}{2} & \Longrightarrow x_1 = 375,\ x_2 = 0;\ h_1 = 900,\ h_2 = 0,\ z = 22500. \end{cases}$$

Ejercicio 53 *Una empresa fabrica bolsas para bastones de golf hechas con piel. Cada bolsa necesita:*

1. *Cortar y teñir el material.*
2. *Coser.*
3. *Terminar (Insertar portasombrillas, separadores de palos...).*
4. *Inspeccionar y embalar.*

   Se pretende fabricar dos tipos de bolsas de calidades normal y de lujo. En la tabla siguiente se indican los recursos disponibles en total, los recursos consumidos y la ganancia esperada por unidad producida.

	Tiempo de producción (en horas)				
Bolsa	*Corte-Teñido*	*Costura*	*Acabado*	*Inspec.-Embal.*	*Benef.*
Normal	*7/10*	*1/2*	*1*	*1/10*	*10*
Lujo	*1*	*5/6*	*2/3*	*1/4*	*9*
Tiempo	*630*	*600*	*708*	*135*	

a) *Calcular cuántas bolsas conviene fabricar de cada clase para que la ganancia sea máxima.*

b) *¿En qué fase de la producción merece más la pena aumentar el tiempo disponible?*

c) *Calcular los intervalos de optimalidad para los costes.*

d) *¿Cuál sería la solución óptima si el beneficio de la bolsa normal fuera 7? ¿Y si fuera 14?¿ Cuánto puede bajar el beneficio de estas bolsas hasta que sea rentable cambiar el plan de producción?*

e) *Calcular los intervalos de factibilidad para los recursos.*

f) *¿Cuánto aumentaría el beneficio si se tuvieran 30 horas adicionales en el departamento de corte y teñido?¿Y si, por el contrario un empleado enfermara y se perdieran 60 horas de trabajo en este departamento?*

g) *¿Cuánto disminuiría el beneficio si se perdieran 40 horas en el departamento de costura?*

h) *Contando con una maquinaria nueva, el tiempo que se requiere para realizar el trabajo de corte y teñido (0.7 horas) de la bolsa de tipo normal disminuye. ¿Qué efecto tiene esta variación en la función objetivo?*

i) *Los administradores consideran que adquiriendo una máquina de coser nueva puede reducirse el tiempo de costura para las bolsas de calidad normal de 1/2 a 1/3. ¿Merece la pena adquirir esta máquina?*

a) Para obtener la solución óptima del problema, que consigue maximizar la ganancia, tendremos que escribir el modelo del problema y aplicar el algoritmo del simplex. Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{s.a.: } & \tfrac{7}{10}x_1 + x_2 \leq 630 \\ & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{5}{6}x_2 \leq 600 \\ & x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 \leq 708 \\ & \tfrac{1}{10}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 \leq 135 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

		10	9	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	X_B
0	h_1	$\frac{7}{10}$	1	1	0	0	0	630
0	h_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	1	0	0	600
0	h_3	$\boxed{1}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
0	h_4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	135
$Z_j - C_j$		-10	-9	0	0	0	0	$Z_0 = 0$

Tabla	I	10	9	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	X_B
0	h_1	0	$\boxed{8/15}$	1	0	$-7/10$	0	$672/5$
0	h_2	0	$1/2$	0	1	$-1/2$	0	246
10	x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
0	h_4	0	$11/60$	0	0	$-1/10$	1	$321/5$
$Z_j - C_j$		0	$-7/3$	0	0	10	0	7080

Tabla	II	10	9	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	X_B
0	x_2	0	1	$15/8$	0	$-21/16$	0	252
0	h_2	0	0	$-15/16$	1	$5/32$	0	120
10	x_1	1	0	$-5/4$	0	$15/8$	0	540
0	h_4	0	0	$-11/32$	0	$9/64$	1	18
$Z_j - C_j$		0	0	$35/8$	0	$111/16$	0	7668

Conviene fabricar 540 bolsas normales y 252 bolsas de lujo.

b) Para determinar en qué fase conviene aumentar el tiempo disponible, debemos estudiar la solución óptima del programa dual.

A la vista de la tabla óptima observamos que el mayor precio sombra es $111/16$, que corresponde a la variable de holgura h_3, por lo tanto interesa incrementar el tiempo de terminado.

c) Vamos a determinar los intervalos de optimalidad para los dos costes.

Intervalo de optimalidad para $\mathbf{c}_1$:

Tabla	IV	$10+\Delta c_1$	9	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	X_B
9	x_2	0	1	$15/8$	0	$-21/16$	0	252
0	h_2	0	0	$-15/16$	1	$5/32$	0	120
10	x_1	1	0	$-5/4$	0	$15/8$	0	540
0	h_4	0	0	$-11/32$	0	$9/64$	1	18
$Z_j - C_j$		0	0	$35/8$	0	$111/16$	0	7668

$$c'_B B^{-1} N - c'_N =$$

$$=\begin{pmatrix} 9, & 0, & 10+\Delta c_1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15/8 & 0 & -21/16 & 0 \\ -15/16 & 1 & 5/32 & 0 \\ -5/4 & 0 & 15/8 & 0 \\ -11/32 & 0 & 9/64 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{35}{8} - \frac{5}{4}\Delta c_1, & 0, & \frac{111}{16} + \frac{15}{8}\Delta c_1, & 0 \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\ 4.375-1.25\triangle c_1,\quad 0,\quad 6.9375+1.875\triangle c_1,\quad 0\ \right)\geq 0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{lll} 4.375-1.25\triangle c_1\geq 0 & \frac{4.375}{1.25}\geq\triangle c_1 & 3.5\geq\triangle c_1 \\ 6.9375+1.875\triangle c_1\geq 0 & \triangle c_1\geq\frac{-6.9375}{1.875}=-3.7 & \end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -3.7\leq\triangle c_1\leq 3.5.$$

Y por tanto el intervalo de optimalidad para el primer coeficiente de coste es:

$$6.3\leq 10+\triangle c_1\leq 13.5.$$

Intervalo de optimalidad para $\mathbf{c_2}$:

Tabla Max	V	10 x_1	$9+\triangle c_2$ x_2	0 h_1	0 h_2	0 h_3	0 h_4	X_B
9	x_2	0	1	15/8	0	−21/16	0	252
0	h_2	0	0	−15/16	1	5/32	0	120
10	x_1	1	0	−5/4	0	15/8	0	540
0	h_4	0	0	−11/32	0	9/64	1	18
Z_j-C_j		0	0	35/8	0	111/16	0	7668

$c'_B B^{-1}N-c'_N=$

$$=\left(\ 9+\triangle c_2,\quad 0,\quad 10,\quad 0\ \right)\begin{pmatrix} 15/8 & 0 & -21/16 & 0 \\ -15/16 & 1 & 5/32 & 0 \\ -5/4 & 0 & 15/8 & 0 \\ -11/32 & 0 & 9/64 & 1 \end{pmatrix}-\left(\ 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0\ \right)=$$

$$=\left(\ 4.375+1.875\triangle c_2,\quad 0,\quad 6.9375-1.3125\triangle c_2,\quad 0\ \right)\geq 0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\triangle c_2\geq\frac{-4.375}{1.875}=-2.3333,\quad \triangle c_2\leq\frac{6.9375}{1.3125}=5.2857\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -2.3333\leq\triangle c_2\leq 5.2857\Longrightarrow$$

Y por tanto el intervalo de optimalidad para el segundo coeficiente de coste es:

$$6.6667\leq 9+\triangle c_2\leq 14.286.$$

d) Vamos a calcular la solución óptima si se modifica el beneficio por cada tipo de bolso.

Si el beneficio para las bolsas normales fuera $c_1=7$ conservamos la solución óptima ya que

$$6.3\leq 10+\triangle c_1\leq 13.5.$$

Cambiaría el beneficio máximo que pasaría a ser:

$$z = 7 \times 540 + 9 \times 252 = 6048.$$

El valor mínimo de c_1 que no cambia la solución óptima es $c_1 = 6.3$.

Aunque el beneficio en este caso pasaría a ser:

$$z = 6.3 \times 540 + 9 \times 252 = 5670.$$

En cambio el valor de $c_1 = 14$, estaríamos fuera de las condiciones de optimalidad. Sustituyendo $\triangle c_1 = 4$ obtenemos los costes reducidos de las variables no básicas:

$$\left(\tfrac{35}{8} - \tfrac{5}{4} \times 4, \quad 0, \quad \tfrac{111}{16} + \tfrac{15}{8} \triangle c_1 \times 4, \quad 0 \right) = \left(-\tfrac{5}{8}, \quad 0, \quad \tfrac{231}{16}, \quad 0 \right)$$

La tabla ahora resulta:

Tabla	VI	14	9	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	X_B
9	x_2	0	1	$\boxed{15/8}$	0	−21/16	0	252
0	h_2	0	0	−15/16	1	5/32	0	120
10	x_1	1	0	−5/4	0	15/8	0	540
0	h_4	0	0	−11/32	0	9/64	1	18
$Z_j - C_j$		0	0	−5/8	0	231/16	0	7668

Pivoteando sobre el elemento de $y_{13} = 15/8$, obtenemos la solución

$$x_1 = 708, \; x_2 = 0, \; z = 9912.$$

En este caso interesaría fabricar 708 normales y ninguna de lujo.

Tabla	VII	10	9	0	0	0	0	
Max		x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	X_B
0	h_1	0	$\boxed{8/15}$	1	0	−7/10	0	672/5
0	h_2	0	1/2	0	1	−1/2	0	246
10	x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
0	h_4	0	11/60	0	0	−1/10	1	321/5
$Z_j - C_j$		0	1/3	0	0	14	0	9912

e) Vamos a calcular los intervalos de factibilidad de los recursos.

Intervalo de optimalidad para b_1 :

$X_B^0 = B^{-1} \cdot b =$

$$= \begin{pmatrix} 15/8 & 0 & -21/16 & 0 \\ -15/16 & 1 & 5/32 & 0 \\ -5/4 & 0 & 15/8 & 0 \\ -11/32 & 0 & 9/64 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 630 + \triangle b_1 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 + \frac{15}{8}\triangle b_1 \\ 120 - \frac{15}{16}\triangle b_1 \\ 540 - \frac{5}{4}\triangle b_1 \\ 18 - \frac{11}{32}\triangle b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 252 + \frac{15}{8}\triangle b_1 \Longrightarrow \triangle b_1 \geq \frac{-252}{\frac{15}{8}} = -\frac{672}{5} = -134.4 \\ 120 - \frac{15}{16}\triangle b_1 \Longrightarrow \triangle b_1 \leq \frac{120}{\frac{15}{16}} = 128 \\ 540 - \frac{5}{4}\triangle b_1 \Longrightarrow \triangle b_1 \leq \frac{540}{\frac{5}{4}} = 432 \\ 18 - \frac{11}{32}\triangle b_1 \Longrightarrow \triangle b_1 \leq \frac{18}{\frac{11}{32}} = \frac{576}{11} = 52.364 \end{cases}$$

$-134.4 \leq \triangle b_1 \leq 52.36373, \quad 495.6 \leq 630 + \triangle b_1 \leq 682.36.$

Análogamente, los intervalos de optimalidad para b_2, b_3 y b_4 son:

$$\begin{array}{c} -120 \leq \triangle b_2 \leq \infty \\ -128 \leq \triangle b_3 \leq 92 \\ -18 \leq \triangle b_4 \leq \infty \end{array}$$

f) Si se tuvieran 30 horas más para corte y teñido, tendríamos que $\triangle b_1 = 30$ está dentro del intervalo de optimilidad para b_1.

Por tanto la ganancia es del precio sombra de la variable $h_1$por cada unidad que aumente el recurso correspondiente es decir $30 \times 35/8 = 131.25$.

En este caso el beneficio pasa a ser $z = 7668 + 131.25 = 7799.3$.

En el segundo caso el valor también entra en el intervalo de optimalidad. La pérdida resultaría en este caso $60 \times 35/8 = 262.5$ horas, así que el beneficio se reduciría a $7668 - 262.5 = 7405.5$.

g) Cuando se pierden 40 horas del departamento de costura:

El valor 40 entra dentro del intervalo de factibilidad de b_2. Como el precio sombra de este recurso es 0 (coste reducido de h_1) el beneficio no cambia.

Otra forma de verlo es observando que el valor de la variable de holgura de la segunda restricción (costura) es 120. Por lo tanto nos han sobrado 120 horas en el departamento de costura y no pasa nada si disminuimos 40 salvo que ahora nos sobraran sólo 80 horas.

h) Cuando se compra la nueva máquina, este cambio aumenta la región factible.

Como la restricción está saturada, un cambio en ella no permitirá que la solución anterior cumpla la igualdad.

Por lo tanto la solución ha de cambiar y el valor del objetivo será mejor que el primitivo.

i) Al comprar la máquina nueva se reduce el tiempo de costura, tendremos que como la holgura de la segunda restricción era de 120, ya sobraban horas de costura. La solución no cambia. Por lo tanto no merece la pena invertir en esa máquina.

4.2 Ejercicios Propuestos

1. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 4x_1 + 5x_2 \\ & s.a: & 9x_1 + 3x_2 \leq \frac{63}{2} \\ & & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & & 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Obtener la solución óptima del problema.

   (b) Obtener la nueva solución si la función objetivo cambia a $z = x_1 + 4x_2$ y el vector recursos a $b^t = (40, 20, 10)$.

2. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 2x_1 + x_2 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   (a) Obtener la solución óptima del problema.

   (b) Efectuar el análisis de sensibilidad para $b_2 = 6.$ y $b_3 = 3$.

3. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0; \ \ x_3 \ irrestring. \end{array}$$

   Obtener la solución del problema y efectuar el análisis de sensibilidad para los coeficientes de coste.

4. Obtener la solución del problema lineal paramétrico:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 4(1+\lambda)x_1 + 2x_2 \\ & s.a: & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & & x_1 \leq 6 \\ & & x_2 \leq 8 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

5. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 + 5x_2 \\ & s.a: & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & & 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & & x_2 \leq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Se pide:

(a) Resolver el programa.

(b) A partir de la solución del apartado a), obtener la solución del programa si la función objetivo pasa a ser $z = 4x_1 + 2x_2$.

(c) A partir de la solución del apartado a), obtener la solución del programa si la matriz de términos independientes cambia a $b^t = (8, 10, 10)$.

6. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & & 2x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ & & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Obtener la solución óptima del problema.

(b) Obtener la nueva solución si la matriz de términos independientes cambia a $b^t = (3, 5, 3)$.

(c) A partir de la solución del apartado b), obtener la nueva solución si se añade la restricción $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$.

7. Resolver los siguientes programas lineales y efectuar el análisis de sensibilidad para los coeficientes de coste y para los términos independientes:

$$\begin{array}{llll} a) & max & z = & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & & s.a: & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & & & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} b) & \min & z = & 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\ & & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} c) & max & z = & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ & & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \ irrestring. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} d) & \min & z = & 2x_1 + x_2 \\ & & s.a: & 3x_1 + x_2 = 6 \\ & & & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & & & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

8. Una empresa dedicada a la fabricación de muebles quiere determinar qué número de mesas, sillas, escritorios y estanterías debe fabricar. Estos productos usan madera y plástico para su elaboración. La empresa dispone de 1500 unidades de madera y 1000 unidades de plásticos, disponiendo a su vez de 800 horas de trabajo. Los requerimientos y beneficios de cada uno de estos productos vienen expresados en:

Producto	*Madera*	*Plasticos*	*Horas*	*Beneficios*
Mesas	5	2	3	12
Sillas	1	3	2	5
Escritorios	9	4	5	15
Estanterias	12	1	10	10

(a) Formular los modelos primal y dual, resolverlos y comparar las posibles resoluciones.

(b) Realizar un análisis de sensibilidad para cada uno de los coeficientes de la función objetivo del problema primal.

(c) Análisis de sensibilidad para cada uno de los coeficientes de los términos independientes de las restricciones.

(d) Análisis paramétrico sobre la función objetivo del primal a lo largo de la dirección (-1,2,1,1).

(e) Análisis paramétrico sobre los términos independientes de las restricciones a lo largo de la dirección (-100,50,50).

9. Resolver los siguientes problemas lineales paramétricos:

a) $$\begin{array}{lll} max & z = & (5-\lambda)x_1 + (2+\lambda)x_2 + (3+\lambda)x_3 \\ & s.a: & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30 \\ & & x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lll} max & z = & -3x_1 - 2x_2 \\ & s.a: & x_1 - 2x_2 \leq (6-2\lambda) \\ & & 2x_1 + x_2 \leq (4+\lambda) \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \qquad \lambda \geq 0 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lll} max & z = & 3\lambda x_1 + 2(1-\lambda)x_2 - x_3 \\ & s.a: & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ & & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \qquad \lambda \geq 0 \end{array}$$

10. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} \min & z = & 2x_1 + x_2 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & & 4x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Obtener la solución óptima del problema.

(b) Efectuar el análisis de sensibilidad para los términos independientes.

11. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0; \quad x_3 \ irrestring. \end{array}$$

Obtener la solución del problema y efectuar el análisis de sensibilidad para los coeficientes de coste.

12. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 + 5x_2 \\ & s.a: & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & & 3x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ & & x_2 \leq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Se pide:

(a) Resolver el programa.

(b) A partir de la solución del apartado a), obtener la solución del programa si la función objetivo pasa a ser $z = -4x_1 + 7x_2$.

(c) A partir de la solución del apartado a), obtener la solución del programa si la matriz de términos independientes cambia a $b^t = (30, 25, 10)$.

13. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} \min & z = & -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & & 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ & & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 25 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Obtener la solución óptima del problema.

(b) Obtener la nueva solución si la matriz de términos independientes cambia a $b^t = (13, 15, 23)$.

(c) A partir de la solución del apartado b), obtener la nueva solución si se añade la restricción $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$.

14. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 2x_1 - 5x_2 - x_3 \\ & s.a: & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & & 2x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ & & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(a) Obtener la solución óptima del problema.

(b) Obtener la nueva solución si la matriz de términos independientes cambia a $b^t = (3, 5, 3)$.

(c) A partir de la solución del apartado b), obtener la nueva solución si se elimina la tercera restricción.

15. Dado el programa lineal:

$$\begin{array}{lll} max & z = & 4x_1 + 5x_2 \\ & s.a: & 9x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & & 3x_1 + 4x_2 \leq 22 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Obtener la solución óptima del problema.

(b) Obtener la nueva solución si la función objetivo cambia a $z = 3x_1 + 4x_2$ y el vector recursos a $b^t = (30, 20, 10)$.

16. Resolver los siguientes programas lineales y efectuar el análisis de sensibilidad para los coeficientes de coste y para los términos independientes:

a)
$$\begin{array}{lll} max & z = & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & s.a: & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lll} max & z = & 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \\ & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lll} \min & z = & -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ & s.a: & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{lll} max & z = & 2x_1 + x_2 \\ & s.a: & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

17. Resolver los siguientes problemas lineales paramétricos:

a)
$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{lll} \min & z = & -3x_1 - 2x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + x_2 \leq 4 + \lambda \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lll} max & z = & 3x_1 + 2x_2 \\ & s.a: & 2x_1 + \lambda x_2 \leq 4 \\ & & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

(a) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $z = \frac{61}{2}$.

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $z = 10$.

2. **Solución:**

(a) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $z = \frac{12}{5}$.

(b) $-\infty \leq b_2 \leq 6,\ \ 3 \leq b_3 \leq 6$.

3. **Solución:**

La solución del problema de optimización es

$$x_1 = 1.667\ ,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.333, \quad z = 14.333.$$

El análisis de la sensibilidad para los coeficientes de coste es

$$-5 \leq c_1 \leq 4,\ -\infty \leq c_2 \leq 3.333, \quad 4 \leq c_3 \leq 5.$$

4. **Solución:**

Si $\lambda \geq -1/4$ entonces la solución óptima es:

$$x_1 = \tfrac{10}{3},\ x_2 = 0,\ z = \tfrac{40}{3}(1+\lambda).$$

Si $\lambda < -1/4$ entonces la solución óptima es:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 5,\ z = 10.$$

5. **Solución:**

(a) $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 5$, $z = 30$.

(b) $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 20$.

(c) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $z = 25$.

6. **Solución:**

(a) $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 12$.

(b) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 3$.

(c) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 3$.

7. **Solución:**

(a) $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 6$. ó $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $z = 6$.
$-\infty \leq c_1 \leq 2$, $1 \leq c_3 \leq 2$, $4 \leq b_1 \leq 8$, $3 \leq b_2 \leq 6$.

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$, $z = 28$.
$4 \leq c_1 \leq +\infty$, $4 \leq c_2 \leq +\infty$, $0 \leq c_3 \leq 6$, $5 \leq b_1 \leq +\infty$, $-\infty \leq b_2 \leq 14$.

(c) $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{7}{3}$, $z = \frac{43}{3}$.
$-5 \leq c_1 \leq 4$, $-\infty \leq c_2 \leq \frac{10}{3}$, $3 \leq c_3 \leq +\infty$, $\frac{5}{7} \leq b_1 \leq +\infty$, $-4 \leq b_2 \leq 8$, $-\infty \leq b_3 \leq \frac{29}{3}$.

(d) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 4$.
$0 \leq c_1 \leq 3$, $\frac{2}{3} \leq c_2 \leq +\infty$, $\frac{9}{2} \leq b_1 \leq +\infty$, $-\infty \leq b_2 \leq 8$, $2 \leq b_3 \leq +\infty$.

8. **Solución:**

(a) La solución del programa primal es $(300, 0, 0, 0)$ con $z = 3600$. Y la solución del programa dual es $(1.2857, 0, 1.857)$ con $w = 3600$.

(b) En el análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo tenemos:

$$8.486 < c_1 < 25, \ \ 2.4 < c_2 < 8, \ \ -\infty < c_3 < 20.857, \ \ -\infty < c_4 < 34.$$

(c) En el análisis de sensibilidad para los coeficientes de los términos independientes de las restricciones tenemos:

$$940 < b_1 < 1500, \ \ 600 < b_2 < +\infty, \ 0 < b_3 < 1115.3846.$$

9. **Solución:**

(a) Si $\lambda \leq \frac{7}{3}$, $x_1 = 30, x_2 = 0, x_3 = 0, \ \ z = 150 - 30\lambda$.
Si $\lambda > \frac{7}{3}$, $x_1 = 0, \ x_2 = 0, x_3 = 15, \ \ z = 45 + 15\lambda$.

(b) Si $\lambda \leq 3$, $x_1 = 0, x_2 = 0, z = 0$.
Si $\lambda > 3$, $x_1 = 0, \ x_2 = \lambda - 3, z = -2(\lambda - 3)$.

(c) Si $0 \leq \lambda \leq \frac{4}{13}$, $x_1 = 0, \ x_2 = 2, \ x_3 = 0, z = 4 - 4\lambda$.
Si $\frac{4}{13} \leq \lambda \leq \frac{2}{3}$, $x_1 = \frac{15}{7}, x_2 = \frac{4}{7}, x_3 = 0, \ z = \frac{8}{7} + \frac{37}{7}\lambda$.
Si $\lambda > \frac{2}{3}$, $x_1 = \frac{7}{3}, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ z = 7\lambda$.

10. **Solución:**

(a) $x_1 = 0.8, x_2 = 0.6, z = 2.2$.

(b) $4 \leq b_2 \leq 7, \ 2 \leq b_3 \leq +\infty$.

11. **Solución:**

$x_1 = 0.2727$, $x_2 = 2.0909, x_3 = 1.6363, \quad z = 15.7272. \quad -\infty \leq c_1 \leq 4$, $3.33 \leq c_2 \leq 7$.

12. **Solución:**

(a) $x_1 = 5, x_2 = 5, z = 40$.

(b) $x_1 = 1.6667, x_2 = 5, z = 28.3333$.

(c) $x_1 = 20, x_2 = 10, z = 110$.

13. **Solución:**

(a) $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{5}{2}, z = \frac{45}{2}$.

(b) $x_1 = 5, x_2 = 0, z = 20$.

(c) $x_1 = 0, x_2 = 5, z = 25$.

14. **Solución:**

(a) $x_1 = 1.4$, $x_2 = 0, x_3 = 0.2, z = 2.6$.

(b) No hay solución factible.

(c) $x_1 = 1.5, x_2 = 0, x_3 = 1, z = 2$.

15. **Solución:**

(a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $z = 28$.

(b) $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = 0$, $z = 10$.

16. **Solución:**

(a) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $z = 12$.
$-\infty \leq c_1 \leq 3$, $-\infty \leq c_2 \leq 3$, $2 \leq c_3 \leq +\infty$, $4 \leq b_1 \leq +\infty$, $0 \leq b_2 \leq 6$.

(b) $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = 7$.
$0 \leq c_1 \leq 2$, $1 \leq c_2 \leq +\infty$, $1 \leq c_3 \leq +\infty$, $5 \leq b_1 \leq +\infty$, $-\infty \leq b_2 \leq 14$.

(c) $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $z = -12$.
$-\infty \leq c_1 \leq -2$, $-3 \leq c_2 \leq +\infty$, $-3 \leq c_3 \leq +\infty$, $0.66 \leq b_1 \leq +\infty$, $-\infty \leq b_2 \leq 8$, $-\infty \leq b_3 \leq 12$.

(d) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $z = \frac{12}{5}$.
$-\infty \leq c_1 \leq 3$, $\frac{2}{3} \leq c_2 \leq +\infty$, $3 \leq b_1 \leq \frac{9}{2}$,$4 \leq b_2 \leq 6$, $3 \leq b_3 \leq +\infty$.

17. **Solución:**

(a) Si $\lambda \in I\!R$ entonces los resultados aparecen en la siguiente tabla:

Recorrido de λ	Solución óptima	Valor óptimo
$-\infty < \lambda \leq -\frac{1}{2}$	$(2, 0, 0, 4)$	$z = 6$
$-\frac{1}{2} < \lambda \leq 4$	$(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0, 0)$	$z = \frac{22}{3} + \frac{8}{3}\lambda$
$4 < \lambda < +\infty$	$(0, 3, 1, 0)$	$z = \frac{8}{3}\lambda$

(b) Si $\lambda \in I\!R$ entonces los resultados aparecen en la siguiente tabla:

Recorrido de λ	Solución óptima	Valor óptimo
$-\infty < \lambda \leq -4$	Infactible	–
$-4 < \lambda \leq -1$	$(0, 4 + \lambda, 0, -2 - 2\lambda)$	$z = 8 + 2\lambda$
$-1 < \lambda \leq 8$	$(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\lambda, \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\lambda, 0, 0)$	$z = \frac{22}{3} + \frac{4}{3}\lambda$
$8 < \lambda < +\infty$	$(6, 0, -8 + \lambda, 0)$	$z = 18$

(c) Si $\lambda \in I\!R$ entonces los resultados aparecen en la siguiente tabla:

Recorrido de λ	Solución óptima	Valor óptimo
$-\infty < \lambda \leq 0$	No acotado	–
$0 < \lambda \leq \frac{4}{3}$	$(0, \frac{4}{\lambda}, 0, 6 + \frac{8}{\lambda})$	$z = \frac{8}{\lambda}$
$\frac{4}{3} < \lambda < +\infty$	$(2, 0, 0, 4)$	$z = 6$

Ejercicios tema 5

El Problema de transporte

5.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 54 *Tres refinerías con una capacidad diaria de 6, 5 y 8 millones de litros de gasolina han de abastecer a tres distribuidoras con una demanda diaria de 4, 8 y 7 millones de litros. La gasolina es trasportada en camiones, y el precio del transporte depende de la distancia recorrida. El coste de transportar cada 100 litros de gasolina un kilómetro es de 1 peseta. La tabla siguiente muestra las distancias en kilómetros entre las refinerías y las distribuidoras. No hay comunicación entre la refinería A y la distribuidora 3.*

		Distribuidoras		
		1	*2*	*3*
Refinerías	*A*	*600*	*900*	-
	B	*1500*	*500*	*400*
	C	*1000*	*1250*	*600*

a) Organizar el transporte de gasolina para que el coste sea mínimo.

b) ¿A cuánto asciende el coste del transporte diario?

En cada casilla está indicada, tras un cambio de escala, la cantidad que cuesta desplazar cada litro por este camino.

	1	2	3	
A	6	9	M	6
B	15	5	4	5
C	10	12.5	6	8
	4	8	7	

Usando el método de la esquina noroeste se obtiene la solución inicial siguiente con los costes reducidos que se indican en negrilla.

	1	2	3	u_i
A	6 **0** / 4	9 **0** / 2	M **2.5-M**	0
B	15 **-13**	5 **0** / 5	4 **-5.5**	-4
C	10 **-0.5**	12.5 **0** / 1	6 **0** / 7	3.5
v_j	6	9	2.5	

Es la solución óptima ya que los costes reducidos son todos no positivos.

Se enviarían 4 millones de litros de A a 1 con un coste de 24 millones, 2 millones de litros de A a 2 con un coste de 18 millones, 5 millones de litros de B a 2 con un coste de 25 millones, 1 millón de litros de C a 2 con un coste de 12.5 millones y 7 millones de litros de C a 3 con un coste de 42 millones. El precio total del transporte asciende por lo tanto a: $24 + 18 + 25 + 12.5 + 42 = 121.5$ millones de pesetas.

Ejercicio 55 *Una empresa produce monitores para ordenadores en tres plantas. La primera produce 50 monitores por mes, la segunda 100 y la tercera 50 como máximo. El beneficio por cada monitor depende de la planta en que ha sido producida y del comprador de acuerdo con la tabla siguiente:*

	Comprador 1	*Comprador 2*	*Comprador 3*
Planta 1	*75*	*60*	*69*
Planta 2	*79*	*73*	*68*
Planta 3	*85*	*76*	*70*

El primer comprador demanda 80 monitores por mes, el segundo por 90 y el tercero 100.

1. *Hallar la tabla inicial del problema de transporte que maximice los beneficios.*
2. *Buscar una solución inicial por el método de Vogel.*
3. *Encontrar el plan de producción y transporte que reporte mayor beneficio a la empresa.*

1. El problema no es balanceado por lo que añadimos una planta ficticia con una oferta de 70. Para transformar el problema que es de minimización en uno de maximización restamos todos los valores de 85 que es el mayor de ellos. De esta forma nos queda la tabla:

	C1	C2	C3	Ofertas
P1	10	25	16	50
P2	6	12	17	100
P3	0	9	15	50
PF	0	0	0	70
Demandas	80	90	100	

2. Para aplicar el procedimiento de Vogel calculamos las penalizaciones por fila y columna y se selecciona la primera celda para la solución inicial

	C1	C2	C3	Pen. fi.	Ofertas
P1	10	25	16	6	50
P2	6	12	17	6	100
P3	0	9	15	9	50
PF	0	0	0 $\boxed{70}$	0	$\boxed{70}$ 0
Pen. col.	6	9	15		
Demandas	80	90	$\boxed{100}$ 30		

tras eliminar la fila saturada y hacer las correcciones se calculan de nuevo las penalizaciones.

	C1	C2	C3	Pen. fi.	Ofertas
P1	10	25	16	6	50
P2	6	12	17	6	100
P3	0	9	15	9	50
Pen. col.	6	3	1		
Demandas	80	90	30		

Las tablas sucesivas del método de Vogel son:

	C1	C2	C3	Pen. fi.	Ofertas
P1	10	25	16	6	50
P2	6	12	17	6	100
P3	0 $\boxed{50}$	9	15	9	$\boxed{50}$ 0
Pen. col.	6	3	1		
Demandas	$\boxed{80}$ 30	90	30		

	C1	C2	C3	Pen. fi.	Ofertas
P1	10	25	16	6	50
P2	6	12 $\boxed{90}$	17	6	$\boxed{100}$ 10
Pen. col.	4	13	1		
Demandas	30	$\boxed{90}$ 0	30		

	C1	C3	Pen. fi.	Ofertas
P1	10	16	6	50
P2	6 $\boxed{10}$	17	11	$\boxed{10}$ 0
Pen. col.	4	1		
Demandas	$\boxed{30}$ 20	30		

	C1	C3	Pen. fi.	Ofertas
P1	10 $\boxed{20}$	16 $\boxed{30}$		$\boxed{50}$ 0
Pen. col.				
Demandas	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{30}$ 0		

La solución de Vogel es:

	C1	C2	C3
P1	10 $\boxed{20}$	25	16 $\boxed{30}$
P2	6 $\boxed{10}$	12 $\boxed{90}$	17
P3	0 $\boxed{50}$	9	15
PF	0	0	0 $\boxed{70}$

3. La solución anterior no es degenerada. Usando el algoritmo de transporte obtenemos la solución señalada.

	C1	C2	C3	ui
P1	10 $\boxed{20}$	25, cr=-9	16 $\boxed{30}$	0
P2	6 $\boxed{10}$	12 $\boxed{90}$	17, cr=-5	-4
P3	0 $\boxed{50}$	9, cr=-3	15, cr=-9	-10
PF	0, cr=-6	0, cr=0	0 $\boxed{70}$ cr=0	-16
vj	10	16	16	

Esta es una solución óptima porque los costes reducidos son no positivos. Por tanto desde la planta 1 se deben enviar 20 monitores al primer comprador y 30 al tercero. Desde la planta 2 se enviarán 10 al primero y 90 al segundo. Desde la tercera planta se enviarán 50 monitores al primer comprador. El comprador tercero recibe 70 ordenadores menos de los que ha solicitado.

El valor del beneficio es

$$20 \times 75 + 30 \times 69 + 10 \times 79 + 90 \times 73 + 50 \times 85 = 15\,180 \text{ u.m.}$$

Ejercicio 56 *Una empresa produce vasos de cristal, envasados en cajas, en 3 plantas diferentes. Las cajas con los vasos son almacenadas en uno de los dos almacenes de la empresa, desde los cuales se distribuye a tres clientes. Se desea minimizar el coste total de producción y transporte. Los datos necesarios se indican a continuación:*

Producción de cada planta		
Planta 1	Planta 2	Planta 3
300	200	300

	Demanda de los clientes		
	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Toneladas	200	300	150

Suma de los costes de producción en cada planta y del transporte entre esta planta y cada almacen		
	almacen 1	almacen 2
Planta 1	8	10
Planta 2	7	5
Planta 3	8	6

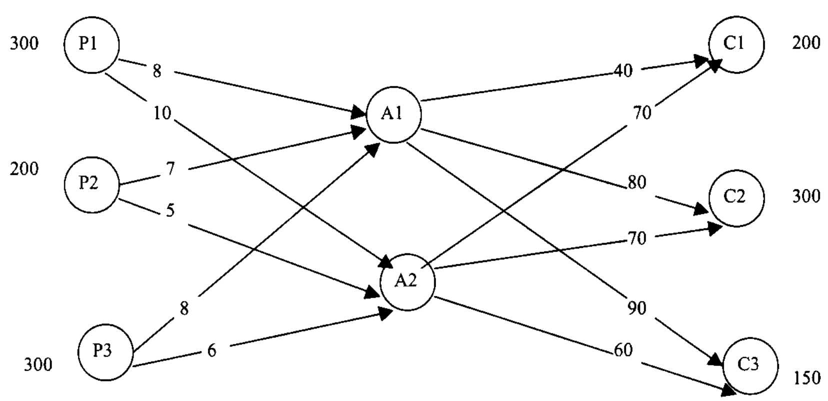
Coste de transporte almacen a cliente			
	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
almacen 1	40	80	90
almacen 2	70	70	60

a) Representa en una red este problema.

b) Escribe la tabla inicial necesaria para usar el algoritmo de transporte.

c) Halla una solución inicial para este problema.

a)



b) Planteándolo como un problema de transbordo, se obtiene la siguiente tabla:

	C1	C2	C3	A1	A2	Art.	Ofertas
P1	∞	∞	∞	8	10	0	300
P2	∞	∞	∞	7	5	0	200
P3	∞	∞	∞	8	6	0	300
A1	40	80	90	0	∞	0	800
A2	70	70	60	∞	0	0	800
demandas	200	300	150	800	800	150	

c) Usando el método de la esquina Noroeste se obtiene la siguiente solución inicial:

	C1	C2	C3	A1	A2	Art.	Ofertas
P1	200	100					300
P2		200					200
P3			150	150			300
A1				650	150		800
A2					650	150	800
demandas	200	300	150	800	800	150	

La solución del problema es

	C1	C2	C3	A1	A2	Art.	Ofertas
P1				150		150	300
P2				50	150		200
P3					300		300
A1	200			$\boxed{600}$			800
A2		300	150		$\boxed{350}$		800
demandas	200	300	150	800	800	150.	

que se interpreta sin tener en cuenta las casillas con solución recuadrada.

El transporte ha de realizarse de la siguiente forma:

Planta a almacén:

De la planta 1 al almacén 1 se transportan 150 cajas. De la planta 2 al almacén 1 se transportan 50 cajas y al almacén 2 se transportan 150 cajas. De la planta 3 se transportan 300 cajas al almacén 2.

El coste de esta fase es :

$$150 \times 8 + 50 \times 7 + 150 \times 5 + 300 \times 6 = 4100 \text{ u.m.}$$

Almacén a Cliente:

Del almacén 1 al cliente 1 se envían 200 cajas.

Del almacén 2 al cliente 2 se envían 300 cajas y al cliente 3 otras 150 cajas.

El coste de esta fase es:

$$200 \times 40 + 300 \times 70 + 150 \times 60 = 38000 \text{ u.m.}$$

El coste total es:

$$38000 + 4100 = 42100 \text{ u.m.}$$

Ejercicio 57 *La siguiente tabla resume los tiempos en segundos que 4 nadadores de un equipo tardan en recorrer nadando en los diferentes estilos 100 metros. Una prueba consiste en que cada nadador ha de nadar en un estilo los 100 metros, y gana el equipo que emplee en total menos tiempo. Aplica el Algoritmo Húngaro para decidir a qué nadadores debe encargarse el recorrido en cada uno de los estilos.*

	Libre	Croll	Mariposa	Espalda
nadador 1	54	54	51	53
nadador 2	51	57	52	52
nadador 3	50	53	54	56
nadador 4	56	54	55	53

Se muestran a continuación los sucesivos pasos de aplicación del algoritmo Húngaro

54	54	51	53
51	57	52	52
50	53	54	56
56	54	55	53

3	3	0	2
0	6	1	1
0	3	4	6
3	1	2	0

3	2	0	2
0	5	1	1
0	2	4	6
3	0	2	0

3x	2x	0x	2x
0x	5	1	1
0x	2	4	6
3x	0x	2x	0x

La solución ocupa las casillas señaladas en la siguiente matriz.

4	2	$\boxed{0c}$	2
0x	4	0x	$\boxed{0d}$
$\boxed{0a}$	1	3	5
4	$\boxed{0b}$	2	0x

Por tanto, el nadador 1 ha de nadar en estilo mariposa, el nadador 2 en estilo espalda, el nadador 3 en estilo libre y el 4 en estilo croll.

El tiempo total de la prueba es de 207 segundos.

Ejercicio 58 *Cinco empleados tienen que realizar 4 trabajos. El tiempo, en minutos, que cada persona tarda en realizar cada uno de ellos está resumido en la siguiente tabla:*

	trabajo A	trabajo B	trabajo C	trabajo D
Persona 1	22	18	30	18
Persona 2	18	—	27	22
Persona 3	26	20	28	28
Persona 4	16	22	—	14
Persona 5	21	—	25	28

Determinar qué persona debe hacer cada trabajo.

Nota: Los guiones significan que la persona correspondiente no puede hacer ese trabajo.

a) reduciendo por fila:

22	18	30	18	1000
18	1000	27	22	1000
26	20	28	28	1000
16	22	1000	14	1000
21	1000	25	28	1000

4	0	12	0	982
0	972	9	4	972
4	0	8	8	980
2	8	986	0	986
0	979	4	7	979

b) reduciendo por columna

4	0	8	0	10
0	972	5	4	0
4	0	4	8	8
2	8	982	0	14
0	979	0	7	7

Para tachar todos los ceros basta señalar las filas 1, 2, 5 y las columnas 2 y 4. No se pueden tachar todos los ceros con menos líneas.

4	$\bar{0}(2)$	8	0	10
$\bar{0}(4)$	972	5	4	
4	0	4	8	$\bar{0}(3)$
2	8	982	$\bar{0}(1)$	14
0	979	$\bar{0}(5)$	7	7

Los ceros marcados, que están numerados en el orden en que se han seleccionado, nos dan la solución:

La persona 1 hace el trabajo 2, la persona 2 hace el trabajo 1, la persona 3 no hace ningún trabajo, la persona 4 hace el trabajo 4 y la persona 5 hace el trabajo 3.

Nota: Aunque al trabajo artificial se ha dado en este caso un tiempo muy grande (1000) con la idea de que no se seleccione ese trabajo esto no es obligatorio actuar de esta forma. Igualmente podíamos haber optado por un tiempo 0 para todos los trabajadores usando el teorema 10 del tema de Transporte.

Ejercicio 59 *Resolver el siguiente problema de asignación. Los datos se consideran beneficios.*

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	8	3	6	7	2	8
R_2	–	5	4	7	5	3
R_3	–	–	7	6	8	5
R_4	4	8	3	8	15	7
R_5	–	4	–	7	8	6

Lo transformamos en un problema de minimización, rellenamos con un valor grande las casillas prohibidas y añadimos un origen artificial.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	−8	−3	−6	−7	−2	−8
R_2	100	−5	−4	−7	−5	−3
R_3	100	100	−7	−6	−8	−5
R_4	−4	−8	−3	−8	−15	−7
R_5	100	−4	100	−7	−8	−6
Art	0	0	0	0	0	0

Sumamos 15 donde sea necesario para que todos los costes sean positivos.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	7	12	9	8	13	7
R_2	115	10	11	8	10	12
R_3	115	115	8	9	7	10
R_4	11	7	12	7	0	8
R_5	115	11	115	8	7	9
	0	0	0	0	0	0

Restamos el mínimo de cada fila y después el mínimo de cada columna para obtener la matriz de costos reducidos.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	0	5	2	1	6	0
R_2	107	2	3	0	2	4
R_3	108	108	1	2	0	3
R_4	11	7	12	7	0	8
R_5	108	4	108	1	0	2
	0	0	0	0	0	0

Recuadramos ceros y tachamos ceros. Los números pequeños indican el orden en que se han ido tachando los ceros. Los ceros tachados están señalados con "X".

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{0}_3$	5	2	1	6	0X
R_2	107	2	3	$\boxed{0}_1$	2	4
R_3	108	108	1	2	$\boxed{0}_2$	3
R_4	11	7	12	7	0X	8
R_5	108	4	108	1	0X	2
Art	0X	$\boxed{0}_4$	0X	0X	0X	0X

Tachamos con el mínimo número de líneas todos los ceros:

Marcamos las filas sin ceros recuadrados.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{0}_3$	5	2	1	6	0X
R_2	107	2	3	$\boxed{0}_1$	2	4
R_3	108	108	1	2	$\boxed{0}_2$	3
R_4	11	7	12	7	0X	8⇐
R_5	108	4	108	1	0X	2⇐
Art	0X	$\boxed{0}_4$	0X	0X	0X	0X

Considerando estas dos filas marcadas, marcamos ahora las columnas que tengan ceros tachados

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{0}_3$	5	2	1	6	0X
R_2	107	2	3	$\boxed{0}_1$	2	4
R_3	108	108	1	2	$\boxed{0}_2$	3
R_4	11	7	12	7	0X	8⇐
R_5	108	4	108	1	0X	2⇐
Art	0X	$\boxed{0}_4$	0X	0X	0X ⇑	0X

Considerando esta ultima columna se marcan las filas con algún cero recuadrado (la tercera)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{0}_3$	5	2	1	6	0X
R_2	107	2	3	$\boxed{0}_1$	2	4
R_3	108	108	1	2	$\boxed{0}_2$	3⇐
R_4	11	7	12	7	0X	8⇐
R_5	108	4	108	1	0X	2⇐
Art	0X	$\boxed{0}_4$	0X	0X	0X ⇑	0X

Ya no se pueden marcar más líneas. Tachamos las filas no marcadas y las columnas marcadas. Las líneas tachadas las hemos representado con números más pequeños.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	0	5	2	1	6	0
R_2	107	2	3	0	2	4
R_3	108	108	1	2	0	3
R_4	11	7	12	7	0	8
R_5	108	4	108	1	0	2
	0	0	0	0	0	0

Se elige el menor valor de los elementos no marcados, que es 1, restando este valor a todos ellos. Los tachados una sola vez no cambian de valor, y a los elementos tachados dos veces se les suma 1.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	0	5	2	1	7	0
R_2	107	2	3	0	3	4
R_3	107	107	0	1	0	2
R_4	10	6	11	6	0	7
R_5	107	3	107	0	0	1
Art	0	0	0	0	1	0

Se repiten en esta matriz los pasos anteriores hasta que ya no se puedan marcar más filas o columnas :

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{0}_5$	5	2	1	7	0X
R_2	107	2	3	$\boxed{0}_1$	3	4$\Leftarrow$
R_3	107	107	$\boxed{0}_4$	1	0X	2
R_4	10	6	11	6	$\boxed{0}_2$	7$\Leftarrow$
R_5	107	3	107	0X	0X	1$\Leftarrow$
Art	0X	$\boxed{0}_3$	0X	0X	1	0X
				$\Uparrow$	$\Uparrow$	

Se tachas las filas no marcadas y las columnas marcadas (letra más pequeña)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	0	5	2	1	7	0X
R_2	107	2	3	0	3	4$\Leftarrow$
R_3	107	107	0	1	0X	2
R_4	10	6	11	6	0	7$\Leftarrow$
R_5	107	3	107	0X	0X	1$\Leftarrow$
	0X	0	0X	0X	1	0X
				$\Uparrow$	$\Uparrow$	

A los elementos de la parte no tachada se le resta 1 (su menor valor) y se suma esta valor a los elementos tachados dos veces:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	0	5	2	2	8	0
R_2	106	1	2	0	3	3
R_3	107	107	0	2	1	2
R_4	9	5	10	6	0	6
R_5	106	2	106	0	0	0
	0	0	0	1	2	0

Ahora se recuadran los ceros:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{0}_1$	5	2	2	8	0X
R_2	106	1	2	$\boxed{0}_2$	3	3
R_3	107	107	$\boxed{0}_3$	2	1	2
R_4	9	5	10	6	$\boxed{0}_4$	6
R_5	106	2	106	0X	0X	$\boxed{0}_5$
Art	0X	$\boxed{0}_6$	0X	1	2	0X

Ya tenemos marcada la solución. óptima. Volviendo al problema inicial, esta solución corresponde a:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
R_1	$\boxed{8}$	3	6	7	2	8
R_2	–	5	4	$\boxed{7}$	5	3
R_3	–	–	$\boxed{7}$	6	8	5
R_4	4	8	3	8	$\boxed{15}$	7
R_5	–	4	–	7	8	$\boxed{6}$

El beneficio obtenido es: $8+7+7+15+6=43$ u.m. La tarea A_2 no se realiza.

Ejercicio 60 *Una compañía dispone de cuatro vendedores y cinco territorios de venta. Los territorios no son igualmente ricos en potencial de ventas y se estima que un vendedor medio operando en cada territorio obtendría mensualmente las siguientes ventas:*

$Territorio:$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
$Ventas(u.m.):$	150	110	120	100	90

Los cuatro vendedores difieren también en su capacidad y se estima que trabajando en las mismas condiciones sus ventas seguirían la siguiente proporción (siendo 1 la del vendedor medio):

$Vendedor:$	V_1	V_2	V_3	V_4
$Capacidad:$	1.1	1.2	1	0.8

Se les ha permitido a cada vendedor excluir un territorio como destino; así, V_1 ha excluido a T_3, V_2 y V_3 a T_1 y V_4 a T_5.

Obtener la asignación óptima.

La tabla de asignación se construye de la siguiente forma:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
V_1	150×1.1	110×1.1	$-M$	100×1.1	90×1.1
V_2	$-M$	110×1.2	120×1.2	100×1.2	90×1.2
V_3	$-M$	110	120	100	90
V_4	150×0.8	110×0.8	120×0.8	100×0.8	$-M$
V_{FIC}	0	0	0	0	0

que resulta:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
V_1	$\boxed{165}$	121	$-M$	110	99
V_2	$-M$	132	$\boxed{144}$	120	108
V_3	$-M$	$\boxed{110}$	120	100	90
V_4	120	88	96	$\boxed{80}$	$-M$
V_{FIC}	0	0	0	0	$\boxed{0}$

La asignación que reportaría mayor beneficio sería la que está marcada en la tabla anterior. Por tanto se enviará al vendedor 1 al territorio 1, al segundo al territorio 3, al tercero al territorio 2 y al cuarto al territorio 4. Al territorio 5 no se envía ningún vendedor.

El beneficio total esperado es:

$$165 + 144 + 110 + 80 = 499 \text{ u.m.}$$

5.2 Ejercicios Propuestos

1. En los siguientes problemas de transporte se pide dar una solución inicial por los métodos siguientes: Método de la Esquina Noroeste(MEN), Método del Costo Mínimo(MCM) y por el Método de Vogel(MV). Obtener la solución óptima a partir de la solución inicial obtenida por el método MCM.

a)

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	SUM
O_1	2	7	4	5
O_2	3	3	7	8
O_3	5	4	1	7
O_4	1	6	2	14
DEM	7	9	18	

b)

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	SUM
O_1	8	10	12	17	15	100
O_2	15	13	18	11	9	150
O_3	14	20	6	10	13	180
O_4	13	19	7	5	12	280
DEM	90	170	50	210	190	

2. Considere el siguiente problema de transporte:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	SUM
O_1	5	1	7	10
O_2	6	4	6	80
O_3	3	2	5	15
DEM	75	20	50	

Cada demanda no satisfecha en D_1, D_2 y D_3 genera, respectivamente, un coste adicional de 5, 3 y 2. Dar una solución inicial por el método MV y obtener la solución óptima.

3. Una compañía produce una componente en tres plantas y los vende a cuatro compradores a un precio fijo de 40 u.m. por unidad. Las demandas mensuales de los compradores son respectivamente, de 30, 30, 40 y 50. La producción en cada una de las plantas es de 50, 50 y 75 y el coste de producción de cada unidad es, respectivamente de 10, 12 y 15. Los costes de transporte desde cada planta a cada comprador vienen dados por la siguiente tabla:

C_{ij}	C_1	C_2	C_3	C_4
P_1	5	7	10	15
P_2	8	6	9	14
P_3	10	9	8	12

Establecer la política de ventas que dé un beneficio más alto. ¿Debe alguna de las plantas modificar sus cifras de producción?

4. Resolver el siguiente problema de transporte:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	SUM
O_1	3	5	7	6	15
O_2	4	6	–	5	20
O_3	7	–	3	6	10
DEM	9	6	17	13	

5. Resolver el siguiente problema de transbordo con dos orígenes y dos destinos, siendo los suministros de O_1 y O_2 de 10 y 30 respectivamente y las demandas de D_1 y D_2 de 25 y 15.

C_{ij}	DO_1	DO_2	D_1	D_2
O_1	0	3	4	5
O_2	3	0	3	5
OD_1	4	3	0	2
OD_2	5	5	2	0

6. Obtener la solución óptima del problema de transporte dado por la siguiente tabla usando como solución inicial la que suministra el método de la esquina Noroeste.

	1	2	3	4	Disp.
1	8	11	5	7	400
2	9	5	6	11	700
3	12	4	8	10	100
Dem.	500	400	100	200	

7. Un fabricante de chips tiene que planificar la producción para los próximos tres meses. Los costes de producción por chip son de 10 pesetas en los dos primeros meses y de 15 el tercer mes. Se estima que la demanda de cada uno de los tres meses va a ser de 600, 400, y 500 unidades respectivamente. La fábrica puede producir a lo sumo 500 chips al mes. Además puede hacer horas extras durante el primer mes incrementando la producción en 100 unidades, aunque el coste de producción se incrementará en 5 pesetas por unidad. El exceso de producción se puede almacenar con un coste de 3 pesetas por mes y unidad. Se desea:

   (a) Planificar la producción resolviendo el problema por el algoritmo de transporte.

   (b) Formular el problema como un problema de programación lineal.

8. Un ordenador dispone de tres discos de diferentes características A, B, C. Puede almacenar como máximo 200 archivos en A, 100 en B y 300 en C. El usuario desea almacenar 300 archivos de texto, 100 paquetes conteniendo programas y 100 archivos de datos. Cada día accede por promedio 8 veces a un archivo de texto, 4 veces a programas y 2 veces a archivos de datos. Las unidades de tiempo utilizadas en acceder a un archivo según el tipo de archivo y el lugar donde está almacenado, viene dado en la tabla siguiente:

	texto	programa	datos
A	5	4	4
B	2	1	1
C	10	8	6

Se desea almacenar cada tipo de archivo en los discos adecuados con el objeto que el tiempo total de acceso sea mínimo.

(a) Plantear el problema como un problema de programación lineal.
(b) ¿Puede resolverse como un problema de transporte balanceado? Dar la tabla de este problema.
(c) Encontrar una solución inicial por el método de Vogel.
(d) Resolverlo.

9. Dada la tabla de transporte

	1	2	3	Disp.
A	8	9	6	45
B	5	7	4	25
C	3	5	7	50
D	7	8	5	30
dem.	40	60	30	

donde los elementos interiores representan costes, se desea determinar una solución básica factible y su coste asociado con:

(a) El método de la esquina noroeste.
(b) El método de Vogel.
(c) El método del coste mínimo.

10. Una empresa ha de asignar 5 de sus obreros (1, 2, 3, 4, 5) a 5 puestos de trabajo (A, B, C, D, E). De experiencias anteriores, se sabe que cada obrero ocasiona en cada puesto de trabajo el coste indicado en la tabla siguiente:

	A	B	C	D	E
1^o	7	3	5	7	10
2^o	6			8	7
3^o	6	5	1	5	
4^o	11	4		11	15
5^o		4	5	2	10

Los lugares en blanco indican que el obrero no puede hacer ese trabajo. Asignar a cada obrero un trabajo de modo que el coste total sea mínimo.

11. Un empresario gestiona cuatro hospitales que necesitan durante un mes 40, 150, 60, 50 cajas de una medicina. Esta medicina puede ser adquirida en los laboratorios L_1, L_2 y L_3 que garantizan un suministro de 150, 110, y 40 cajas al mes respectivamente. Los precios de la medicinas según el laboratorio y el hospital al que surte es:

	H1	H2	H3	H4
L_1	5	2	4	9
L_2	10	3	8	16
L_3	7	3	9	10

¿Cuántas cajas debe comprar en cada laboratorio para minimizar el coste?

12. Una empresa de limpieza tiene 5 empleados. Para limpiar una casa deben barrer, limpiar la cocina, limpiar el baño y dar un repaso general. El tiempo en horas que emplea cada operaria en hacer cada trabajo se indica en la siguiente tabla.

	barrer	limpiar la cocina	limpiar el baño	repaso general
Empleado 1	6	5	2	1
Empleado 2	9	8	7	3
Empleado 3	8	5	9	4
Empleado 4	7	7	8	3
Empleado 5	5	5	6	4

Asignar un trabajo a cada empleado de forma que se minimice el tiempo total que se dedica a la limpieza de la casa.

13. Una fábrica de galletas está estudiando cómo surtir de este producto durante la próxima semana, a cuatro cadenas de supermercados (A, B, C y D). Dispone de tres sucursales S_1, S_2 y S_3, con producciones de 1000, 2000 y 1500 cajas de galletas por semana, respectivamente.

A su vez, la cadena A precisa de 2000 cajas por semana, 1000 la B, 1000 la C y 500 la D.

La distancia desde cada sucursal al almacén de cada una de las cadenas, se detalla en la siguiente tabla (en kms):

	A	B	C	D
S_1	40	20	50	24
S_2	20	60	20	36
S_3	28	40	40	4

El coste de transportar cada caja durante 1 km es de 0.1 u.m. La ganancia por caja obtenida por la venta en cada una de las cadenas comerciales es 10 u.m. en la cadena A, 8 u.m. en la B, 12 u.m. en la C y 10 u.m. en la D.

Determinar desde qué sucursales y en qué cantidades nos interesaría servir a las diferentes cadenas, para maximizar el beneficio de la empresa ¿Cuál es el beneficio obtenido?

14. Una empresa se dedica a la fabricación de ordenadores. La empresa puede fabricar un máximo de 40 unidades al trimestre a un costo de 400 u.m. cada unidad. A partir de esa cantidad puede producir a un costo de 440 u.m. la unidad. La empresa recibe un pedido de 45 unidades en el primer trimestre, 25 unidades en el segundo trimestre y 75 en el tercer trimestre. Además se tiene la posibilidad de utilizar un almacén a un costo de 20 u.m. la unidad por trimestre. Suponiendo que la empresa comienza el año con un stock de 10 unidades, se pretende calcular la producción de la compañía en los tres trimestres de manera que se haga mínimo el costo total y se satisfaga la demanda. Construir la tabla inicial si se desea resolver como un problema de transporte.

5.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

   a) Solución óptima: $x_{11}= 5$, $x_{22} = 8$, $x_{32} = 1$, $x_{33} = 6$, $x_{41} = 2$, $x_{43} = 12$, $z = 70$.

   b) Solución óptima: $x_{12} = 100$, $x_{22} = 70$, $x_{25} = 80$, $x_{31} = 20$, $x_{33} = 50$, $x_{35} = 110$, $x_{41} = 70$ $x_{44} = 210$, $z = 6600$.

2. **Solución:**

   $x_{12} = 10$, $x_{21} = 60$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 10$, $x_{31} = 15$, $x_{43} = 40$, $z = 595$.

3. **Solución:**

   Como el problema no es equilibrado, se incorpora un comprador ficticio, que numeramos con el 5, que demanda 25 unidades. La solución del problema de transporte es:

   $x_{11} = 30$, $x_{13} = 20$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 20$, $x_{34} = 50$, $x_{15} = 20$, $x_{35} = 5$, el beneficio total de la compañía es de 2840 u.m..

   La tercera planta puede disminuir su producción en 25 unidades, que son las que adquiere el comprador ficticio, sin que cambie la solución actual.

4. **Solución:**

   $x_{11} = 2$, $x_{12} = 6$, $x_{13} = 7$, $x_{21} = 7$, $x_{24} = 13$, $x_{33} = 10$, $z = 208$.

5. **Solución:**

   10 unidades del O_1 al D_2, 30 de O_2 al D_1 y 5 del D_1 al D_2. El coste del transporte es de 150 u.m.

6. **Solución:**

   $x_{11} = 200$, $x_{14} = 200$, $x_{21} = 300$, $x_{22} = 300$, $x_{23} = 100$, $x_{32} = 100$, siendo el costo 8200 u.m.

7. **Solución:**

   (a) La tabla de transporte es:

	1	2	3	ficticia	Disp
1^{o}mes normal	10	10+3	10+6	0	500
1^{o}mes extra	15	15+3	15+6	0	100
2^{o}mes	M	10	10+3	0	500
3^{o}mes	M	M	15	0	500
Dem	600	400	500	100	

   El primer mes se producen 600 que se venderán todas. El segundo mes se fabrican 500 de las cuales se venden 400 y se guardan 100 para el tercer mes. En el tercer mes sólo se fabricarán 400, no alcanzando la producción máxima de 500. El coste total es 17800.

   (b) El modelo podría ser el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} min & 10x_{11}+13x_{12}+16x_{13}+15x_{21}+18x_{22} \\ & \quad +21x_{23}+10x_{32}+13x_{33}+15x_{43} \\ \text{sa:} & x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 500 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 100 \\ & x_{32}+x_{33}\leq 500 \\ & x_{43}\leq 500 \\ & x_{11}+x_{21}=600 \\ & x_{12}+x_{22}+x_{32}=400 \\ & x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=500 \\ & x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{43}\geq 0 \end{array}\right.$$

8. **Solución:**

   Los archivos deben almacenarse como indicamos a continuación para que el tiempo de acceso total sea mínimo: 200 archivos de texto en A y 100 en B, 100 archivos de programas en C, 100 archivos de datos en C.

9. **Solución:**

   Hay que añadir un destino ficticio con demanda 20.

   a) $x_{11} = 40$, $x_{12} = 5$, $x_{22} = 25$, $x_{32} = 30$, $x_{33} = 20$, $x_{43} = 10$, $x_{44} = 20$ siendo el costo de 880 u.m.

   En los dos casos siguientes puede haber distinta solución si se presenta empate en la selección.

   b) $x_{12} = 25$, $x_{14} = 20$, $x_{14} = 20$, $x_{23} = 25$, $x_{31} = 40$, $x_{32} = 10$, $x_{42} = 25$, siendo el costo de 720 u.m.

   c) $x_{12} = 25$, $x_{14} = 20$, $x_{23} = 25$, $x_{31} = 40$, $x_{32} = 10$, $x_{42} = 25$, $x_{43} = 5$, siendo el costo de 720 u.m.

10. **Solución:**

    La asignación es la siguiente: (1,A) (2,E) (3,C) (4,B) (5, D). Su coste es 21.

11. **Solución:**

    La cantidad que cada hospital debe demandar a cada laboratorio es

	H1	H2	H3	H4
L_1	40	40	60	10
L_2	0	110	0	0
L_3	0	0	0	40

    El coste total es de 1340 u.m..

12. **Solución:**

    El empleado 5 barre, el empleado 3 limpia la cocina, el empleado 1 limpia el baño y el empleado 4 hace el repaso general. El tiempo mínimo que se dedica a la limpieza de la casa es de 15 horas.

13. **Solución:**

    En la siguiente tabla indicamos en cada celda el beneficio obtenido, restando a los ingresos los gastos de transporte, por ejemplo en la celda (1,1) aparecerá $10 - 4 = 6$, que es el beneficio obtenido por cada caja que se transporta de la sucursal 1 a la cadena A.

	A	B	C	D	*producción*
S_1	$10-4$	$8-2$	$12-5$	$10-2.4$	1000
S_2	$10-2$	$8-6$	$12-2$	$10-3.6$	2000
S_3	$10-2.8$	$8-4$	$12-4$	$10-0.4$	1500
Demanda	2000	1000	1000	500	

    El problema es de maximización. La solución es la indicada en la tabla siguiente

	A	B	C	D
S_1	0	1000	0	0
S_2	1000	0	1000	0
S_3	1000	0	0	500

    El beneficio es de 36000 u.m.

14. **Solución:**

    La tabla inicial del problema de transporte puede ser:

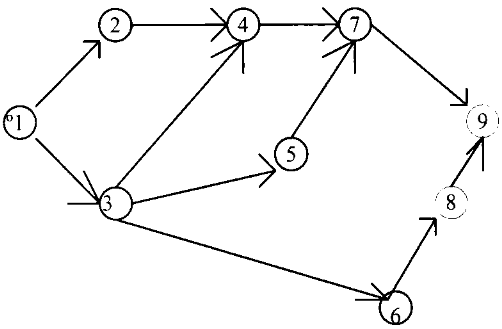
	Trim. 1	Trim. 2	Trim. 3	Disponibilidades
Trim. 1 (normal)	400	420	440	50
Trim. 1 (caro)	440	460	480	M
Trim. 2 (normal)	M	400	420	40
Trim. 2 (caro)	M	440	460	M
Trim. 3 (normal)	M	M	400	40
Trim. 3 (caro)	M	M	440	M
Demanda	45	25	75	

Ejercicios tema 6

Problemas de redes

6.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 61 *Considerar la red del proyecto de la siguiente figura:*



Para cada actividad se da, en días, el tiempo pesimista, más probable y optimista:

actividad	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)
Tiempo optimista.	*4*	*2*	*1*	*6*	*5*
Tiempo más probable	*6*	*4*	*3*	*9*	*10*
Tiempo pesimista	*8*	*8*	*7*	*12*	*15*

actividad	(3,6)	(4,7)	(5,7)	(6,8)	(7,9)	(8,9)
a = *Tiempo optimista.*	*7*	*5*	*1*	*2*	*10*	*6*
m = *Tiempo más probable*	*12*	*9*	*2*	*3*	*15*	*9*
b = *Tiempo pesimista*	*18*	*12*	*3*	*6*	*20*	*11*

Calcular:

a) El tiempo mínimo por término medio que hay que emplear para acabar el proyecto.

b) Relación de actividades críticas.

c) Probabilidad de que la duración total del proyecto no supere los 40 días.

a y b) La duración media de cada actividad se calcula con la expresión:

$$\frac{a + 4m + b}{6}$$

Usando el método C.P.M., y multiplicando por 6 la duración de las actividades, obtenemos la tabla siguiente:

actividad	duración	PC	PT	TT	TC
a = (1,2)	$\frac{36}{6}$	0	36	60	24
b = (1,3)	$\frac{26}{6}$	0	26	26	0
c = (2,4)	$\frac{20}{6}$	36	56	80	60
d = (3,4)	$\frac{54}{6}$	26	80	80	26
e = (3,5)	$\frac{60}{6}$	26	86	130	70
f = (3,6)	$\frac{73}{6}$	26	99	131	58
g = (4,7)	$\frac{62}{6}$	80	142	142	80
h = (5,7)	$\frac{12}{6}$	86	98	142	130
i = (6,8)	$\frac{20}{6}$	99	119	151	131
j = (7,9)	$\frac{80}{6}$	142	222	222	142
k = (8,9)	$\frac{71}{6}$	119	190	222	151

El tiempo mínimo es de $\frac{222}{6} = 37$ días.

Las actividades críticas son: b, d, g, j

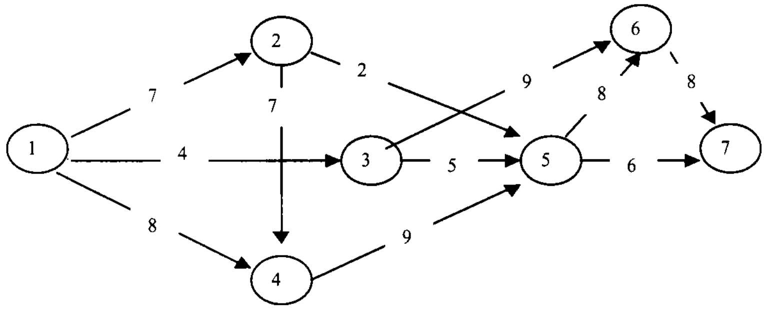
c) La media de la duración total del proyecto es 37 y la varianza es:

$$\frac{(8-2)^2}{36} + \frac{(12-6)^2}{36} + \frac{(12-5)^2}{36} + \frac{(20-10)^2}{36} = 6.1389$$

y la desviación típica es por tanto $\sqrt{6.1389} = 2.4777$ días.

La probabilidad de que la duración total sea menor que 40 días se calcula suponiendo que esta variable se rige por una distribución normal de media 37 y desviación típica 2.4777. El valor resultante para esta probabilidad es 0.887014.

Ejercicio 62 *Obtener el flujo máximo de 1 a 7 en la red siguiente (los números en cada arco indican su capacidad).*



1. Por medio del algoritmo de Ford Fulkerson, partiendo de la solución con flujo nulo.

2. Buscando caminos de flujo que permitan localizar un corte. Indica este corte.

3. Plantea el problema de Programación lineal correspondiente.

1. Se recorren sucesivamente las siguientes cadenas (se indica el flujo en cada arco y el flujo total enviado en las sucesivas fases).

   $\boxed{1} \to 7 \to \boxed{2} \to 7 \to \boxed{4} \to 7 \to \boxed{5} \to 7 \to \boxed{6} \to 7 \to \boxed{7}$

   Flujo total=7

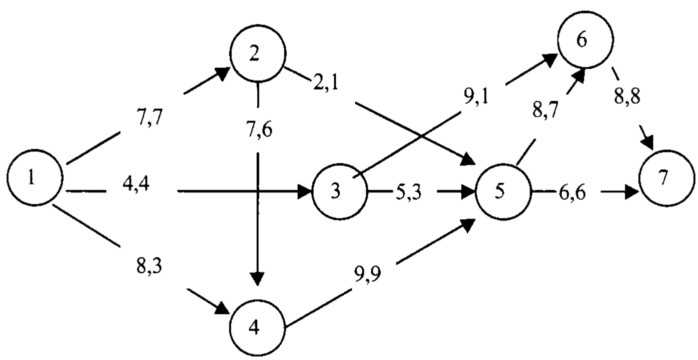
   $\boxed{1} \to 2 \to \boxed{4} \to 9 \to \boxed{5} \to 9 \to \boxed{7}$ Flujo total 7+2=9

   $\boxed{1} \to 1 \to \boxed{3} \to 1 \to \boxed{6} \to 8 \to \boxed{7}$ Flujo total=9+1=10

   $\boxed{1} \to 4 \to \boxed{3} \to 3 \to \boxed{5} \to 5 \to \boxed{7}$ Flujo total=10+3=13

   $\boxed{1} \to 3 \to \boxed{4} \leftarrow 6 \leftarrow \boxed{2} \to 1 \to \boxed{5} \to 6 \to \boxed{7}$ Flujo total=13+1=14

   La solución final es



   Corte=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7\}$

2. Pueden usarse los mismos caminos anteriores

3. El problema de programación lineal correspondiente es:

   max x_{71}

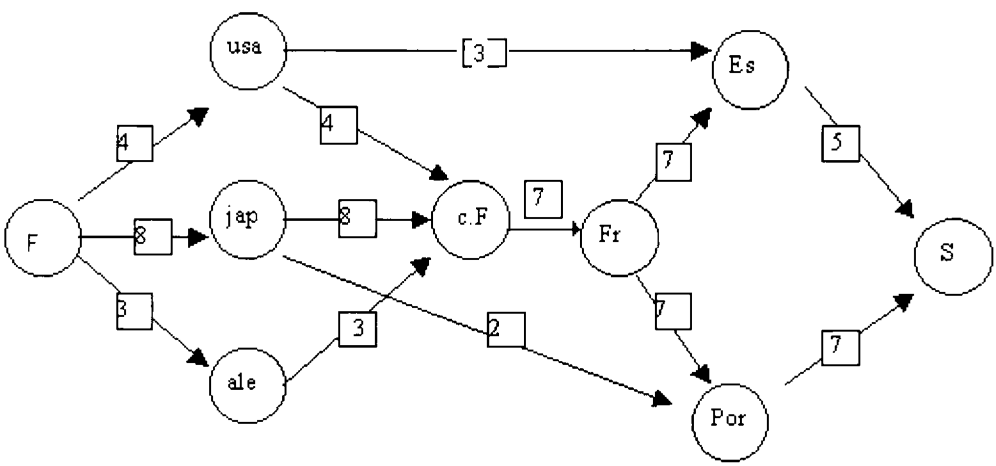
$$\text{s.a.}\begin{cases} x_{12} \leq 7,\ x_{13} \leq 4,\ x_{14} \leq 7, ...\textit{flujo arco} \leq \textit{capacidad (salvo } x_{71}) \\ x_{71} = x_{12} + x_{13} + x_{14} \\ x_{12} = x_{24} + x_{25} \\ x_{13} = x_{35} + x_{36} \\ x_{24} + x_{14} = x_{45} \\ x_{25} + x_{35} + x_{45} = x_{56} + x_{57} \\ x_{36} + x_{56} = x_{67} \\ x_{57} + x_{67} = x_{71} \end{cases}$$

Ejercicio 63 *USA, Japón y Alemania proveen de ordenadores a España y Portugal a través de Francia que actúa como intermediaria. Francia tiene limitado el número de pedidos por día que puede servir a un máximo de 7 pedidos. Además, USA puede servir a España un máximo de 3 pedidos directos (es decir, sin pasar por Francia), y Japón un máximo de 2 pedidos a Portugal, también sin intermediarios.*

Se desea calcular el máximo número de pedidos que llegan a España y Portugal si la oferta de USA es de 4 pedidos, la de Japón de 8 pedidos y la de Alemania de 3, siendo las demandas de 5 pedidos para España y 7 para Portugal.

Plantear este problema como un problema de flujo máximo.

Si se plantea como un problema de flujo máximo, obtenemos la red que aparece en la figura siguiente.



Ejercicio 64 *Con el propósito de diseñar el plan de ventas para el siguiente año una empresa ha de realizar las actividades siguientes en el orden indicado por las*

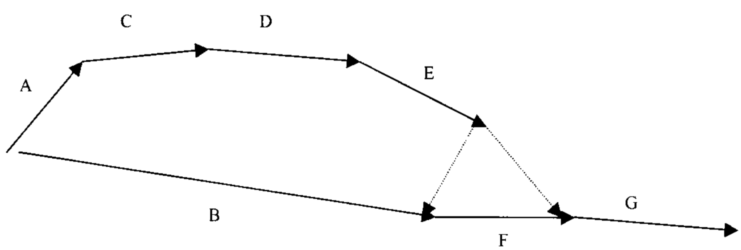
relaciones de precedencia de la tabla.

Actividad	*descripción*	*Predecesoras*	*Duración (en dias)*
A	*Evaluar las previsiones del volumen de ventas*	-	*10*
B	*Estudiar la competitividad del mercado*	-	*7*
C	*Realizar el diseño del producto*	*A*	*5*
D	*Preparar el esquema de producción*	*C*	*4*
E	*Estimar el coste de producción*	*D*	*2*
F	*Establecer los precios de venta*	*B, E*	*1*
G	*Diseñar un plan de ventas*	*E, F*	*12*

Indica qué actividades no pueden sufrir retraso y qué retraso pueden tener como máximo las restantes actividades.

¿En cuántos días puede estar terminado todo el proyecto, si se realiza lo más rápido posible?

El grafo del proyecto es el aparece en la figura siguiente:

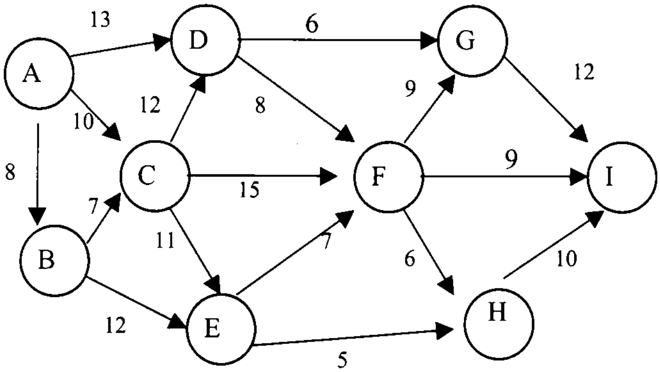


Y la tabla de aplicación del algoritmo CPM es la que aparece a continuación:

	DUR	PRE	PC	PT	TT	TC	HOLGURA
A	10	-	0	10	10	0	0
B	7	-	0	7	21	14	14
C	5	A	10	15	15	10	0
D	4	C	15	19	19	15	0
E	2	D	19	21	21	19	0
F	1	B, E	21	22	22	21	0
G	12	E, F	22	34	34	22	0

No pueden retrasarse la actividades con holgura nula, que son todas menos la actividad B. La duración total del proyecto es como mínimo de 34 días.

Ejercicio 65 *En la siguiente red hallar la ruta más corta entre los vértices origen y final mediante el Algoritmo de Dijkstra.*



En la siguiente tabla mostramos las sucesivas etiquetas temporales y permanentes (recuadradas) para las distintas fases del algoritmo de Dijkstra.

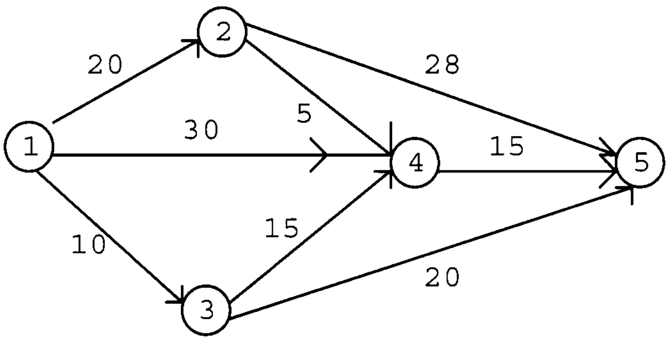
A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	10	13					
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	13	20	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	20	25	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	20	21	$\boxed{19}$	∞	∞
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	$\boxed{20}$	21	$\boxed{19}$	∞	31
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{19}$	25	31
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{19}$	$\boxed{25}$	30
$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	$\boxed{20}$	$\boxed{21}$	$\boxed{19}$	$\boxed{25}$	$\boxed{30}$

El camino mínimo resulta ser $A \to D \to F \to I$

La longitud del camino mínimo es 30.

6.2 Ejercicios Propuestos

1. Hallar el flujo máximo en la red siguiente, indicando los pasos del algoritmo de Ford-Fulkerson, siendo el nodo 1 la fuente y el nodo 5 el sumidero. Los números en cada arco indican su capacidad.



2. Un proyecto se compone de las actividades a, b, c, d, e, f y g. Las relaciones entre las actividades son:

$$a < c, \quad c < d, \quad b < d, \quad c < e,$$
$$b < e, \quad e < f, \quad d < f, \quad d < g.$$

De cada actividad se han obtenido tres estimaciones sobre su duración en días:

Actividad	a	b	c	d	e	f	g
t_o	2	6	3	5	9	3	4
t_m	3	7	8	6	12	5	6
t_p	4	10	10	7	16	6	7

Se pide:

(a) Dibujar la red del proyecto.

(b) El tiempo esperado y la varianza de cada actividad.

(c) El camino crítico, tiempo esperado y varianza del proyecto.

(d) ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se termine en un plazo de entre 24 y 27 días?

3. Un proyecto se compone de las actividades a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k y l. Las relaciones entre las actividades son:

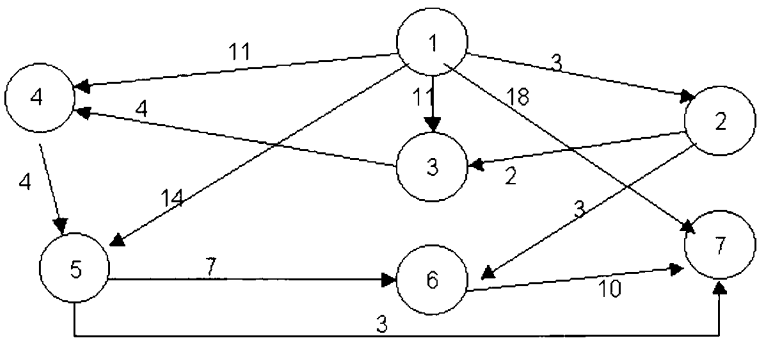
$$a < c, \quad a < b, \quad b < d, \quad b < g, \quad b < k, \quad c < d, \quad c < g,$$
$$d < e, \quad e < f, \quad f < h, \quad f < i, \quad f < l, \quad g < i, \quad g < l, \quad h < j,$$
$$i < j, \quad k < l.$$

La duración estimada de las actividades, en días, es:

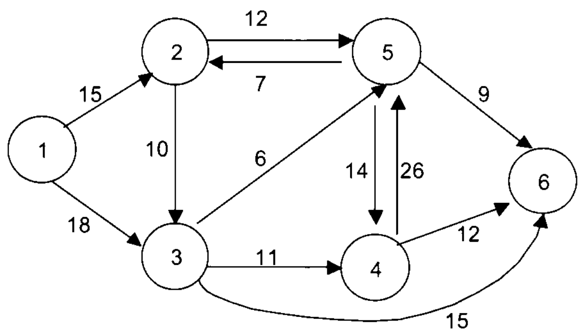
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
30	7	10	14	10	7	21	7	12	15	30	15

Dibujar la red del proyecto y efectuar el Análisis CPM.

4. Hallar el camino más largo para ir del nodo 1 al 7 en la siguiente red



5. Hallar el flujo máximo de 1 a 6 en la red. Los números de los arcos indican su capacidad.



6. Las ciudades A, B, C, D, E están unidas por autobuses. Los tiempos medios en horas para ir de una ciudad a otra están representados en la tabla siguiente. Por dificultades de horario de enlace entre los autobuses sólo pueden realizarse los viajes en el sentido indicado:

$(A \rightarrow B)$, $(A \rightarrow C)$, $(B \rightarrow C)$,$(B \rightarrow D)$, $(B \rightarrow E)$, $(C \rightarrow D)$, $(D \rightarrow E)$

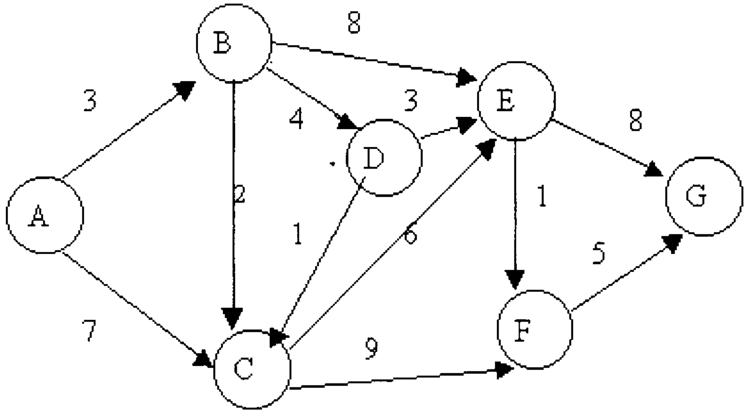
	A	B	C	D	E
A		2	8		
B			5	4	12
C				6	
D					10
E					

Se pide:

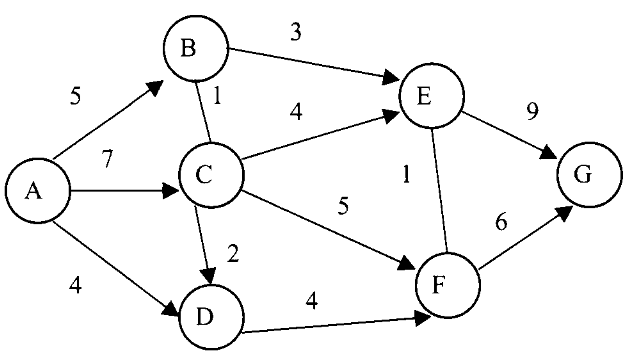
a) Recorrido más rápido para ir de A a E (se supone que no hay que esperar entre un autobús y el siguiente).

b) Plantearlo como un problema de programación lineal 0-1.

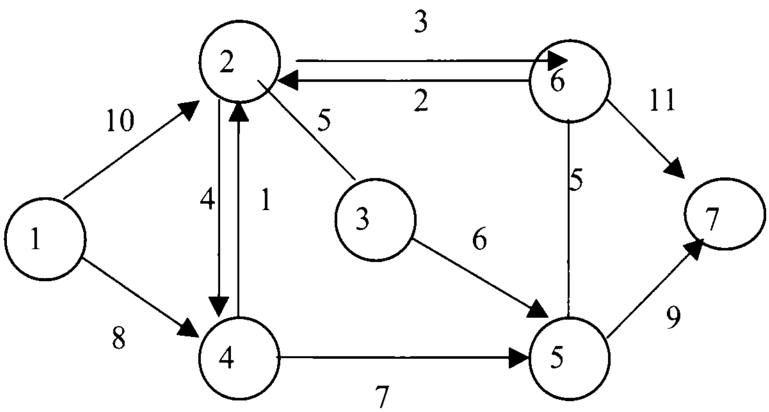
7. En la siguiente red hallar la ruta más corta entre los vértices origen A y final G mediante el Algoritmo de Etiquetación.



8. Determinar el flujo máximo en la red:



9. Determinar el flujo máximo en la red:



10. Un proyecto se compone de las actividades a, b, c, d, e, f, g, h, i, j. Las relaciones entre las actividades son:

    $a < b$, $a < c$, $a < d$, $b < e$, $c < e$, $d < e$,

    $e < f$, $e < g$, $f < i$, $f < h$, $g < h$, $h < j$, $i < j$.

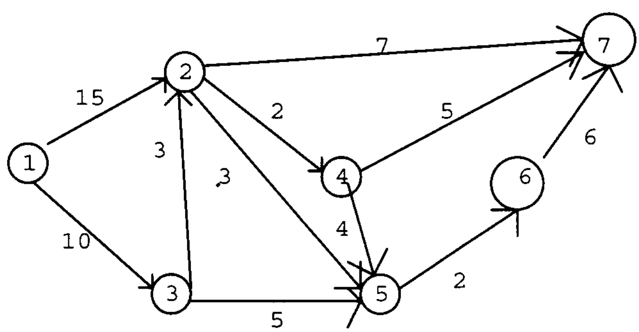
    De cada actividad se han obtenido tres estimaciones sobre su duración en días:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
6	3	5	4	2	7	9	4	6	9
7	5	6	6	3	8	11	5	8	12
9	6	8	7	4	11	13	6	11	13

    (a) Hallar el camino crítico, la esperanza y la varianza de la duración del proyecto.

    (b) ¿Qué estimación debe darse de la duración del proyecto si se desea que la probabilidad de tardar más que este tiempo no sea mayor que 0.05?

11. Hallar el camino mínimo del nodo 1 al nodo 7 indicando los pasos del algoritmo de etiquetación.



6.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

   son los flujos siguientes: (1,2) 20, (1,3) 10, (1,4) 15, (2,4) 0, (2,5) 20, (3,4) 0, (3,5) 10, (4,5) 15. El flujo máximo total es 45.

2. **Solución:**

   b) E(T) = 27.5 días Var(T) = 3.083 días^2 c) Camino crítico: **acef.** d) La probabilidad es 0.366.

3. **Solución:**

   Camino crítico: **acdefij**. Duración **98** días

4. **Solución:**

   El camino más largo es 1-4-5-6-7 con longitud 32.

5. **Solución:**

   Las cantidades que circulan por cada arco son:

   (1,2) 15, (1,3) 18, (2,3) 3, (2,5) 12, (3,4) 6, (3,5) 0, (3,6) 15, (4,5) 0, (4,6) 9, (5,2) 0, (5,4) 3, (5,6) 9.

   El flujo total es 33.

6. **Solución:**

   a) El camino más rápido es $A \Rightarrow B \Rightarrow E$. Su duración es 2 + 12=14

   b) min $z = 2x_{AB} + 8x_{AC} + 5x_{BC} + 4x_{BD} + 12x_{BE} + 6x_{CD} + 10x_{DE}$

   $$\begin{aligned} \text{s. a:}\quad & x_{AB} + x_{AC} = 1 \\ & x_{AB} - (x_{BC} + x_{BD} + x_{BE}) = 0 \\ & x_{AC} + x_{BC} - x_{CD} = 0 \\ & x_{BD} + x_{CD} - x_{DE} = 0 \\ & x_{BE} + x_{DE} = 1 \\ & x_{AB},\ x_{AC},\ x_{BC},\ x_{BD},\ x_{BE},\ x_{CD},\ x_{DE} \in \{0,\ 1\} \end{aligned}$$

7. **Solución:**

   Las etiquetas deben ponerse en el orden A, B, D, C, E, F, G y son respectivamente

   0, 3, 7, 5, 10, 11, 16. La longitud del camino mínimo es 16. El camino mínimo es A, B, D, E, F, G.

8. **Solución:**

   El flujo máximo es 14.

   Una solución es:

   $x_{AB} = 4,\ x_{AC} = 7,\ x_{AD} = 3,\ x_{BC} = 1,\ x_{BE} = 3,\ x_{CB} = 0,\ x_{CE} = 4,$
   $x_{CF} = 3,\ x_{CD} = 1, x_{DF} = 4,\ x_{EF} = 0,\ x_{EG} = 8,\ x_{FE} = 1,\ x_{FG} = 6.$

9. **Solución:**

   El flujo máximo es 15.

   Una solución es:

   $x_{12} = 10$, $x_{14} = 5$, $x_{26} = 3$, $x_{23} = 5$, $x_{24} = 3$, $x_{35} = 5$, $x_{42} = 1$, $x_{45} = 7$, $x_{56} = 3$, $x_{57} = 9$, $x_{67} = 6$, el resto de los arcos nulos.

10. **Solución:**

    (a) El camino crítico está formado por las actividades a, c, e, f, i, j. La esperanza del proyecto es 44.5 días y la varianza es 3.25 días^2.

    (b) 47.465 días.

11. **Solución:**

    El camino mínimo puede ser $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 7$ o también $1 \to 3 \to 2 \to 7$.

    Los dos caminos anteriores tienen longitud 20. Las etiquetas de los vértices $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ son respectivamente $0, 13, 10, 15, 15, 17, 20$.

Ejercicios tema 7

Programación entera

7.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 66 *Realiza un paso del algoritmo de corte en la resolución del siguiente problema*

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ s.\ a. & \left\{ \begin{array}{r} 5x_1 + x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1,\ x_2 \geq 0,\ x_1,\ x_2\ enteros \end{array} \right. \end{array}$$

Hallamos la solución del problema relajado. Se obtienen sucesivamente las tablas siguientes. El elemento pivote aparece recuadrado.

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{5} & 1 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ \hline -3 & -1 & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & \boxed{\frac{3}{5}} & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{16}{5} \\ \hline 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{16}{3} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \end{array}$$

Realizando el corte a partir de la primera ecuación:

$x_1 + \frac{1}{3}h_1 + \left(-1 + \frac{2}{3}\right) h_2 = 3 + \frac{1}{3}$

$x_1 - h_2 - 3 = \boxed{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}h_1 - \frac{2}{3}h_2 \leq 0}$

Añadiendo previamente su correspondiente variable de holgura, e incorporando esta restricción al problema primitivo, obtenemos la tabla:

1	0	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
0	1	-$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{16}{3}$
0	0	-$\frac{1}{3}$	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	1	-$\frac{1}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	

Usando el método dual del simplex obtenemos:

1	0	$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	-$\frac{9}{6}$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	

Como con este problema aún no tenemos la solución entera, se construiría otro corte a partir de cualquiera de las ecuaciones de estas tres filas.

Esta solución es degenerada. Si se introduce en la base la variable h_1 llegaríamos a la solución del problema entero que es $x_1 = 1, \quad x_2 = 6$. El valor para la función objetivo es 9, igual valor que el que se consigue con la solución anterior que no es entera.

Ejercicio 67 *Resolver usando el algoritmo de Ramificación el problema de programación entera mixta:*

Max $z=14x_1+18x_2$

s.a.: $-x_1+3x_2 \leq 6$, $7x_1+x_2 \leq 35$, $x_1, x_2 \geq 0, x_1$ *entera.*

La tabla óptima del problema relajado viene dada por :

x_1	x_2	h_1	h_2	
0	*1*	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
1	*0*	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$
0	*0*	$\frac{56}{11}$	$\frac{30}{11}$	

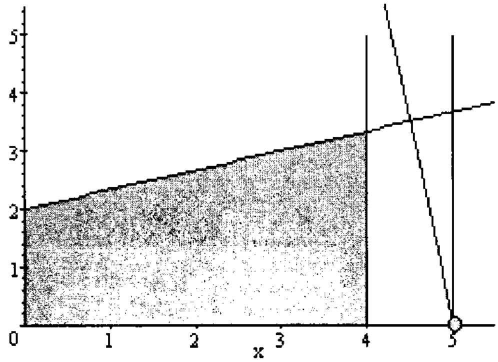
Nota: Los problemas resultantes pueden resolverse por el método de Simplex o gráficamente.

El problema consiste en

$Max\ 14x_1 + 18x_2$

$s.a.: -x_1 + 3x_2 \leq 6, 7x_1 + x_2 \leq 35, x_1, x_2 \geq 0\ x_1$ *entera.*

Como la solución correspondiente a x_1 que aparece en la tabla óptima, es $\frac{9}{2}$ hay que dividir la región factible del problema relajado primitivo en dos zonas. La de la derecha que corresponde a $x_1 \leq 4$ y la de la izquierda que corresponde a $x_1 \geq 5$. A continuación se muestra una figura donde están representadas estas dos zonas.



Rama de la derecha:

Sólo contiene un punto: (5,0)

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} & 0 & & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} & 0 & & \frac{9}{2} \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & & -5 \\ \hline 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{30}{11} & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{22}} & \frac{3}{22} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{30}{11} & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 70 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 22 & 11 \\ \hline 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{30}{11} & 0 & \end{array}$$

Solución entera:$x_1 = 5,\ x_2 = 0$. con valor 70.

Rama de la izquierda:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{30}{11} & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} & 0 & \frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{30}{11} & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} & 0 & \frac{7}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{22} & \frac{3}{22} & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{22} & \boxed{-\frac{3}{22}} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{56}{11} & \frac{30}{11} & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{22}{3} & \frac{22}{6} \\ \hline 0 & 0 & 6 & 0 & 20 & \end{array}$$

La solución óptima es

$x_1 = 4, \ x_2 = \frac{10}{3}$ con valor 116.

Ejercicio 68 *Una empresa vende latas de aceite de 5 y 9 litros. Ambas latas precisan la misma cantidad de latón para su envasado (1 pieza de latón). De momento sólo se dispone de 6 piezas de latón y de 45 litros de aceite. La lata grande se vende a 8 euros y la pequeña a 5 euros. Si se desea maximizar el precio total de venta, ¿cuántas latas deben envasarse de cada clase?*

El problema consiste en

$max \quad z = 5x_1 + 8x_2,$

$sa : x_1 + x_2 \leq 6,$

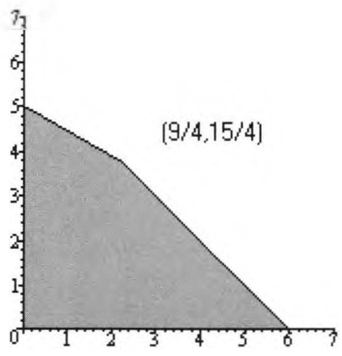
$\qquad 5x_1 + 9x_2 \leq 45,$

$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \quad enteros.$

donde x_1 representa el número de latas pequeñas, y x_2 el número de latas grandes.

Para seguir la resolución de este problema es conveniente guiarse por el esquema que aparece en la figura 7.3 de la página 424. En el árbol de esta figura los números de los problemas, que estén indicados en cada nodo, son el orden de su creación. La letra indica el orden en que se han ido resolviendo.

Se resuelve en primer lugar el problema relajado, obteniendo que la solución es $(9/4, 15/4)$ con valor $z = 165/4 = 41.25$, que es una cota superior para el beneficio. En la siguiente figura está representada su región factible, así como la solución del problema relajado.



Ahora se divide la región factible en dos. Elegimos arbitrariamente una variable que tenga solución fraccionaria, por ejemplo x_2 y consideramos las subregiones de la región factible $x_2 \leq 3$ y $x_2 \geq 4$ (ver figura 7.1).

Tenemos ahora dos subproblemas. La mejor solución de estos dos subproblemas sería la solución buscada.

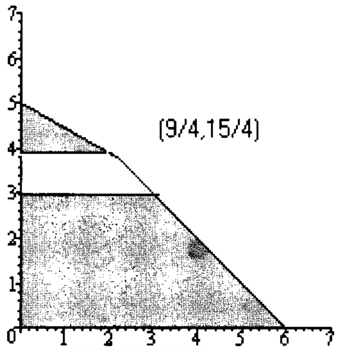


Figura 7.1: Regiones factibles de los subploblemas 2 y 3.

Elegimos ahora cualquier problema de estos dos, por ejemplo el de la región superior. La solución es $z = 41$, $x_1 = 9/5$, $x_2 = 4$. Como este problema aún no tiene solución entera lo dividimos en dos usando la variable x_1 para la ramificación, obteniéndose otros dos subproblemas:

Subproblema 4 = subproblema 2 + contraste $x_1 \geq 2$,

Subproblema 5 = subproblema 2 + contraste $x_1 \leq 1$. Su región factible está representada en la figura 7.2.

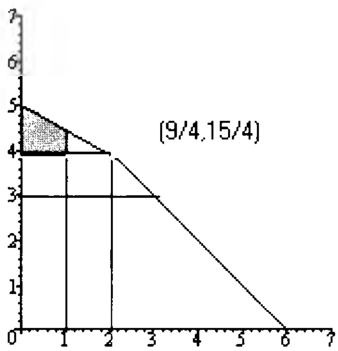


Figura 7.2: Región factible subploblema 5.

El subproblema 4 es infactible, así que es un **problema terminal**. Proseguimos analizando uno cualquiera de los subproblemas abiertos. Elegimos el último creado que es el 5. Su solución es $z = 365/9$, $x_1 = 1$, $x_2 = 40/9$, que tampoco es entera. Subdividimos este último en otros dos de la forma siguiente:

subproblema 6 = subproblema 5 + contraste $x_2 \geqslant 5$.

subproblema 7 = subproblema 5 + contraste $x_2 \leqslant 4$.

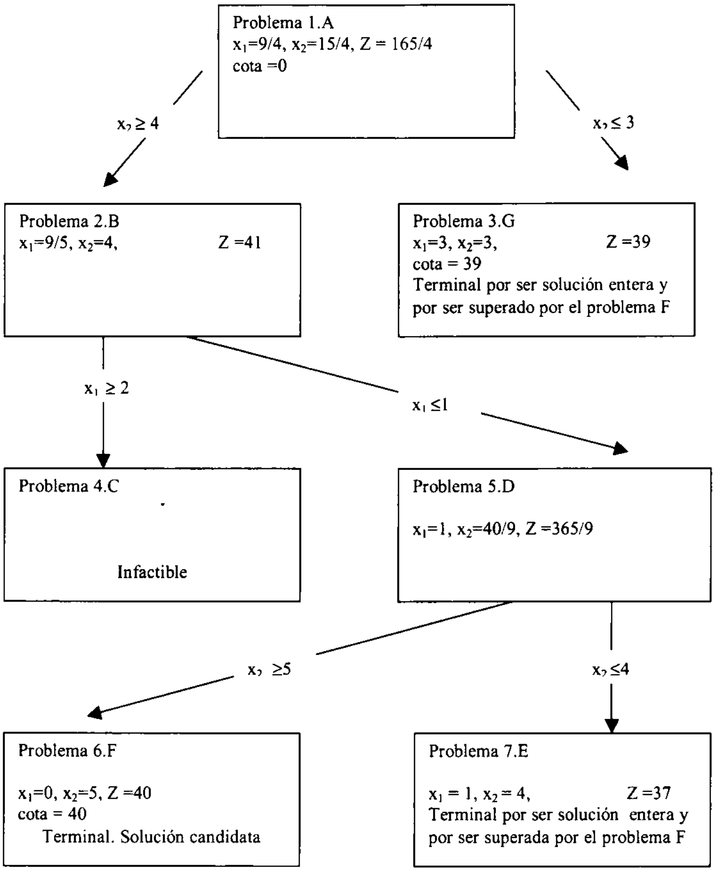


Figura 7.3: Esquema del algoritmo de ramificación.

Elegimos el 7. La solución es $z = 37$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Esta solución es entera. Podría ser la solución buscada caso de no encontrar otra mejor en los problemas que restan por resolver. Se dice que es una **solución candidata** y también es un problema terminal.

A continuación resolvemos el problema 6, que es el último abierto. Su solución es $z = 40$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Queda sin resolver el problema 3. Su solución es $z = 39, x_1 = x_2 = 3$, que es entera, pero como ya hay una solución con $z = 40$, el subproblema 3 queda cerrado. Cuando todos los problemas queden cerrados la solución óptima es la mejor de entre las candidatas. En este caso, la solución óptima corresponde a la solución del problema 6 que era $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ con $z = 40$.

Ejercicio 69 *Una empresa fabrica dos elementos electrónicos A y B. Cada uno de ellos tiene que pasar por tres puestos de una línea de montaje. El tiempo que ha de estar cada producto en cada uno de los puestos de la línea de montaje está expresado* *en minutos en la siguiente tabla.*

	A	*B*
Puesto 1	*6*	*4*
Puesto 2	*5*	*5*
Puesto 3	*4*	*6*

Cada puesto puede estar en funcionamiento un tiempo máximo de 480 minutos, pero debe gastar algún tiempo en mantenimiento. En el primer puesto el tiempo de mantenimiento es del 10%, en el segundo del 14% y en el tercero del 12% sobre el total del tiempo disponible. La empresa desea minimizar la suma de los tiempos en que los puestos de la línea de montaje permanecen totalmente inactivos.

a) Plantea el problema.

b) Escribe la tabla inicial del problema relajado para resolverlo por el método de simplex y realiza una iteración del algoritmo de corte.

a) Si x_1, x_2 son las unidades de cada componente electrónico y x_3, x_4, x_5 los tiempos de inactividad de cada puesto de montaje el problema puede plantearse en la forma siguiente:

$$Min \quad z = \quad x_3 + x_4 + x_5 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 432 \\ & 5x_1 + 5x_2 + x_4 = 412.8 \\ & 4x_1 + 6x_2 + x_5 = 422.4 \\ & x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad \begin{array}{c} x_1, x_2 \geq 0 \\ y \ \ enteras \end{array} \end{array}$$

b) Se sustituye en el objetivo x_3, x_4 y x_5 por las expresiones que resultan de despejar estas variables de las restricciones en que aparecen:

$$x_3 + x_4 + x_5 =$$

$$= 432 - (6x_1 + 4x_2) + 412.8 - (5x_1 + 5x_2) + 422.4 - (4x_1 + 6x_2) =$$

$$= 1267.2 - 15x_1 - 15x_2.$$

Es equivalente a maximizar: $15x_1 + 15x_2$

Multiplicamos por 10 las dos últimas ecuaciones para eliminar decimales y llamamos

$$h_1 = 10x_3, \quad h_2 = 10x_4, \quad h_3 = 10x_5$$

	15	15	0	0	0	
	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	
h_1	$\boxed{6}$	4	1	0	0	432
h_2	50	50	0	1	0	4128
h_3	40	60	0	0	1	4224
	-15	-15	0	0	0	

	15	15	0	0	0	
	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	72
h_2	0	$\boxed{\frac{50}{3}}$	$-\frac{25}{3}$	1	0	528
h_3	0	$\frac{100}{3}$	$-\frac{20}{3}$	0	1	1344
	0	-5	$\frac{5}{2}$	0	0	

	15	15	0	0	0	
	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{25}$	0	$\frac{1272}{25} = 50.88$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{50}$	0	$\frac{792}{25} = 31.68$
h_3	0	0	10	-2	1	288
	0	0	0	$\frac{03}{10}$	0	

El problema relajado puede tener más de una solución mínima con valor para $x_3 + x_4 + x_5 = 28.8$.

La primera solución es: $x_1 = 50.88$, $x_2 = 31.68$ y la segunda solución es: $x_1 = 36.48$, $x_2 = 46.08$.

Usamos la primera ecuación para obtener un corte:

$$-\frac{1}{2}h_1 - \frac{24}{25}h_2 + \frac{22}{25} \leq 0$$

Añadiendo esta restricción a las primitivas se obtiene, tras incorporar una nueva variable de holgura, la tabla:

	15	15	0	0	0		
	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{25}$	0	0	$\frac{1272}{25} = 50.88$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{50}$	0	0	$\frac{792}{25} = 31.68$
h_3	0	0	10	-2	1	0	288
h_4	0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{24}{25}$	0	1	$-\frac{22}{25}$
	0	0	0	$\frac{3}{10}$	0		

Usando el método dual del simplex se obtiene la tabla:

	15	15	0	0	0		
	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	
x_1	1	0	0	-1	0	1	50
x_2	0	1	0	$\frac{51}{50}$	0	-1	$\frac{814}{25}$
h_3	0	0	0	$-\frac{106}{5}$	1	20	$\frac{1352}{5}$
h_4	0	0	1	$\frac{48}{25}$	0	-2	$\frac{44}{25}$
	0	0	0	$\frac{3}{10}$	0		

Como la tabla es óptima ya tenemos la solución que corresponde a este corte, pero aún no tenemos la solución óptima porque x_2 no toma valor entero. La solución final del problema de programación entera es $x_1 = 52,\ x_2 = 30$.

Y por tanto la empresa deberá fabricar 52 componentes tipo A y 30 componentes tipo B para minimizar el tiempo total de inactividad de la línea de montaje.

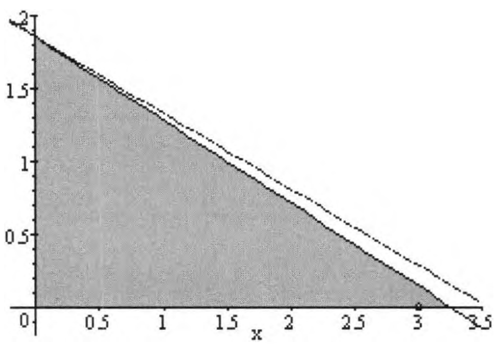
Ejercicio 70 *Comprobar que redondear la solución del problema relajado no nos da siempre una solución para el problema de programación entera usando el siguiente contraejemplo:*

$$\max \quad z = 11x_1 + 21x_2,$$

$$s.a: \quad 4x_1 + 7x_2 \leq 13,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,\ x_1, x_2\ enteros.$$

La región factible del problema viene representada en el gráfico siguiente. La línea de trazos discontinuos representa la función objetivo:



Resolviendo el problema relajado se obtiene la solución siguiente:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 13/7 \ \text{ con } \ z = 39.$$

La solución por redondeo sería (0,2) que no es factible. Si consideramos la aproximación por defecto $(0,1)$ obtenemos $z = 21$ que no es óptima ya que, como puede comprobarse fácilmente dada la sencillez del problema, la solución óptima es $(3,0)$ con valor para $z = 33$.

Ejercicio 71 *Una compañia fabrica dos tipos de radios A y B. La radio A puede fabricarse a razón de 60 por día y la B a razón de 75 por día. Cada unidad de A emplea 10 piezas de un cierto componente y cada unidad de B emplea 8. El número total de piezas disponibles de este componente es 800. El beneficio obtenido con el modelo A es de 30 dólares y con el modelo B de 20. ¿Cuántas radios se deberían hacer de cada modelo, para maximizar el beneficio diario?*

El problema se puede modelar así:

$$Max \quad z = \quad 30x_1 + 20x_2 \qquad s.a: \begin{array}{l} 10x_1 + 8x_2 \leq 800 \\ x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 75 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array}$$

La tabla del simplex es:

	30	20	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	10	8	1	0	0	800
x_4	1	0	0	1	0	60
x_5	0	1	0	0	1	75
	−30	−20	0	0	0	

La solución del problema relajado es $x_1 = 60$, $x_2 = 25$ que como es entera es también solución del problema de Programación Entera. Por tanto han de fabricarse 60 radios del modelo A y 25 del modelo B.

Ejercicio 72 *Dado el problema de Programación lineal entera*

$$Max \quad z = 8x_1 + 5x_2$$

$$sa: \begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 & \leq 45 \\ x_1, \ x_2 \geq 0, & x_1, \ x_2 \in Z \end{cases}$$

a) Resolver el problema usando el algoritmo de corte en la segunda restricción.

b) Halla la ecuación del corte en función de x_1, x_2. Hacer la representación gráfica del corte.

a)

Resolvemos el problema relajado por el método del simplex. La tabla óptima es:

	x_1	x_2	h_1	h_2	
x_2	0	1	2.25	−0.25	2.25
x_1	1	0	−1.25	0.25	3.75
	0	0	1.25	0.75	$z = 41.25$

Para aplicar el algoritmo de Gomory seleccionamos un contraste en el que la variable básica tome un valor fraccionario. Tomando la segunda restricción:

$$x_1 - 1.25h_1 + 0.25h_2 = 3.75 \Longrightarrow x_1 - (2 - 0.75)h_1 + (0 + 0.25)h_2 = 3 + 0.75$$

Separando los términos con parte no entera tenemos:

$$x_1 - 2h_1 - 3 = 0.75 - 0.75h_1 - 0.25h_2$$

Por tanto se obtiene el **corte** de la región factible:

$$0.75 - 0.75h_1 - 0.25h_2 \leq 0.$$

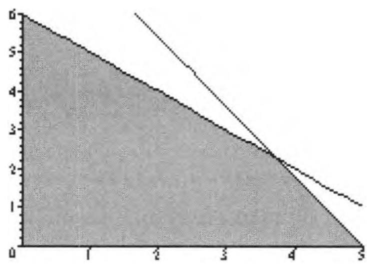
Ahora hay que resolver el problema que resulta de añadir el corte a las restricciones iniciales aplicando el algoritmo dual del simplex.

	x_1	x_2	h_1	h_2	s_3	
x_2	0	1	2.25	−0.25	0	2.25
x_1	1	0	−1.25	0.25	0	3.75
s_3	0	0	−0.75*	−0.25	1	−0.75
	0	0	1.25	0.75	0	$z = 41.25$

La solución del problema entero es $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 40$.

b)

La región factible del problema relajado viene representada en la siguiente figura:

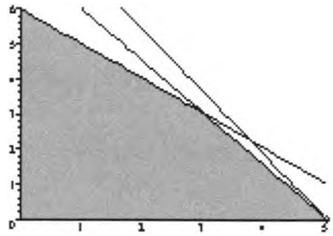


La ecuación del corte respecto de x_1, x_2 se halla sustituyendo las expresiones de las variables de holgura obtenidas a partir de las restricciones del problema:

$$0.75 - 0.75h_1 - 0.25h_2 = 0.75 - 0.75(6 - x_1 - x_2) -$$
$$-0.25\,(45 - 9x_1 - 5x_2) = -15 + 3x_1 + 2x_2 \leq 0.$$

Por lo tanto la restricción del corte en función de las variables primitivas es $3x_1 + 2x_2 \leq 15$.

Añadiendo esta restricción en la gráfica se obtiene la nueva región factible (ver siguiente figura), más reducida que la anterior, con la solución entera (5,0).



7.2 Ejercicios Propuestos

1. Usar el algoritmo de Ramificación para resolver el siguiente problema de Programación Entera Mixta

$$Max \quad z = \quad 3x_1 + x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 17 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad x_2 \quad entera \end{array}$$

2. Realizar una iteración del algoritmo de corte en el problema de P.L. siguiente:

$$Max \quad z = \quad 4x_1 + 18x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{array}$$

3. Resolver por el algoritmo de ramificación y acotación el P.L.

$$Max \quad z = \quad 3x_1 + 4x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{array}$$

4. Resolver por el algoritmo de ramificación y acotación

$$Max \quad z = \quad 7x_1 + 3x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 48 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{array}$$

5. Una universidad desea adquirir 110 ordenadores. Para ello contacta con tres vendedores. El primero vende cada ordenador a 100000 pesetas más un cobro único de un millón de pesetas y dispone de 50 ordenadores. El segundo vende cada ordenador a 70000 pesetas y un cobro único de ochocientas mil pesetas, disponiendo de 90 ordenadores. El último vende cada uno a 50000, cargando por una sola vez una cantidad de un millón doscientas mil pesetas y dispone de 40 ordenadores. Plantear el problema de programación entera que responderá a la siguiente cuestión: ¿Cuántos ordenadores debe comprar la universidad a cada vendedor para minimizar la inversión?

6. Realizar una iteración del algoritmo de corte en el problema de P.L. siguiente:

$$Max \quad z = \quad 7x_1 + 9x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteros} \end{array}$$

7. Resolver mediante el algoritmo de Ramificación el problema:

$$Max \quad z = \quad x_1 + x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad y \quad enteros \end{array}$$

8. Dado el problema de programación lineal entera

$$Max \quad z = \quad x_1 + 7x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad y \quad enteros \end{array}$$

Se pide:

(a) Resolver el problema relajado (se recomienda usar el método dual del simplex)

(b) Resolver el problema de programación lineal entera por el algoritmo de corte.

9. Dado el problema de P.L:

$$Max \quad z = \quad 2x_1 + 3x_2 \qquad \begin{array}{rl} s.a: & 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ & 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad y \quad enteros \end{array}$$

Se pide:

(a) Ramificar con respecto a la variable x_1, especificando los dos problemas en que se subdivide.

(b) Representar gráficamente la región factible de cada uno de estos subproblemas.

(c) Resolver uno cualquiera de estos dos problemas, indicando si es un problema terminal y porqué.

10. Una empresa desea contratar personas para realizar seis trabajos de distinto tipo para el que se precisa personal cualificado. Puede contratar a alguna de las seis personas que están en la tabla siguiente. El 1 de las celdas quiere decir que la persona de esa fila puede hacer el trabajo indicado en la columna.

Además hay que tener en cuenta que las personas 2 y 3 no pueden contratarse al mismo tiempo.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
P1	1	1		1		
P2			1		1	1
P3			1		1	
P4	1					1
P5		1				
P6				1	1	

Formula un problema de programación entera que permita a la empresa seleccionar el menor número posible de personas para realizar los seis trabajos.

11. Dado el problema de programación lineal entera

$$\min\ 14x_1 - 18x_2 \qquad s.a. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 6 \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \\ x_1,\ x_2\ \ge 0\ y\ enteras \end{cases}$$

Resolverlo por el algoritmo de corte.

12. Usa el algoritmo de enumeración para resolver el siguiente problema de P.L. binaria:

$$\max\ -5x_1 + 6x2 + 7x_3 \qquad s.a. \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \le 5 \\ x_1,\ x_2\ ,x_3 \in \{0,1\} \end{cases}$$

7.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

   La solución óptima es $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ con $z = 6$.

2. **Solución:**

   El problema relajado tiene la solución (4.5, 3.5) con $z = 81$. El problema entero tiene la solución (4, 3) con $z = 70$.

3. **Solución:**

   $x_1 = 2,\ x_2 = 8,\ z = 38.$

4. **Solución:**

   $x_1 = 6,\ x_2 = 0,\ z = 42.$

5. **Solución:**

   Compra 70 ordenadores al 2^oy 40 al 3^o. El importe es de 8 900 000 ptas.

6. **Solución**

   $x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ z = 55.$

7. **Solución**

   $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ z = 2.$

8. **Solución**

   a) La solución del problema relajado es $x_1 = 0.5,\ x_2 = 1.25,\ z = 9.25.$

   b) La solución del problema entero es $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ z = 8.$

9. **Solución**

   a) Los dos problemas en los que se subdivide ramificando con respecto a x_1 son:

$$Max \quad z = \quad 2x_1 + 3x_2 \qquad s.a: \begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad y \quad enteros \end{array}$$

   y

$$Max \quad z = \quad 2x_1 + 3x_2 \qquad s.a: \begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad y \quad enteros \end{array}$$

   b) Ninguno de estos dos subproblemas es terminal, ya que ambos tienen una variable con solución no enteras.

10. **Solución**

    El planteamiento puede ser:

$$\begin{array}{lll} & \min & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \\ Trabajo\, 1 & & p_1 + p_4 \geq 1 \\ Trabajo\, 2 & & p_1 + p_5 \geq 1 \\ Trabajo\, 3 & & p_2 + p_3 \geq 1 \\ Trabajo\, 4 & & p_1 + p_6 \geq 1 \\ Trabajo\, 5 & & p_2 + p_3 + p_6 \geq 1 \\ Trabajo\, 6 & & p_2 + p_4 \geq 1 \\ Incompatibilidad\ de\ p_2\ y\ p_3 & & p_2 + p_3 \leq 1 \\ & & p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \quad binarias \end{array}$$

    Las personas seleccionadas serán las de subíndice i tal que $p_i = 1$.

11. **Solución**

    $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ z = -18.$

12. **Solución**

    $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ z = 7.$

Ejercicios tema 8

Teoría de colas

8.1 Ejercicios Resueltos

Ejercicio 73 *El intervalo de tiempo entre llegadas de dos autobuses urbanos sigue una distribución exponencial de media 6 minutos.*

a)¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 4 autobuses en los próximos 12 minutos?

b)¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 4 autobuses en los próximos 12 minutos?

c)¿Cuál es la probabilidad de que no llegue ningún autobús en los próximos 12 minutos?

d) Acaba de llegar un autobús. ¿ Cuál es el probabilidad de que el siguiente autobús llegue antes de 12 minutos?

a)

$\lambda = \frac{1}{6}$. La distribución de llegada de autobuses en 12 minutos es una Poisson de parámetro $\lambda t = \frac{1}{6} \times 12 = 2$.

$P(N_{12} = 4) = \frac{2^4 \exp(-2)}{4!} = 9.0224 \times 10^{-2}$

b) La probabilidad de que lleguen al menos 4 autobuses en los próximos 12 minutos es:

$$P(N_{12} \geq 4) = \frac{2^4 \exp(-2)}{4!} = 1 - P(N_{12} < 4) =$$

$$= 1 - \left(\frac{2^0 \exp(-2)}{0!} + \frac{2^1 \exp(-2)}{1!} + \frac{2^2 \exp(-2)}{2!} + \frac{2^3 \exp(-2)}{3!} \right) = 0.14288.$$

c) La probabilidad de que no llegue ningún autobús en los próximos 12 minutos es:

$P(N_{12}=0)=\frac{2^0\exp(-2)}{0!}=0.135\,34.$

d) La probabilidad de que el siguiente autobús llegue antes de 12 minutos es:

$\int_0^{12}\frac{1}{6}e^{-\frac{1}{6}t}dt=0.864\,66.$

Ejercicio 74 *Un surtidor de una gasolinera dispensa diesel para vehículos industriales. La razón de llegada es de 5 vehículos por hora y la de servicio 7 por hora. Suponiendo llegadas y servicios exponenciales, calcular:*

a) La probabilidad de que no haya ningún vehículo en el surtidor.

b) Probabilidad de que haya un vehículo repostando y otros dos esperando en cola.

c) Probabilidad de que haya más de dos vehículos en cola

d) Tiempo medio de estancia en la gasolinera.

a) La probabilidad de que no haya nigún vehículo es:

$P_0=1-\rho=1-\frac{5}{7}=0.285\,71.$

b) La probabilidad de que haya un vehículo repostando y dos en cola es:

$P_3=\rho^3(1-\rho)=\left(\frac{5}{7}\right)^3\left(1-\frac{5}{7}\right)=0.104\,12.$

c) $1-(P_0+P_1+P_2+P_3)=$

$=1-\left(\left(1-\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{5}{7}\right)\left(1-\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{5}{7}\right)^2\left(1-\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{5}{7}\right)^3\left(1-\frac{5}{7}\right)\right)=0.260\,31$

d) El tiempo medio de estancia es:

$w=\frac{L}{\lambda}=\frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda}=\frac{\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}}}{5}=0.5\ horas$

Ejercicio 75 *Un sistema de colas consta de un servidor que tarda un promedio de 15 minutos en servir a cada cliente. La distribución del intervalo de tiempo entre las llegadas de los clientes a la cola es exponencial con media 15 minutos. La capacidad máxima del sistema es de 4 elementos.*

a) ¿Cuántos clientes, por término medio, consiguen entrar en el sistema cada hora?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor esté ocupado?

c) ¿Cuál es la longitud media de la cola?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que intenten entrar en el sistema exactamente 4 clientes en un intervalo de 15 minutos?

a) La razón de llegada es igual que la de servicio: $\lambda=\mu$

$P_c = \frac{1}{c+1}, \qquad \lambda_R = \lambda\left((1 - P_c\right) = 4\left(1 - \frac{1}{4+1}\right) = 3.2\,\text{clientes.}$

b) $\quad 1 - P_0 = 1 - \frac{1}{c+1} = 1 - \frac{1}{4+1} = 0.8$

c) $\quad L = \frac{c}{2}, \qquad L_s = 1 - P_0,$

$L_q = L - L_S = \frac{c}{2} - (1 - P_0) = \frac{4}{2} - 0.8 = 1.2$

d) $\quad P(N_t = n) = \dfrac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, ...$

$$P(N_t = 4) = \frac{(4 \times 0.25)^4 \exp(-4 \times 0.25)}{4!} = 0.015328$$

Ejercicio 76 *El laboratorio de un Hospital tiene dos enfermeros para realizar distintos tipos de análisis. Los enfermos llegan al laboratorio a razón de 20 por hora. El tiempo empleado en realizar cada análisis es de 4 minutos por promedio. Se pide:*

a) Número medio de enfermos esperando en la sala de espera.

b) Número medio de enfermos realizándose los análisis.

c) Porcentaje de tiempo en que al menos uno de los enfermeros está sin realizar ningún análisis.

d) Tiempo medio que cada enfermo pasa en el laboratorio.

Los datos del problema son los siguientes:

$\lambda = 20,\ \mu = \frac{60}{4} = 15.0,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{15} = 1.33333$

a) El número medio de enfermos en cola es:

$L_q = \frac{\rho^3}{4-\rho^2} = \frac{1.33333^3}{4-1.33333^2} = 1.06665.$

b) El número de enfermos realizándose los análisis es:

$L_s = \frac{\lambda}{\mu} = 1.33333.$

c) El porcentaje de tiempo es la probabilidad de que haya uno o ningún enfermo realizándose los análisis multiplicado por 100. Como la probabilidad es:

$P_0 + P_1 = \frac{2-\rho}{2+\rho} + \frac{1}{2}\rho\frac{2-\rho}{2+\rho} = \frac{2-\frac{20}{15}}{2+\frac{20}{15}} + \frac{1}{2}\frac{20}{15}\frac{2-\frac{20}{15}}{2+\frac{20}{15}} = \frac{1}{3} = 0.333333$

Entonces el porcentaje pedido es 33.3%.

d) El tiempo medio total que cada enfermo pasa en el laboratorio es:

$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{L_q+L_s}{\lambda} = \frac{1.06665+1.33333}{20} = 0.12\text{ horas } = 0.12 \times 60 = 7.2\text{ minutos.}$

Ejercicio 77 *En un aparcamiento de una tienda se dispone de 10 lugares para aparcar. Allí los clientes estacionan los coches mientras son atendidos en la tienda. Si un cliente no encuentra lugar para aparcar, se va a otra tienda. El tiempo de servicio por cliente sigue una distribución exponencial con una media de 10 minutos por cliente. El número de vehículos por hora que llega al aparcamiento sigue una distribución de Poisson de media 10. Calcular:*

a) El número esperado de espacios vacíos en el parking.

b) La probabilidad de que un coche no encuentre lugar para aparcar.

c) La razón real de llegadas de clientes a la tienda.

a) $\quad 10 - L = 10 - \frac{\frac{5}{3}\left[1-11\left(\frac{5}{3}\right)^{10}+10\left(\frac{5}{3}\right)^{11}\right]}{\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^{11}\right)\left(1-\frac{5}{3}\right)} = 8.54.$

b) $\quad \mathrm{P}_{10} = \left(\frac{5}{3}\right)^{10} \frac{1-\frac{5}{3}}{1-\left(\frac{5}{3}\right)^{11}} = 0.40.$

c) $\quad 10 \times (1 - 0.40) = 6$ clientes por hora.

Ejercicio 78 *Un ATS se dedica a poner inyecciones y pequeñas curas en un pequeño local. Sólo pueden entrar en él simultáneamente 4 personas como máximo. Los pacientes llegan a razón de 20 por hora pero si no encuentran sitio en el local se desplazan a una Clínica cercana. Cada paciente tarda en ser atendido un promedio de 6 minutos.*

a) ¿ Cuántas personas, por término medio, están dentro del local sin ser atendidos todavía?

b) Por promedio, ¿cuántos pacientes son atendidos por hora?

c) Si una persona acaba de entrar en el local, ¿cuánto tiempo puede esperarse que tarde en salir?

d) ¿Cuál es la ganancia media diaria de este ATS si cobra a cada cliente un promedio de 300 pesetas, y la jornada es de 8 horas?

a)

$\rho = \frac{20}{10},\ c = 4$

$L = \frac{\rho-(c+1)\,\rho^{c+1}+c\rho^{c+2}}{(\rho-1)(\rho^{c+1}-1)} = \frac{2-5\times 2^5+4\times 2^6}{1(2^5-1)} = 3.\,161\,3$

$P_0 = \frac{(\rho-1)}{(\rho^{c+1}-1)} = \frac{(2-1)}{(2^5-1)} = 3.\,225\,8 \times 10^{-2}$

$L_q = L - Ls = 3.\,161\,3 - (1 - 3.\,225\,8 \times 10^{-2}) = 2.\,2$ personas sin ser atendidas.

b)

El promedio de clientes atendidos por hora es igual al número promedio de clientes que entran en la consulta del ATS, que es:

$\lambda_R = \lambda(1 - P_4) = 20(1 - P_4)$

$P_4 = \frac{(\rho-1)}{(\rho^{c+1}-1)}\rho^4 = \frac{(2-1)}{(2^5-1)}2^4 = 0.516\,13;$

Y por tanto, el número medio de clientes es:

$20(1 - P_4) = 20(1 - 0.516\,13) = 9.677\,4.$

c) El tiempo esperado que tarda en salir una persona es:

$W = \frac{L}{20(1-P_4)} = \frac{3.161\,3}{9.677\,4} = 0.326\,67\ horas.$

d) La ganancia media diaria es:

$300 \times 8 \times 9.677\,4 = 23226$ pesetas.

Ejercicio 79 *Una gasolinera dispone de tres lugares para que esperen los coches mientras que echan gasolina en el deposito o esperan para echarla. Los clientes que no encuentran sitio en estos lugares, esperan en el arcén de la carretera hasta que pueden entrar. Los clientes llegan a repostar gasolina a razón de 10 por hora y tardan en repostar un término medio de 5 minutos.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche pueda entrar en alguno de los tres lugares que hay dentro de la gasolinera? ¿Cuál es la probabilidad de que un coche tenga que esperar en el arcén

b) ¿Cuántos coches habrá en la cola por término medio?

c) Por promedio ¿cuánto tiene que esperar en total cada cliente que llega?

d)¿De cuántos lugares en total tendría que disponer la gasolinera para que al menos el 80% de los vehículos que lleguen no esperen en el arcén?

a) $P_0 + P_1 + P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.42$. Por tanto $1 - 0.42 = 0.58$ es la probabilidad de tener que esperar en el arcén.

b) $L_q = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}} = 4.17$ coches en la cola.

c) $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$ horas de espera cada cliente.

d) $P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_k = \sum_{j=o}^{k} \left(1 - \frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^j = \frac{1}{6} \times \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} - 1}{\frac{5}{6} - 1} \geq 0.8.$

De aquí resulta $K \geq 7.81$. Por lo tanto tendrá que disponer al menos de 8 lugares en los que los vehículos esperarán a repostar gasolina dentro de la gasolinera.

8.2 Ejercicios Propuestos

1. La única cajera de un supermercado cobra las compras de los clientes en un tiempo medio de 2 minutos. Los clientes llegan con una tasa media de 20 clientes a la hora. Si se supone que las llegadas siguen un proceso de Poisson y los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial, determinar:
   (a) Porcentaje de tiempo en el que la cajera está ociosa.
   (b) Tiempo medio de estancia de los clientes en cola.
   (c) Probabilidad de que un cliente tenga que esperar en cola.

2. Una tienda de menaje de cocina es atendida por una sola persona. A los clientes se les atiende en el orden de llegada. Debido al prestigio de la tienda, los clientes que llegan están dispuestos a esperar el tiempo que haga falta. El tiempo medio empleado en atender a un cliente es de 4 minutos. Determinar:
   (a) La probabilidad de que se forme cola.
   (b) La longitud media de la línea de espera.
   (c) El tiempo medio de espera en cola por cliente.

3. Los clientes llegan a una peluquería con una tasa promedio de 5 por hora. Hay un peluquero y 4 sillas para los clientes que llegan cuando el peluquero está ocupado. El número total de clientes dentro de la peluquería es como máximo 5, de modo que a los clientes que llegan cuando la peluquería está llena se les niega la entrada. El peluquero es capaz de terminar un peinado como término medio cada 20 minutos. Determinar:
   (a) Probabilidad de que en la siguiente hora pretendan acceder a la peluquería (consiguiéndolo o no) 7 personas.
   (b) Probabilidad de que la peluquería esté llena.
   (c) Número medio de clientes dentro de la peluquería.
   (d) Porcentaje de tiempo en que el peluquero está ocioso.

4. En un taller caben 4 máquinas que son reparadas por dos mecánicos. Las máquinas llegan al taller a razón de 3 por hora y cada mecánico tarda por promedio 25 minutos en arreglarlas. Si el taller está completo no se admiten más reparaciones. Se pide:
   (a) Si una persona tiene que llevar una máquina a arreglar, ¿cuál es la probabilidad de que le atiendan?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que le atiendan nada más llegar?
   (c) Número medio de máquinas en el taller.

5. El departamento de una Clínica canina tiene tres veterinarios para vacunar a los perros. Éstos llegan a razón de 12 por hora. El tiempo empleado en vacunar un perro es por promedio de 2 minutos. Se pide:

(a) Número medio de perros esperando ser vacunados.

(b) Número medio de perros vacunándose.

(c) Porcentaje de tiempo en que un determinado veterinario está sin vacunar ningún perro.

(d) Tiempo medio de espera dentro de la clínica.

6. Considerando un sistema de colas M/M/1 donde el servidor tiene razón de servicio 3μ y otro sistema M/M/3 donde cada servidor tiene razón de servicio μ, ¿cuál es más eficiente en cuanto al tiempo promedio que los clientes han de esperar en el sistema?

7. Por promedio llegan a un banco 100 clientes por hora. Cada cajero tarda dos minutos por promedio en atender a un cliente. Por lo general hay 4 cajeros atendiendo a los posibles clientes. Calcula el número medio de clientes esperando en el banco en los supuestos siguientes:

   (a) Si no se permite que los clientes se cambien de cola.

   (b) Si los clientes esperan en una única cola, hasta que uno de los cajeros queda libre.

8. En un aeropuerto el número de personas que accede por minuto es 5. Las revisiones de equipaje se realizan a razón de 6 por minuto. Responder a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero no tenga que esperar antes de que le revisen el equipaje?

   (b) Por termino medio, ¿cuántos pasajeros esperan en cola?

   (c) Por termino medio, ¿cuánto tiempo tienen que esperar los pasajeros en la cola antes de que le revisen el equipaje?

   (d) Si el coste de tener un pasajero esperando en cola por una hora es de 10 dólares, y el coste de crear y mantener cada punto de revisión es de 1 millón por 10 años, calcular cuantos puntos de revisión deben ponerse para minimizar el gasto, suponiendo que el aeropuerto permanece abierto 16 horas diarias.

9. Una gasolinera dispone de dos surtidores. El número de clientes que llega para repostar siguen una distribución de Poisson con un promedio de 20 vehículos por hora. Cada surtidor puede atender a un promedio de 30 vehículos por hora. Calcular:

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya vehículos esperando sin repostar?

   (b) ¿Cuántos vehículos están esperando o repostando por promedio?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 2 vehículos en cola?

   (d) ¿Cuál es la probabilidad de no tener que guardar cola?

10. En una agencia de viajes se presentan posibles clientes a razón de 10 cada hora y son atendidos por empleados que invierten en resolver las consultas una media de 15 minutos. Se comprueba que tanto las llegadas como las salidas siguen una distribución de Poisson. Se quiere determinar cuál es el número mínimo de empleados que han de atender a los clientes para que la probabilidad de atenderlos nada más llegar sea superior al 8%.

8.3 Soluciones de los Ejercicios Propuestos

1. **Solución:**

   a) 0.3333 b) 1.2 minutos c) 0.6666.

2. **Solución:**

   a) 4/9 b) 4/3 c) 2/15.

3. **Solución:**

   a) 0.1044 b) 0.41958 c) 3.7936 d) 3.26%.

4. **Solución:**

   a) 0.7025 b) 0.1218 c) 2.4369.

5. **Solución:**

   a) 0.001 b) 0.4 c) 0.8667 d) 2.006 minutos.

6. **Solución:**

   La diferencia entre los elementos en el sistema para tres servidores y para un solo servidor es $2\,(3+2\rho)\frac{\rho^2}{(6+4\rho+\rho^2)(-3+\rho)}$ que es negativa si $\rho < 3$. Esta condición se cumple si el estado de ambas colas es estacionario. Por lo tanto es mas eficiente disponer de tres servidores.

7. **Solución:**

   a) 20 (Suponiendo que accedan a cada cola 25 clientes) b) 6.62 clientes.

8. **Solución:**

   a) 0.83333 b) 4.1667 c) 1 minuto d) Dos puntos de revisión.

9. **Solución:**

   a) 0.55556 b) 2 vehículos c) 0.7037 d) 0.33333.

10. **Solución:**

    La agencia tendrá que disponer de cinco empleados.

Ejercicios tema 9

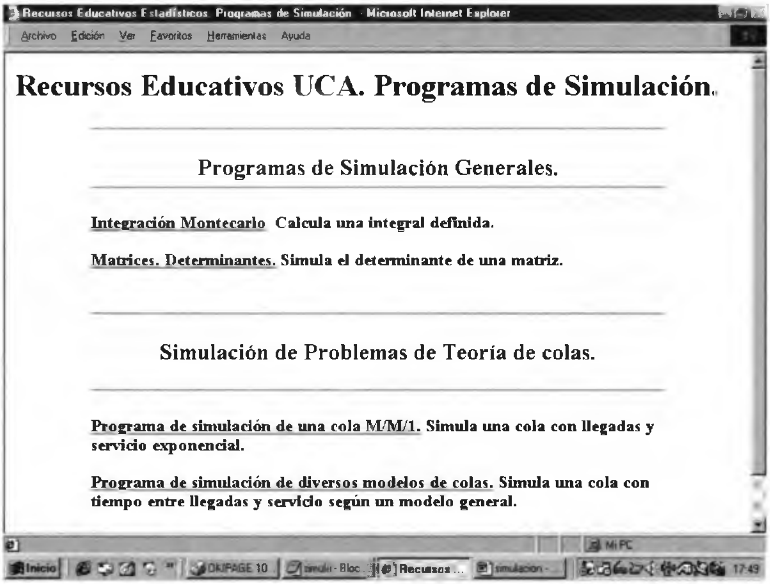
Introducción a la Simulación

9.1 Ejercicios resueltos

Entendemos que los ejercicios más adecuados para este tema son la realización de programas de simulación similares a los ejemplos tratados en el tema 9. Los ejemplos de este capítulo de Simulación pueden encontrarse en la página Web con la dirección:

http://www.uca.es/dept/estadistica_io/recursos/

Los enlaces de acceso están indicados en la siguiente figura.



9.2 Ejercicios Propuestos

1. Generar 100 valores con el método de generación de números aleatorios de algún paquete estadístico y comprobar la calidad del algoritmo usando esta muestra:

    (a) Por medio del test Chi-cuadrado para comprobar el ajuste de la muestra a la distribución U[0,1].

    (b) Usando las funciones de autocorrelación muestral para comprobar la independencia de los valores muestrales.

2. Construir un generador de números aleatorios usando el método congruencial, basado en la relación

$$X_{i+1} \equiv (aX_i + c)\ (mod\ \ m)$$

que se ha descrito en la sección 9.5.3 del tema de Simulación. Tomad los valores siguientes para las constantes:

$$c = 7,\ a = 5,\ m = 2^{16}.$$

¿Cuántos números distintos genera este algoritmo?

3. Usando el algoritmo anterior genera valores procedentes de una distribución U[3,6].

4. Realizar una simulación manual con 4 pruebas de la ganancia obtenida con 100 euros en los siguientes juegos con tres dados:

    (a) Si los tres números son pares se duplica la cantidad apostada, en caso contrario se pierde el 30%.

    (b) Si la suma de las puntuaciones es menor que 123 se duplica la apuesta. En caso contrario se pierde el 10%.

    (c) Si los tres números son consecutivos se gana un 20%. En caso contrario no se pierde nada.

    (d) Explica cómo se haría un programa de simulación que te permita decidir cuál de los tres juegos es preferible jugar.

5. Simula con el ordenador la tirada de tres dados.

6. Implementa un algoritmo que genere valores controlados por una distribución exponencial.

7. Implementa un algoritmo que genere valores controlados por una distribución binomial.

8. Teniendo en cuenta que la suma de variables exponenciales es una variable de Erlang, implementar un algoritmo para generar valores que se rijan por una distribución de Erlang.

9. Construir un diagrama de flujo de un algoritmo que sirva para simular una cola M/M/1/c.

10. Realizar evaluaciones de la función $f(x) = x^3 \sin x - \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 4]$ generando los valores de x uniformemente distribuidos en este intervalo. Utiliza estas evaluaciones para localizar de una forma aproximada el máximo de esta función.

11. Implementar un algoritmo que permita hallar la vida media de un sistema formado por dos componentes en paralelo si cada uno de estos componentes tiene una duración que se controla con distribuciones tipo Erlang.

12. Un proyecto se compone de las actividades a, b, c, d, e, f, g, h, i, j y k. Las relaciones de precedencia entre las actividades son:

$$a < b, \quad b < c, \quad c < d, \quad b < e, \quad d < f, \quad e < g,$$
$$f, g < h, \quad e < i, \quad i < j, \quad h, j < k.$$

Suponemos que la duración de estas actividades (en semanas) sigue una distribución uniforme con los parámetros indicados en la siguiente tabla

Actividad	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
extremo inferior	1	1	3	4	2	1	0.5	5	2	1	1
extremo superior	4	3	10	11	6	3	2	9	4	2	2

(a) Simular la ejecución de este proyecto y calcular su duración por medio del método C.P.M.

(b) Realizando la simulación un número elevado de veces estimar el valor medio del tiempo de ejecución total del proyecto.

(c) Estimar la probabilidad de que el proyecto se realice en un tiempo inferior a 30 días.

Parte III

PRÁCTICAS CON ORDENADOR

Práctica 1

Programación lineal I

1.1 Problema de programación lineal con LINGO

Problema 1 *Encontrar la solución óptima del siguiente problema de programación lineal*

$$\max\ 5x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 15 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se introducen sucesivamente las siguientes líneas:

Model:

max=5*x1+3*x2+x3;

x1+x2+3*x3<6;

5*x1+3*x2+6*x3<15;

end

Si el problema es de minimización se cambia **max** por **min.**

Si se comete algún error se puede corregir con **edit.** Este comando edita en pantalla el problema que está en curso. Con **escape** salimos del editor. Las correcciones se mantienen mientras no salgamos del programa ni carguemos otro fichero.

Una vez que se han introducido los datos se usa el comando **go**, obteniéndose un resultado como el que sigue:

```
 go
Rows=      3 Vars=      3 No. integer vars=      0  ( all are linear)
Nonzeros=     11 Constraint nonz=     6(     2 are +- 1) Density=0.917
Smallest and largest elements in absolute value=    1.00000         15.000
No. < :   2 No. =:   0 No. > :   0, Obj=MAX, GUBs <=   1
Single cols=    0

Optimal solution found at step:         1
Objective value:                    15.00000

                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      X1    0.0000000E+00        0.0000000E+0
                                      X2     5.000000            0.0000000E+0
                                      X3    0.0000000E+00         5.000000

                                     Row   Slack or Surplus       Dual Price
                                       1     15.00000             1.000000
                                       2     1.000000            0.0000000E+0
                                       3    0.0000000E+00         1.000000
```

Esta salida nos da el valor de las variables explicativas (**Value**) o de holgura (**Slack or Surplus**) que nos suministra el óptimo para la función objetivo. En la columna siguiente aparece el coste reducido de cada una de las variables.

El coste reducido es la cantidad en que tienen que aumentar los costes de la variable correspondiente en la función objetivo para que esta variable entre en la base. Observa lo que ocurre si se incrementa c_3 en 5 unidades. También puede interpretarse como la penalización en el valor de la función objetivo que supone introducir una unidad de esta variable en la solución (ver lo que ocurre añadiendo la restricción $x_3 = 1$ en el modelo).

El precio dual o precio sombra es lo que aumenta el valor de la función objetivo por cada unidad de aumento en el término independiente (recurso) de la ecuación correspondiente (obsérvese que el precio dual de la variable de holgura de la segunda restricción es 1. Si aumentamos en esa cantidad el término independiente de la segunda ecuación, la función objetivo también aumenta en 1. Por esto se llaman precios sombra ya que el aumento en una unidad del segundo recurso aumenta en esta cantidad la función objetivo, y por tanto es la cantidad máxima que nos merece la pena pagar por una unidad de este recurso.

Todo lo anterior es solamente válido dentro del rango de variación de los coeficientes que mantiene la base óptima. Este rango se calcula con el *Análisis de*

Sensibilidad, que como veremos posteriormente se realiza con el comando **Range.**

Para incluir algún comentario (renglones no ejecutables) se comienza con el signo " ! ",, a continuación incluimos el comentario, y se acaba con el signo " ; ". Los comentarios pueden usarse, por ejemplo, para introducir el enunciado de un problema, algunas notas sobre su ejecución o posibles interpretaciones de la solución. Si deseamos guardar el enunciado del problema anterior en un fichero, para usarlo en posteriores sesiones, usamos el comando **Save.** Cuando nos pide un nombre escribimos, por ejemplo, PRA1PRO1.

LINGO también nos indica si un problema es no acotado o no tiene solución.

Para ver un ejemplo de un problema no acotado vamos a calcular la solución del siguiente problema.

Problema 2

$$\max\ 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$$
$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ 6x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 \leq 10 \\ \quad x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Guardaremos el enunciado con el comando **Save**, usando el nombre PRA1PRO2

Para un problema sin solución factible podemos resolver el siguiente:

Problema 3

$$\max\ 5x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 15 \\ x_1 \geq 7 \\ \quad x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

que resulta del ***problema 1*** *añadiendo la restricción* $x_1 \geq 7$.

Para usar los datos del primer problema, que habíamos guardado previamente con **Save** en PRA1PRO1, usamos el comando **Take.** Nos aparecerá una lista de ficheros entre los que debe aparecer el que buscamos. Si no aparece buscarlo con **Av. Pág.** Lo seleccionamos usando las flechas de posición. Tras teclear **edit,** añadimos la última restricción. Salimos de este fichero con **escape** y hallamos la solución con **go.**

En el caso de que el problema tenga más de una solución Lingo no nos indica este hecho, limitándose a darnos una de estas soluciones óptimas. Por ejemplo en el **problema 1** otra solución óptima es (3, 0, 0). LINGO nos da únicamente la solución (0, 5, 0). Ambas soluciones toman en la función objetivo el valor 15.

1.2 Análisis de sensibilidad con LINGO

El análisis de sensibilidad se realiza usando el comando **range.** Este comando nos suministra la información siguiente:

- El cambio permitido en cada uno de los coeficientes de la función objetivo sin cambio en los valores óptimos de las variables de decisión.
- Cambios permitidos en los términos independientes de las restricciones (recursos) sin que afecten a la base óptima. No varían los valores de los precios duales ni los costes reducidos.

Hacemos el análisis de sensibilidad del problema 1, que guardamos con el nombre PRA1PRO1.

Problema 4 *Resuelve las cuestiones siguientes referentes al enunciado del problema 1, PRA1PRO1), cuyo contenido debe ser*

$$\max\ 5x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 15 \\ x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Indicar los cambios permitidos en los coeficientes de la función objetivo y en los términos independientes de las restricciones que conservan la base óptima en el problema de programación lineal*
2. *Si cambiamos c_2 por 7, sin resolver de nuevo el problema contesta las siguientes cuestiones: ¿Cambia la base? ¿Cambia la solución óptima? ¿Cuánto valdría la función objetivo?*
3. *Si el término b_2 cambia a 17, ¿cuál es el nuevo valor del objetivo?*

Para usar los datos que habíamos guardado previamente con **Save** usamos el comando **Take** nos aparecerá una lista de ficheros. Seleccionamos el fichero deseado. Para comprobar que se ha cargado podemos dar el comando **Look** y posteriormente **all.** Debemos ver en pantalla el enunciado de nuestro problema.

1. Para realizar el Análisis de Sensibilidad hallamos de nuevo la solución con **go** y posteriormente pulsamos **range**, obteniéndose el siguiente resultado:

```
: range

Ranges in which the basis is unchanged:

                              Objective Coefficient Ranges
                           Current        Allowable        Allowable
          Variable       Coefficient       Increase         Decrease
                X1         5.000000          0.0           INFINITY
                X2         3.000000        INFINITY           0.0
                X3         1.000000        5.000000        INFINITY

                                Righthand Side Ranges
               Row         Current        Allowable        Allowable
                             RHS           Increase         Decrease
                 2         6.000000        INFINITY        1.000000
                 3         15.00000        3.000000        15.00000
```

1. Esta pantalla nos da en primer lugar los cambios permitidos en los coeficientes de la función objetivo (costos) y en segundo lugar los cambios permitidos en los términos independientes de las restricciones (recursos), que mantienen inalterable la base óptima. Por ejemplo el coeficiente primero de la función objetivo (c_1) que es 5 puede variar en el intervalo $(-\infty, 5)$ sin que varíe la actual base óptima. El primer término independiente de las restricciones (b_1) que es 6 puede variar en el intervalo $(5, \infty)$

2. Según el análisis anterior c_2 puede crecer hasta infinito sin que cambie la base actual, así que no cambia la base. Si no cambia la base no cambiará la solución óptima, ya que ésta se calcula por la expresión:

$$x_B = B^{-1}b$$

   Sin embargo si cambiará la función objetivo, que en este caso tomará el valor $5x_1 + 7x_2 + x_3 = 5 \times 0 + 7 \times 5 + 0 = 35$.

3. Si el término b_2 cambia a 17 se mantiene la base actual ya que el incremento permitido para $b_2 = 15$ es 3. El precio sombra que corresponde a la segunda restricción es 1, así que la función objetivo aumenta en 1 por cada unidad que aumenta b_2. Por lo tanto el nuevo valor de la función objetivo será $15 + 2 = 17$.

1.3 Otros problemas

Problema 5 *Dado el problema de programación lineal siguiente:*

$$\max\ 5x_1 + 3x_2$$

$$s.a. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

1. *Hallar la solución óptima.*
2. *Valor óptimo de la función objetivo.*
3. *¿Qué restricciones están saturadas?*
4. *Intervalo de variación para $c_1 = 5$ y para $b_2 = 10$ que mantiene la base óptima.*

Solución: 1) $x_1 = 2, x_2 = 2,$ 2) 16 3) Las tres 4) (3,12); (4,10).

Problema 6 *Resolver el problema de programación lineal siguiente.*

$$\min -x_1 - x_2$$
$$s.a. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. *Hallar la solución óptima.*
2. *Valor óptimo de la función objetivo.*
3. *¿Cuáles son las variables básicas?*
4. *¿Es la solución única?*
5. *Indica el intervalo de variación de $c_1 = -1$ y $b_2 = 0$ que mantiene la base óptima.*
6. *Si cambiamos c_1 por 0.5, sin resolver de nuevo el problema contesta las siguientes cuestiones: ¿Cambia la base? ¿Cambia la solución óptima? ¿Cuánto valdría la función objetivo?*

Solución: 1) $x_1 = 0.5,\ x_2 = 0.5$ 2) -1 3) x_1, x_2 4) No 5) (-1,1); (-1,1) 6) No cambia la base, no cambia la solución óptima, pero cambia el valor de la función objetivo a $-0.5x_1 - x_2 = -0.5 \times 0.5 - 0.5 = -0.75$.

Problema 7 *Dado el problema P.L.*

$$\max z = 2x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$s.a. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

1. *Resolverlo. ¿Es la solución única?*

2. *Recorrido de c_2 para que la base anterior permanezca óptima.*

3. *¿Cuánto puede disminuir c_1 para que la base anterior permanezca óptima?*

4. *Se mantiene la base óptima si $b_2 = 6$. ¿Cuánto varía el valor del objetivo?*

Solución: 1) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2,\ z = 6$. La solución no es única, porque hay más de 2 costos reducidos nulos. 2) c_2 no puede cambiar 3) todo lo que se quiera 4) b_2 puede estar entre 3 y 6, así que no cambia la base óptima. Cambiaría la solución y por lo general el valor en el objetivo, aunque no en este caso, porque el precio sombra correspondiente a la segunda restricción es nulo.

Problema 8 *Nos proponemos alimentar el ganado de un rancho de la forma más económica posible. La alimentación debe contener cuatro tipos de componentes nutritivos que llamamos A, B, C, D. Estos componentes se encuentran en dos tipos de piensos M y N. La cantidad, en gramos, de cada componente por kilo de estos piensos viene dada en la tabla siguiente:*

	A	*B*	*C*	*D*
M	*100*		*100*	*200*
N		*100*	*200*	*100*

Un animal debe consumir diariamente al menos 0.4 Kg. de A, 0.6 Kg. de B, 2 Kg de C y 1.7 Kg de D. El compuesto M cuesta 20 ptas. por Kilo y el N 8 ptas. por Kilo. ¿ Qué cantidades de pienso M y N deben adquirirse para que el gasto de comida sea el menor posible?

Planteamiento

MODEL:

1]

2]min=20*x1+8*x2;

3]0.1*x1+0*x2>0.4;

4]0.1*x2>0.5;

5]x1+2*x2>2;

6]2*x1+x2>1.7;

END

Salida de LINGO

Rows= 5 Vars= 2 No. integer vars= 0 (all are linear)

Nonzeros= 13 Constraint nonz= 6(2 are +- 1) Density=0.867

Smallest and largest elements in absolute value= 0.100000 20.0000

No. < : 0 No. =: 0 No. > : 4, Obj=MIN, GUBs <= 2

Single cols= 0

Optimal solution found at step: 0

Objective value: 120.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.000000	0.0000000E+00
X2	5.000000	0.0000000E+00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	120.0000	1.000000
2	0.0000000E+00	-200.0000
3	0.0000000E+00	-80.00000
4	12.00000	0.0000000E+00
5	11.30000	0.0000000E+00

x1 = 4 unidades de pienso M

x2 = 5 unidades de pienso N

Coste final = 120 ptas.

Problema 9 *Un destacamento militar formado por 40 soldados de ingenieros, 36 especialistas dinamiteros, 88 antiguerrilleros y 120 infantes como tropa de apoyo, ha de ser transportado hasta una posición de gran importancia estratégica.*
En el parque de la base se dispone de cuatro tipos de vehículos A, B, C, D acondicionados para el transporte de tropas.
El número de personas que cada vehículo puede transportar es 10, 7, 6, 9 de la forma detallada en la siguiente tabla:

	Ing.	*Espec.*	*Antig.*	*Inf.*
A	*3*	*2*	*1*	*4*
B	*1*	*1*	*2*	*3*
C	*2*	*1*	*2*	*1*
D	*3*	*2*	*3*	*1*

Los gastos de gasolina hasta el punto de destino de cada vehículo se estima que es 160, 80, 40 y 120 litros respectivamente. Teniendo en cuenta que el ahorro de combustible resulta vital, el mando trata de ahorrar gasolina. ¿Cuántos vehículos de cada tipo habrá que utilizar para que el gasto de gasolina sea el menor posible?

Planteamiento

MODEL:

```
1]MAX=160*A+80*B+40*C+120*D;
2]3*A+B+2*C+3*D<40;
3]2*A+B+C+2*D<36;
4]A+2*B+2*C+3*D<88;
5]4*A+3*B+C+D<120;
END
```

Salida LINGO

Rows= 5 Vars= 4 No. integer vars= 0 (all are linear)

Nonzeros= 24 Constraint nonz= 16(6 are +- 1) Density=0.960

Smallest and largest elements in absolute value= 1.00000 160.000

No. < : 4 No. =: 0 No. > : 0, Obj=MAX, GUBs <= 1

Single cols= 0

Optimal solution found at step: 1

Objective value: 2880.000

Variable	Value Reduced	Cost
A	4.000000	0.0000000E+00
B	28.00000	0.0000000E+00
C	0.0000000E+00	40.00000
D	0.0000000E+00	40.00000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	2880.000	1.000000
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	0.0000000E+00	80.00000
4	28.00000	0.0000000E+00
5	20.00000	0.0000000E+00

Vehículos tipo A:	4
Vehículos tipo B:	28
Vehículos tipo C:	0
Vehículos tipo D	0

Problema 10 *Un fabricante desea despachar varias unidades de un artículo a 3 tiendas, T1, T2, T3. Dispone de dos almacenes desde donde realizar el envio, A y B.*

En el primero dispone de 5 unidades de este artículo y el segundo de 10. La demanda de cada tienda es 8, 5 y 2 unidades respectivamente. Los gastos de transporte de un artículo desde cada almacén a cada tienda está expresado por la tabla:

	T1	T2	T3
A	1	2	4
B	3	2	1

¿Cómo ha de realizar el transporte para que sea lo más económico posible?

Planteamiento

MODEL:

1]min=x1+2*x2+4*x3+3*x4+2*x5+x6;

2]x1+x4=8;

3]x2+x5=5;

4]x3+x6=2;

5]x1+x2+x3=5;

6]x4+x5+x6=10;

END

Salida LINGO

Rows= 6 Vars= 6 No. integer vars= 0 (all are linear)

Nonzeros= 23 Constraint nonz= 12(12 are +- 1) Density=0.548

Smallest and largest elements in absolute value= 1.00000 10.0000

No. < : 0 No. =: 5 No. > : 0, Obj=MIN, GUBs <= 3

Single cols= 0

Optimal solution found at step: 0

Objective value: 26.00000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	5.000000	0.0000000E+00
X2	0.0000000E+00	2.000000
X3	0.0000000E+00	5.000000
X4	3.000000	0.0000000E+00
X5	5.000000	0.0000000E+00
X6	2.000000	0.0000000E+00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	26.00000	1.000000
2	0.0000000E+00	-3.000000
3	0.0000000E+00	-2.000000
4	0.0000000E+00	-1.000000
5	0.0000000E+00	2.000000
6	0.0000000E+00	0.0000000E+00

Desde almacén A a tienda 1: 5

Desde almacén A a tienda 2: 0

Desde almacén A a tienda 3: 0

Desde almacén B a tienda 1: 3

Desde almacén B a tienda 2: 5

Desde almacén B a tienda 3: 2

Práctica 2

Programación lineal II

2.1 Comandos de salida de ficheros

Problema 11 *Se han de fabricar cuatro tipos de productos. Los recursos necesarios para elaborar cada producto así como los beneficios de venta por unidad están dados en la tabla*

	Producto 1	*Producto 2*	*Producto 3*	*Producto 4*
Materia Prima	*2*	*3*	*4*	*7*
Horas de trabajo	*3*	*4*	*5*	*6*
Beneficio	*4*	*6*	*7*	*8*

Se cuenta con 4600 unidades de materia prima y 5000 horas de trabajo. Para cubrir la demanda se deben fabricar exactamente 950 productos, de los cuales al menos 400 deben ser del tipo 4. Se desea hallar el plan de producción con mayores beneficios.

Se pide:

a) *Plantear el problema y resolverlo. ¿Cuáles son las restricciones saturadas?*

b) *Si el beneficio del producto 2 se eleva en 0.5 u.m. por unidad, ¿cuál es la nueva solución óptima? ¿Cambia el valor de la función objetivo?*

c) *Para el apartado anterior, crear un fichero en el editor de DOS (PRA2SOL1) que contenga el enunciado, el planteamiento, la solución y el análisis de sensibilidad generado por Lingo.*

d) *¿Y si decrece en una unidad el beneficio del producto 3?*

e) *¿Qué ocurre si la demanda aumenta a 980 unidades?*

a) Planteamiento y resolución del problema inicial.

Si denominamos a los valores de x_i como las cantidades que hay que fabricar de cada uno de los productos, entonces tendremos:

MODEL:

1]max=4*x1+6*x2+7*x3+8*x4;

2]2*x1+3*x2+4*x3+7*x4<4600;

3]3*x1+4*x2+5*x3+6*x4<5000;

4]x1+x2+x3+x4=950;

5]x4>400;

END

Introduciendo el comando GO obtenemos la solución: el plan de producción que genera mayores beneficios consiste en no fabricar ninguna unidad del producto 1, 400 del producto 2, 150 del tercero y 400 del cuarto. El beneficio asciende a 6650 u.m. Salvo la segunda restricción, que corresponde a las horas de trabajo (hay 250 horas de trabajo que no se han empleado), todas las restricciones son saturadas.

b)

Realizamos el análisis de sensibilidad:

****

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	4.000000	1.000000	INFINITY
X2	6.000000	0.6666667	0.5000000
X3	7.000000	1.000000	0.5000000
X4	8.000000	2.000000	INFINITY

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	4600.000	250.0000	150.0000
3	5000.000	INFINITY	250.0000
4	950.0000	50.00000	100.0000

5	400.0000	37.50000	125.0000

****

Según el análisis de sensibilidad realizado, el precio del segundo producto puede aumentar hasta 0.666667 sin que cambie la base óptima, así que no cambia la solución óptima. No obstante la función objetivo debe cambiar al variar el costo del segundo producto de 6 a 6.5. El incremento es $0.5 \times 400 = 200.0$, ya que se fabrican 400 unidades de este producto. El nuevo valor del objetivo será $6650+200 = 6850.0$ $u.m.$

c)

Para editar un fichero como el pedido se introducen sucesivamente los comandos siguientes pulsando la tecla *ENTER* detrás de cada comando:

DIVERT (cuando nos pide el nombre del fichero tecleamos PRA2SOL1), LOOK ALL, GO, RANGE, RVRT. Este fichero debe leerse con un editor de texto, por ejemplo con el *bloc de notas* de *WINDOWS.*

Si no hemos incluido el enunciado previamente dentro del modelo, lo podemos introducir ahora en el fichero creado.

El fichero resultante sería aproximadamente como el que se muestra a continuación:

****

¡ Enunciado del Problema 1 de la práctica 2, apartado b);

max=4*x1 + 6.5*x2 + 7*x3 + 8*x4;

2*x1 + 3*x2 + 4*x3 + 7*x4 < 4600;

3*x1 + 4*x2 + 5*x3 + 6*x4 < 5000;

x1 + x2 + x3 + x4 = 950;

x4 > 400;

end

La solución del problema es la siguiente:

Rows= 5 Vars= 4 No. integer vars= 0 (all are linear)

Nonzeros= 21 Constraint nonz= 13(5 are +- 1) Density=0.840

Smallest and largest elements in absolute value = 1.00000 5000.00

No. < : 2 No. =: 1 No. > : 1, Obj=MAX, GUBs <= 1

Single cols = 0

Optimal solution found at step: 0

Objective value: 6850.000

Variable	Value Reduced	Cost
X1	0.0000000E+00	2.000000
X2	400.0000	0.0000000E+00
X3	150.0000	0.0000000E+00
X4	400.0000	0.0000000E+00

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6850.000	1.000000
2	0.0000000E+00	0.5000000
3	250.0000	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00	5.000000
5	0.0000000E+00	-0.5000000

****

d)

El precio del producto 3 sólo puede decrecer 0.5 para que se mantenga la base, por lo tanto la base cambia y también la solución óptima.

e)

La demanda puede incrementarse en 50 unidades, por lo tanto un aumento de 30 no cambia la base óptima, aunque sí la solución ya que ésta se calcula como

$$X_B = B^{-1}b,$$

y en este caso cambia un valor en la matriz b.

2.2 Formato abreviado de LINGO

Problema 12 *Introducir el problema 1.1 en formato propio de Lingo*

```
MODEL:
SETS:
    INB/1..2/: BES;
    INC/1..3/: CES,EQUIS;
    INA(INB,INC): AES;
ENDSETS

!la función objetivo;
    MAX=@SUM(INC:CES*EQUIS);

!los contrastes;
    @FOR(INB(I):
        @SUM(INC(J):AES(I,J)*EQUIS(J))<BES(I));

DATA:
    BES = 6, 15;
    CES = 5, 3, 1;
    AES= 1, 1, 3,
         5, 3, 6;
ENDDATA
END
```

2.3 Recapitulación

Realiza el siguiente problema para practicar todos los métodos usados en los problemas anteriores:

Problema 13 *Una fábrica de automóviles debe fabricar 1000 vehículos. La compañía dispone de 4 plantas. El coste en energía, así como la materia prima y el tiempo necesarios para fabricar un automóvil en cada planta están dados en la tabla que sigue:*

	Planta 1	*Planta 2*	*Planta 3*	*Planta 4*
Coste energético	*15*	*10*	*9*	*7*
Horas de trabajo	*2*	*3*	*4*	*5*
Materia Prima	*3*	*4*	*5*	*6*

Se exige que al menos 400 coches sean fabricados en la tercera planta. Se dispone de 3300 horas de trabajo y de 4000 unidades de materia prima. Se desea fabricar 1000 vehículos con un coste energético lo más reducido posible.

Se pide:

a) Plantearlo y hallar la solución óptima. ¿Cuáles son las variables básicas?

b) Indicar cuáles son los costos reducidos de las variables no básicas.

c) Hacer el Análisis de Sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo y para los recursos.

d) Solución óptima si el coste de la variable 4 cambia a 7.5.

e) ¿Cuál es la solución óptima si el número de horas se reduce a 3200?

f) ¿Se mantiene la base óptima si hubiera que fabricar 1050 vehículos?

g) ¿Se ahorra energía con 100 horas más de trabajo? ¿Y con 100 unidades más de materia prima?

h) Escribir el planteamiento de este problema en el formato de Lingo. Resolverlo de nuevo para comprobar que está escrito correctamente.

Solución:

a) 400, 200, 400, 0 con un coste energético de 11600.

b) Las variables no básicas son $x_4$correspondiente a la planta 4 con coste reducido 7, la variable de holgura correspondiente a la restricción de la 3^aplanta con coste reducido -4, la de holgura correspondiente a las materia prima con coste reducido 5 y la del número de vehículos con coste reducido -30.

c) Los resultados se obtienen con el comando RANGE.

d) Se mantiene la solución óptima porque queda dentro del rango de variación del coeficiente c_4. En este caso también el objetivo ya que la variación es 0.5×0 ya que la variable x_4 es nula.

e) La misma.

f) Sí porque 50 es menor que la variación permitida para el coeficiente 1000 en el análisis de sensibilidad.

g) Con 100 horas más de trabajo no se ahorra energía, ya que con la solución actual hay una holgura de 300 horas de trabajo y en este rango la solución no va a cambiar. Sin embargo si se ahorra energía con 100 unidades más de materia prima. Este aumento entra dentro del rango en que se mantiene la base óptima. El precio sombra correspondiente es 5. Así que la función objetivo mejorará en $5\times 100 = 500$. Por tanto el valor es 11600 - 500 =11100.

h)

```
MODEL:
SETS:

   inb/1..5/:bes;
   inc/1..4/:ces,x;
   ina(inb,inc):aes;

ENDSETS

   min=@sum(inc:ces*x);
   @for(inb(i):
         @sum(inc(j):aes(i,j)*x(j))<bes(i));

DATA:

   bes=-400,3300,4000,1000,-1000;
   ces=15,10,9,7;
   aes=0,0,-1,0,
         2,3,4,5,
        3,4,5,6,
        1,1,1,1,
         -1,-1,-1,-1;

ENDDATA
END
```

Práctica 3

El problema de transporte

3.1 Problema de transporte

Problema 14 *Una empresa eléctrica, que provee de energía eléctrica a 4 ciudades, dispone de tres plantas de producción. La demanda de cada ciudad, la capacidad de producción de cada planta y el coste de enviar un KWH desde cada planta a cada una de las ciudades vienen dados en la tabla siguiente:*

	Ciudad 1	*Ciudad 2*	*Ciudad 3*	*Ciudad 4*	*Producción*
Planta 1	*8*	*6*	*10*	*9*	*35*
Planta 2	*9*	*12*	*13*	*7*	*50*
Planta 3	*14*	*9*	*16*	*5*	*40*
Demanda	*45*	*20*	*30*	*30*	

Se pretende abastecer la demanda con el mínimo coste.

Se puede plantear como un problema de programación lineal. Llamando x_{ij} la cantidad enviada desde la planta i a la ciudad j, el problema consiste en:

$$
\begin{array}{c}
MIN\ 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + \\
+14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \\
s.a:
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & \geq 45 & \\
x_{12} & +x_{22} & +x_{32} & \geq 20 & \\
x_{13} & +x_{23} & +x_{33} & \geq 30 & \\
x_{14} & +x_{24} & +x_{34} & \geq 30 & \\
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & \leq 35 \\
 & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & \leq 50 \\
 & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & \leq 40
\end{array}
$$

$$con\ x_{ij} \geq 0$$

Para resolverlo tomemos el modelo de problema de transporte de Lingo (*tran. lng*) y lo adaptamos al enunciado que tenemos del siguiente modo:

```
MODEL:
!Un problema de transporte con tres almacenes y cuatro clientes;
SETS:
FABRICA /AL1,AL2,AL3/ : PRODUCCION;
CLIENTE / CL1,CL2,CL3,CL4/ : DEMANDA;
RUTAS( FABRICA, CLIENTE) : COSTE, FLUJO;
ENDSETS

! objetivo;
[OBJ] MIN = @SUM( RUTAS: COSTE * FLUJO);

! Contrastes para satisfacer la demanda;
@FOR( CLIENTE( J): [DEMANDA]
@SUM( FABRICA(I): FLUJO( I, J)) >= DEMANDA( J));

! Contrastes de limitación de producción;
@FOR( FABRICA( I): [PRODUCCION]
@SUM( CLIENTE( J): FLUJO( I, J)) <= PRODUCCION( I));

! Datos del problema;
DATA:
PRODUCCION =35,50,40;
DEMANDA = 45,20,30,30;
COSTE = 8, 6, 10, 9,
9, 12,13,7,
14,9,16,5;
ENDDATA
END
```

Solución: La solución se lee en la matriz *Flujo(i,j):* De la planta 1 se envían 10 kwh a la ciudad 2 y 25 kwh a la ciudad 3. Desde la planta 2 se envían 45 kwh a la ciudad 1 y 5 kwh a la ciudad 3. De la planta 3 se envían 10 kwh a la ciudad 2 y 30 kwh a la ciudad 4. El coste correspondiente a esta solución resulta ser 1020 u.m.

3.2 Problema de asignación

Problema 15 *Una empresa tiene 4 máquinas y debe completar cuatro tareas. Cada máquina puede realizar cualquier tarea, y cada una ha de realizar una de estas tareas. La tabla siguiente nos da el tiempo que tarda cada máquina en completar cada trabajo.*

	tarea 1	*tarea 2*	*tarea 3*	*tarea 4*
máquina 1	*14*	*5*	*8*	*7*
máquina 2	*2*	*12*	*6*	*5*
máquina 3	*7*	*8*	*3*	*9*
máquina 4	*2*	*4*	*6*	*10*

Asignar una tarea a cada máquina de modo que el tiempo total consumido sea mínimo.

Este problema puede considerarse como un problema de transporte que tiene producciones 1 y ofertas 1. Los tiempos se interpretan como costes de transporte.

Así que el problema podría quedar como sigue:

```
MODEL:
1] !Un problema de asignación con cuatro máquinas y cuatro tareas;
2] SETS:
3] IMA/1..4/ : MAQUINA;
4] ITA / 1..4/ : TAREA;
5] INT( IMA,ITA) : TIEMPO, ASIGN;
6] ENDSETS
7]
8] ! objetivo;
9] [OBJ] MIN = @SUM( INT: TIEMPO *ASIGN);
10]
11] ! Contrastes indicando que se han de realizar todas las tareas;
12] @FOR( ITA( J): [TAREA]
```

```
@SUM( IMA(I): ASIGN( I, J)) >= TAREA( J));

! Contrastes indicando que cada máquina solo puede realizar una tarea;
@FOR( IMA( I): [MAQUINA]
@SUM( ITA( J): ASIGN( I, J)) <= MAQUINA( I));

! Datos del problema;
DATA:
MAQUINA =1,1,1,1;
TAREA = 1,1,1,1;
TIEMPO = 14,5.8,7,
2,12,6,5,
7,8,3,9
2,4,6,10;
ENDDATA
END
```

Solución: Se lee en la matriz *ASIGN(i,j).* Está señalada en la siguiente tabla:

	tarea 1	tarea 2	tarea 3	tarea 4
maquina 1	14	$\boxed{5}$	8	7
maquina 2	2	12	6	$\boxed{5}$
maquina 3	7	8	$\boxed{3}$	9
maquina 4	$\boxed{2}$	4	6	10

La suma de tiempos es 15

Problema 16 *Realizar de otra forma el problema anterior (utilizar el esquema del problema de asignación).*

La única variación consiste en sustituir directamente por 1 las producciones y las demandas. En ese caso no es necesario indicar la matriz de las disponibilidades y las demandas en DATA.

```
MODEL:
SETS:
```

```
2]IMA/1..4/;
3]ITA/1..4/;
4]INASIGN(IMA,ITA):TIEMPO,ASIGN;
5]ENDSETS
6]MIN=@SUM(INASIGN:TIEMPO*ASIGN);
7]@FOR(IMA(I):
8]@SUM(ITA(J):ASIGN(I,J))<1);
9]@FOR(ITA(J):
10]@SUM(IMA(I):ASIGN(I,J))>1);
11]DATA:
12]TIEMPO = 14,5,8,7,
13]2,12,6,5,
14]7,8,3,9,
15]2,4,6,10;
16]ENDDATA
END
```

3.3 Problema de emparejamiento

Problema 17 *Asignar 6 tareas a 5 individuos de modo que se realice el mayor número posible de tareas. Las tareas que puede realizar cada individuo están marcadas con un 1.*

	T1	*T2*	*T3*	*T4*	*T5*	*T6*
1	*1*			*1*		
2	*1*	*1*				
3				*1*		
4		*1*	*1*			*1*
5				*1*	*1*	

MODEL:

1] !Un problema de asignación con objetivo de maximización (5 orígenes y 6 destinos). Los costes son los indicados en la tabla);

1]!añadimos un individuo ficticio, el 6;

2] SETS:

```
ININ /1..6/ ;
INTA/1..6/ ;
INASIGN(ININ,INTA) : POSI,ASIGN ;
ENDSETS
! objectivo;
[OBJ] MAX = @SUM(INASIGN:POSI*ASIGN );
! Cada tarea demanda un individuo (el individuo 6 es ficticio);
@FOR( INTA( J):
@SUM( ININ(I):ASIGN( I, J)) >= 1);
! Cada individuo hace como máximo una tarea;
@FOR(ININ( I):
@SUM( INTA( J): ASIGN( I, J)) <=1);
! Datos del problema;
DATA:
POSI = 1,0,0,1,0,0,
       1,1,0,0,0,0,
       0,0,0,1,0,0,
       0,1,1,0,0,1,
       0,0,0,1,1,0,
       1,1,1,1,1,1;
ENDDATA
END
```

Solución: Se lee en la matriz *ASIGN(i,j)*. Está señalada en la siguiente tabla:

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1	$\boxed{1}$			1		
2	1	$\boxed{1}$				
3				$\boxed{1}$		
4		1	$\boxed{1}$			1
5				1	$\boxed{1}$	

La tarea 6 queda sin realizar, ya que corresponde al individuo ficticio.

3.4 Problema de planificación de la producción

Problema 18 *Un fabricante quiere planificar su producción trimestral para el próximo año. La producción máxima, la demanda y el gasto de producción por unidad en cada trimestre está resumido en la siguiente tabla.*

Trimestre	*Costo*	*Oferta*	*Demanda*
1º	*2*	*200*	*90*
2º	*2*	*250*	*200*
3º	*4*	*400*	*500*
4º	*6*	*250*	*200*

Además cada unidad no vendida en un trimestre tiene un encarecimiento de 2 unidades por cada trimestre de almacenamiento. Elaborar un plan óptimo de producción.

En la tabla de transporte siguiente se consideran los periodos de tiempo como orígenes y destinos. Los orígenes tienen como producción la oferta del periodo y los destinos una demanda que es la que corresponde a cada periodo. En cada celda (i, j) está indicado el costo de una unidad de producto fabricado en el trimestre i y vendido en el trimestre j. No puede venderse un producto antes de ser fabricado, por este motivo las celdas correspondientes tienen asignado un coste alto (M=1000). No es necesario añadir demanda ficticia, para realizar este problema con LINGO.

	T1	T2	T3	T4	
T1	2	4	6	8	200
T2	1000	2	4	6	250
T3	1000	1000	4	6	400
T4	1000	1000	1000	6	250
	90	200	500	200	

Solución:

Viene indicada en la tabla siguiente con indicación de la demanda no satisfecha:

	T1	T2	T3	T4	
T1	90		50		200 (faltan 60)
T2		200	50		250
T3			400		400
T4				200	250 (faltan 50)
	90	200	500	200	

Por tanto, tendremos la siguiente producción:

- en el trimestre 1 se fabrican 90 y se venden en el trimestre 1.

- en el trimestre 1 se fabrican 50 y se venden en el trimestre 3.

- en el trimestre 2 se fabrican 200 y se venden en el trimestre 2.

- en el trimestre 2 se fabrican 50 y se venden en el trimestre 3.

- en el trimestre 3 se fabrican 400 y se venden en el trimestre 3.

- en el trimestre 4 se fabrican 200 y se venden en el trimestre 4.

con un valor de objetivo de 3880 unidades monetarias.

3.5 Otros problemas

Problema 19 *Una firma comercial que fabrica un sólo producto tiene tres plantas de producción y cuatro clientes. Las plantas producen 3000, 5000 y 5000 unidades del producto respectivamente. Esta firma ha firmado un contrato con los clientes 1 y 2 para enviarles 4000 y 3000 unidades respectivamente. Con el cliente 3 tienen en firme un compromiso de 3000 unidades. No obstante los clientes 3 y 4 aceptaran comprar todas las unidades que deseen venderle. Los beneficios obtenidos por la venta de una unidad de la planta i al cliente j están desglosados en la siguiente tabla.*

	Cliente 1	*Cliente 2*	*Cliente 3*	*Cliente 4*
Planta 1	*65*	*63*	*62*	*64*
Planta 2	*68*	*67*	*65*	*62*
Planta 3	*63*	*60*	*59*	*60*

Maximizar los beneficios de la firma.

Solución:

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Planta 1				3000
Planta 2		3000	2000	
Planta 3	4000		1000	

El beneficio es de 834000 u.m.

Problema 20 *Un marchante de arte dispone de dos pinturas. Tiene 4 posibles compradores. Los dos primeros quieren comprar dos pinturas y los otros dos una de ellas. Los precios (en millones de pesetas) que están dispuestos a pagar los posibles clientes por los cuadros se dan en la tabla siguiente:*

	Cliente 1	*Cliente 2*	*Cliente 3*	*Cliente 4*
Pintura 1	*8*	*9*	*9*	-
Pintura 2	*11*	*13*	-	-
Pintura 3	-	*12*	*11*	*12*
Pintura 4	-	*7*	-	*9*

¿Cómo debe realizar el marchante la venta para obtener el mayor beneficio? Realizar el problema bajo el esquema de un problema de asignación.

Solución: Puede plantearse transformándolo en el siguiente problema de asignación:

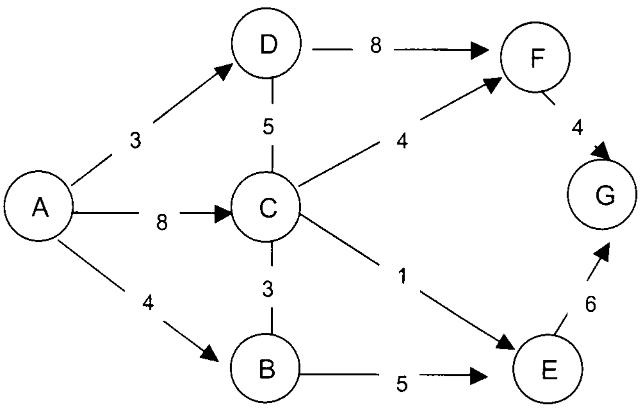
	Cliente 1A	Cliente 1B	Cliente 2A	Cliente 2B	Cliente 3	Cliente 4
Pintura 1	8	8	9	9	9	100
Pintura 2	11	11	13	13	100	100
Pintura 3	100	100	12	12	11	12
Pintura 4	100	100	7	7	100	9

Práctica 4

Problemas de redes

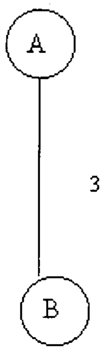
4.1 Camino mínimo

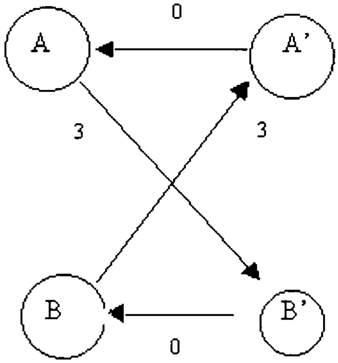
Problema 21 *En la siguiente red hallar la ruta más corta entre los vértices origen A y extremo G considerando que los números de los arcos significan la distancia entre sus nodos.*



Primera solución

Considerándolo como un problema de asignación y transformando la red en una red dirigida. Los nodos B, C, D se han duplicado en forma similar a la de la siguiente figura:





El origen es A, el destino B. Los demás nodos son de transbordo.

```
MODEL:
! UN PROBLEMA DE CAMINO MÍNIMO;
SETS:
WAREHOUSE / A,B1,B2,C1,C2,D1,D2,E,F/ ;
CUSTOMER /OB1,OB2,OC1,OC2,OD1,OD2,OE,OF,OG/ ;
ROUTES( WAREHOUSE, CUSTOMER) : COST, VOLUME;
ENDSETS

! The objective;
[OBJ] MIN = @SUM( ROUTES: COST * VOLUME);

! The demand constraints;
@FOR( CUSTOMER( J): [DEMAND]
@SUM( WAREHOUSE( I): VOLUME( I, J)) >= 1);

! The supply constraints;
@FOR( WAREHOUSE( I): [SUPPLY]
@SUM( CUSTOMER( J): VOLUME( I, J)) <= 1);

! Here are the parameters;
```

```
DATA:
COST = 4,1000, 8,1000, 3,1000,1000,1000,1000,
0, 0,1000, 3,1000,1000,1000,1000,1000,
1000, 0,1000,1000,1000,1000, 5,1000,1000,
1000, 3, 0, 0,1000, 5,1000,1000,1000,
1000,1000,1000, 0,1000,1000, 1, 4,1000,
1000,1000,1000, 5, 0, 0,1000,1000,1000,
1000,1000,1000,1000,1000, 0,1000, 8,1000,
1000,1000,1000,1000,1000,1000, 0,1000, 6,
1000,1000,1000,1000,1000,1000,1000, 0, 4;
ENDDATA

END
```

El camino mínimo se deduce de la solución anterior eligiendo los arcos con valor 1, que son:

```
VOLUME( A, OB1)
VOLUME( B1, OC2)
VOLUME( B2, OB2) ***
VOLUME( C1, OC1) ***
VOLUME( C2, OE)
VOLUME( D1, OD1) ***
VOLUME( D2, OD2) ***
VOLUME( E, OG)
VOLUME( F, OF) ***
```

El camino mínimo esta formado, excluyendo los de costo 0 (coincidiendo consigo mismo) por los vértices:

$$A \to B \to C \to E \to G,$$

con recorrido total de 14 unidades, que es precisamente el valor de la función objetivo.

Segunda solución

En este caso usamos también el modelo de transporte, pero admitimos arcos de doble orientación.

```
MODEL:
! A 3 Warehouse, 4 Customer Transportation Problem;
SETS:
WAREHOUSE / A,B,C,D,E,F/ ;
CUSTOMER /OB,OC,OD,OE,OF,OG/ ;
ROUTES( WAREHOUSE, CUSTOMER) : COST, VOLUME;
ENDSETS

! The objective;
[OBJ] MIN = @SUM( ROUTES: COST * VOLUME);

! The demand constraints;
@FOR( CUSTOMER( J): [DEMAND]
@SUM( WAREHOUSE( I): VOLUME( I, J)) >= 1);

! The supply constraints;
@FOR( WAREHOUSE( I): [SUPPLY]
@SUM( CUSTOMER( J): VOLUME( I, J)) <= 1);

! Here are the parameters;
DATA:
COST = 4, 8, 3,1000,1000,1000,
0, 3,1000, 5,1000,1000,
3, 0, 5, 1, 4,1000,
1000, 5, 0,1000, 8,1000,
1000,1000,1000, 0,1000, 6,
1000,1000,1000,1000, 0, 4;
ENDDATA
```

28]

END

Tercera solución

También puede realizarse como un problema de programación lineal, sobre cada uno de los esquemas anteriores. El enfoque de esta solución es usando la red de la primera solución:

$$MIN: \quad 4x_{AB1} + 8x_{AC1} + 3x_{AD1} + 0x_{B1B2} + 3x_{B1C2} + 3x_{C1B2}+$$
$$+0x_{C1C2} + 5x_{C1D2} + 5x_{D1C2} + 0x_{D1D2} + 5x_{B2E} + 1x_{C2E}+$$
$$+4x_{C2F} + 8x_{D2F} + 6x_{EG} + 4x_{FG.}$$

$$\text{S.A:} \quad \begin{array}{lll}
x_{AB1} + x_{AC1} + x_{AD1} & = 1 & (\textit{vértice } A) \\
x_{AB1} - x_{B1B2} - x_{B1C2} & = 0 & (\textit{vértice } B1) \\
x_{AC1} - x_{C1B2} - x_{C1C2} - x_{C1D2} & = 0 & (\textit{vértice } C1) \\
x_{AD1} - x_{D1C2} - x_{D1D2} & = 0 & (\textit{vértice } D1) \\
x_{B1B2} + x_{C1B2} - x_{B2E} & = 0 & (\textit{vértice } B2) \\
x_{B1C2} + x_{C1C2} + x_{D1C2} - x_{C2E} - x_{C2F} & = 0 & (\textit{vértice } C2) \\
x_{C1D2} + x_{D1D2} - x_{D2F} & = 0 & (\textit{vértice } D2) \\
x_{B2E} + x_{C2E} - x_{EG} & = 0 & (\textit{vértice } E) \\
x_{C2F} + x_{D2F} - x_{FG.} & = 0 & (\textit{vértice } F) \\
x_{EG} + x_{FG} & = 1 & (\textit{vértice } G)
\end{array}$$

$$x_{ij} = 0, 1$$

MODEL:

1]! OBJETIVO;

2]MIN=4*ab1+8*ac1+3*ad1+3*b1c2+3*c1b2+5*c1d2+5*d1c2+5*b2e+c2e+

3]4*c2f+8*d2f+6*eg+4*fg;

4]

5] ! RESTRICCIONES;

6]AB1+AC1+AD1=1;

7]AB1-B1B2-B1C2=0;

8]AC1-C1B2-C1C2-C1D2=0;

9]AD1-D1C2-D1D2=0;

10]B1B2+C1B2-B2E=0;

11]B1C2+C1C2+D1C2-C2E-C2F=0;

12]C1D2+D1D2-D2F=0;

13]B2E+C2E-EG=0;

14]C2F+D2F-FG=0;

15]EG+FG=1;

16]@bin(ab1);@bin(ac1);@bin(ad1);@bin(b1b2);@bin(b1c2);@bin(c1b2);

17]@bin(c1c2);@bin(c1d2);@bin(d1c2);@bin(d1d2);

18]@bin(b2e);@bin(c2e);@bin(c2f);@bin(d2f);@bin(eg);@bin(fg);

END

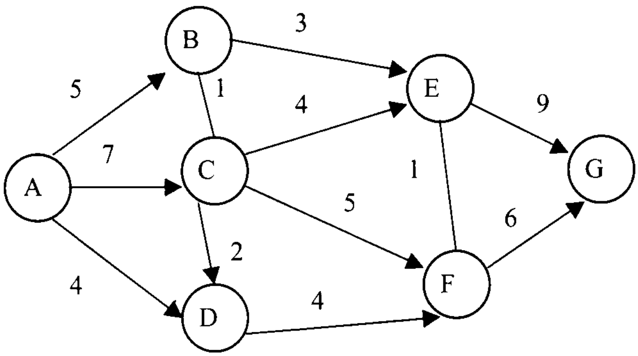
Las variables con valor 1, es decir las que forman el camino son:

AB1 , B1C2 , C2E , EG,

y su longitud es el valor del objetivo, que es 14.

4.2 Flujo máximo

Problema 22 *Determinar el flujo máximo en la red:*



Enfocándolo como un problema de programación lineal puede programarse:

MODEL:

1]SETS:

2]NODES/1..7/;

3]ARCS(NODES,NODES)/1,2 1,3 1,4 2,3 2,5 3,2 3,4 3,5 3,6 4,6 5,6 5,7 6,5 6,7 7,1/

```
4]:CAP,FLOW;
5]ENDSETS
6]MAX=FLOW(7,1);
7]@FOR(ARCS(I,J):FLOW(I,J)<CAP(I,J));
8]@FOR(NODES(I):@SUM(ARCS(J,I):FLOW(J,I))
9]=@SUM(ARCS(I,J):FLOW(I,J)));
10]DATA:
11]CAP=5,7,4,1,3,1,2,4,5,4,1,9,1,6,1000;
12]ENDDATA
END
```

La solución obtenida es la siguiente:

Optimal solution found at step: 4

Objective value: 14.00000

FLOW(1, 2)	3.000000	0.0000000E+00
FLOW(1, 3)	7.000000	0.0000000E+00
FLOW(1, 4)	4.000000	0.0000000E+00
FLOW(2, 3)	1.000000	0.0000000E+00
FLOW(2, 5)	3.000000	0.0000000E+00
FLOW(3, 2)	1.000000	0.0000000E+00
FLOW(3, 4)	0.0000000E+0	0 0.0000000E+00
FLOW(3, 5)	4.000000	0.0000000E+00
FLOW(3, 6)	3.000000	0.0000000E+00
FLOW(4, 6)	4.000000	0.0000000E+00
FLOW(5, 6)	0.0000000E+0	0 1.000000
FLOW(5, 7)	8.000000	0.0000000E+00
FLOW(6, 5)	1.000000	0.0000000E+00
FLOW(6, 7)	6.000000	0.0000000E+00
FLOW(7, 1)	14.00000	0.0000000E+00

4.3 CPM

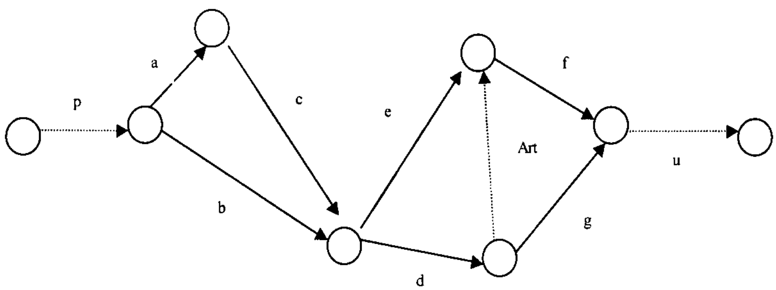
Problema 23 *Un proyecto se compone de las actividades a. b. c. d, e, f y g. Las relaciones entre las actividades son:*

$a < c, \quad c < d, \quad b < d, \quad c < e, \quad b < e, \quad e < f, \quad d < f, \quad d < g.$

La siguiente tabla da la duración estimada de las actividades

Actividad	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
duración	3	7	8	6	12	5	6

Se pide dibujar la red del proyecto y hallar el camino crítico.



En la siguiente programación introducimos una tarea inicial (p) y otra última (u) o final[1].

MODEL:

1] ! A PERT/CPM model;

11] SETS:

12] ! Para cada tarea (TASK) usamos las variables: Time (=duración de cada actividad),

Early Start (ES) (=pronto para comenzar), Late Start (LS) (=tarde para comenzar), and Slack (=holgura de tiempo para cada actividad) ;

14] TASK/p,a,b,c,d,e,art,f,g,u/: TIME, ES, LS, SLACK;

15]

16] ! A Continuación están las relaciones de precedencia ;

19] PRED(TASK, TASK)/ p,a p,b a,c b,d b,e

20] c,e c,d e,f d,art d,g art,f f,u g,u/;

[1] Para facilitar la edición puede cargarse el fichero de los ejemplos de Lingo PERT.LNG

```
ENDSETS
DATA: ! Duración de las tareas;
TIME =0,3,7,8,6,12,0,5,6,0;
ENDDATA
! El comienzo de la primera tarea (pronto para comenzar = 0);
ES( 1) = 0;
! Compute earliest start for all but first task;
@FOR( TASK( J)| J #GT# 1:
ES( J) = @MAX( PRED( I, J): ES( I) + TIME(I)););
! For the last task, earliest start = latest start;
LTASK = @SIZE( TASK);
LS( LTASK) = ES( LTASK); SLACK( LTASK) = 0;
! Compute latest start for all but last task;
@FOR( TASK( I)| I #LT# LTASK:
LS( I) = @MIN( PRED( I, J): LS( J) - TIME( I));
SLACK( I) = LS( I) - ES( I););
END
```

La solución puede leerse en los valores siguientes:

```
LS( U) 28.00000
SLACK( P) 0.0000000E+00
SLACK( A) 0.0000000E+00
SLACK( B) 4.000000
SLACK( C) 0.0000000E+00
SLACK( D) 5.000000
SLACK( E) 0.0000000E+00
```

SLACK(ART) 6.000000

SLACK(F) 0.0000000E+00

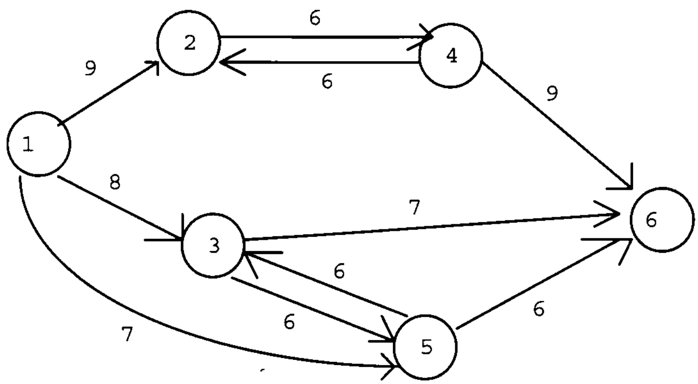
SLACK(G) 5.000000

SLACK(U) 0.0000000E+00

Las tareas cuya holgura es nula forman el camino crítico. El tiempo total empleado es LS(última actividad)+ duración de la última actividad = 28 + 0 = 28.

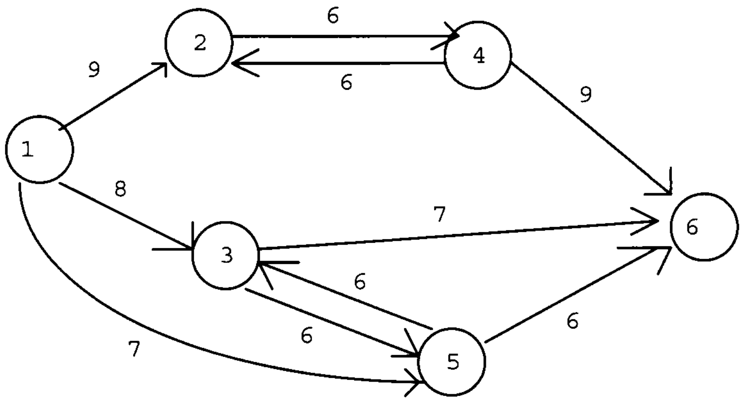
4.4 Otros problemas

Problema 24 *En la siguiente red hallar la ruta más corta entre los vértices origen y final. Los números en los arcos indican la longitud.*



Solución: El camino mínimo es $1 \to 5 \to 6$ y su longitud es 13.

Problema 25 *Usando la gráfica del problema anterior y considerando que los números son la capacidad de los arcos hallar el flujo máximo de 1 a 6.*



Solución: El flujo máximo es 19. Se distribuye de la siguiente forma:

$$x_{12} = 6,\ x_{13} = 7,\ x_{15} = 6,\ x_{24} = 6,\ ,\ x_{35} = 6,\ x_{36} = 7,\ x_{42} = 0,$$

$$x_{46} = 6,\ x_{42} = 0,\ \ x_{53} = 6,\ x_{56} = 6.$$

Los valores de $x_{35} = x_{53} = 6$, se pueden sustituir por cualquier par de valores que cumpla $x_{35} = x_{53} \leq 6$.

Problema 26 *Una empresa de electrodomésticos se propone sacar al mercado un nuevo modelo de escoba eléctrica. Para ello realiza un estudio previo para ver la conveniencia de comenzar la fabricación de este nuevo producto. El estudio consta de las actividades indicadas en la siguiente tabla, donde además se especifican las actividades predecesoras y el tiempo estimado (en semanas) de duración de cada una de ellas.*

Actividad	*Descripción de la actividad*	*Duración*	*Predecesoras*
A	*Diseño*	*6*	-
B	*Plan de mercado*	*2*	-
C	*Diseño de manufactura*	*3*	*A*
D	*Construcción del prototipo*	*5*	*A*
E	*Folleto de Registro*	*3*	*A*
F	*Estimaciones de costos*	*2*	*C*
G	*Pruebas preliminares*	*3*	*D*
H	*Investigación de mercado*	*4*	*B,E*
I	*Precios y pronósticos de venta*	*2*	*H*
J	*Informe final*	*2*	*F,G,I*

a) Realizar la red del proyecto.

b) Calcular la duración mínima del proyecto y las actividades críticas.

c) Especificar cuánto tiempo pueden retrasarse las restantes actividades sin que la duración total del proyecto se vea afectada.

Solución (del método CPM):

La duración mínima del proyecto ha de ser de 17 semanas.

Actividad	Descripción de la actividad	Duración	Holgura	Actividades críticas
A	Diseño	6	0	•
B	Plan de mercado	2	7	
C	Diseño de manufactura	3	$H_C + H_F = 4$	
D	Construcción del prototipo	5	$H_D + H_G = 2$	
E	Folleto de Registro	3	0	•
F	Estimaciones de costos	2	$H_C + H_F = 4$	
G	Pruebas preliminares	3	$H_D + H_G = 2$	
H	Investigación de mercado	4	0	•
I	Precios y pronósticos de venta	2	0	•
J	Informe final	2	0	•

Las actividades críticas están señaladas en la tabla anterior.

El tiempo que pueden retrasarse las actividades aparece reflejado en la última tabla como holgura.

Práctica 5

Variable entera, acotada y libre

5.1 Variable entera

Problema 27 max $2x_1 + 6x_2 + 3x_3$

$$s.\ a.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0,\ enteras \end{cases}$$

Planteamiento en LINGO

```
MODEL:
1]max=2*x1+6*x2+3*x3;
2]x1+2*x2+2*x3<25;
3]2*x1+x2+3*x3<30;
4]@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);
5]
END
```

Solución:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	1.000000	-2.000000
X2	12.00000	-6.000000

X3	0.0000000E+00	-3.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	74.00000	1.000000
2	0.0000000E+00	0.0000000E+00
3	16.00000	0.0000000E+00

5.2 Variable acotada

Problema 28 *Realizar el siguiente problema de variable entera*

$$\max\ z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.\ a. \begin{cases} 3x1 + x2 + 2x3 \leq 11/2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_3 \leq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0\ \ y\ enteras \end{cases}$$

Aprovechamos este enunciado para introducir el formato lingo de variables acotadas

@BND(cota inferior, variable, cota superior)

```
MODEL:
1]max=4*x1+2*x2+3*x3;
2]3*x1+x2+2*x3<5.5;
3]@bnd(0,x2,3);
4]@bnd(0,x3,1);
5]@gin(x1);
6]@gin(x2);
7]@gin(x3);
END
```

Optimal solution found at step: 6

Objective value: 9.000000

Branch count: 1

Variable Value Reduced Cost

X1	0.0000000E+00	-4.000000
X2	3.000000	-2.000000
X3	1.000000	-3.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	9.000000	1.000000
2	0.5000000	0.0000000E+00

Y la solución óptima es $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, \quad z = 9$.

5.3 Variable libre

Problema 29 *Este es un ejemplo de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con LINGO. Como las incógnitas no necesariamente tomarán valores no negativos, las declaramos como variables libres:*

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

MODEL:

1]3*x+5*y=-2;

2]x+y=0;

3]@free(x);@free(y);

4]

END

Feasible solution found at step: 2

Variable	Value
X	1.000000
Y	-1.000000

Obsérvese que si omitimos la declaración de variable libre, el programa nos indica que el problema no tiene solución.

Y la solución del sistema de ecuaciones lineales es $x = 1, \ y = -1$.

5.4 Variable binaria

Problema 30 *Una universidad desea adquirir 110 ordenadores. Para ello contacta con tres vendedores. El primero vende cada ordenador a 100000 pesetas más un cobro único de un millón de pesetas, y dispone de 50 ordenadores. El segundo vende cada ordenador a 70000 pesetas y un cobro único de ochocientas mil pesetas, disponiendo de 90 ordenadores. El último vende cada uno a 50000, cargando por una sola vez una cantidad de un millón doscientas mil pesetas, dispone de 40 ordenadores. Plantear el problema de programación entera que responderá a la siguiente cuestión: ¿Cuántos ordenadores debe comprar la universidad a cada vendedor para minimizar la inversión?*

```
MODEL:
1]min=1000*y1+800*y2+1200*y3+100*x1+70*x2+50*x3;
2]x1<50;
3]x2<90;
4]x3<40;
5]x1+x2+x3>110;
6]x1<110*y1;
7]x2<110*y2;
8]x3<110*y3;
9]@bin(y1);@bin(y2);@bin(y3);
10]@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);
END
```

Compra 70 ordenadores al 2^{o}y 40 al 3^o. El importe es de 8900000 ptas.

Problema 31 *Un hospital realiza 6 tipos de operaciones quirúrgicas. Las operaciones que pueden realizar cada uno de los sus cirujanos están indicadas con un 1 en la tabla siguiente. Los dos primeros cirujanos no pueden contratarse simultáneamente.*

	OP1	*OP2*	*OP3*	*OP4*	*OP5*	*OP6*
CI1	*1*	*1*		*1*		
CI2			*1*		*1*	*1*
CI3			*1*		*1*	
CI4	*1*					*1*
CI5		*1*				
CI6				*1*	*1*	

Formula un problema de Programación entera que permita seleccionar el menor número posible de cirujanos para realizar todas las operaciones.

La formulación del problema de programación entera que permite seleccionar el menor número de cirujanos es la siguiente:

MODEL:

1]min= c1+c2+c3+c4+c5+c6;

2]c1+c2<1;

3]c1+c4>1;

4]c1+c5>1;

5]c2+c3>1;

6]c1+c6>1;

7]c2+c3+c6>1;

8]c2+c4>1;

9]@bin(c1);@bin(c2);@bin(c3);@bin(c4);@bin(c5);@bin(c6);

END

La solución que suministra LINGO selecciona a los cirujanos 1, 3 y 4.

Problema 32 *En una región de un país hay 6 ciudades importantes. El tiempo requerido para ir de una ciudad a otra está indicado en la siguiente tabla.*

	CI1	*CI2*	*CI3*	*CI4*	*CI5*	*CI6*
CI1	*0*	*10*	*13*	*30*	*30*	*20*
CI2	*10*	*0*	*25*	*35*	*20*	*10*
CI3	*13*	*25*	*0*	*15*	*30*	*20*
CI4	*30*	*35*	*15*	*0*	*15*	*25*
CI5	*30*	*20*	*30*	*15*	*0*	*14*
CI6	*20*	*10*	*20*	*25*	*14*	*0*

Se desea construir el menor número posible de estaciones en algunas de estas ciudades para asegurar que cada ciudad esté como mucho a 16 unidades de tiempo de alguna de estas estaciones .

Además han de cumplirse las siguientes condiciones:

1. *Si se construyen estaciones en las ciudades 2 y 6 hay que construir una en la ciudad 3.*

2. *Si no se construye en la 2 ha de construirse en la 5.*

3. *No se puede sobrepasar el gasto de construcción de 180 u.m. Los costos de construcción son diferentes en cada ciudad. Estos costos son respectivamente 30, 45, 50, 40, 80, y 90 u.m.*

Solución:

$\min (c1 + c2 + c3 + c4 + c5 + c6)$

$c_1 + c_2 + c_3 \geq 1$

$c_1 + c_2 + c_6 \geq 1$

$c_1 + c_3 + c_4 \geq 1$

$c_3 + c_4 + c_5 \geq 1$

$c_4 + c_5 + c_6 \geq 1$

$c_2 + c_5 + c_6 \geq 1$

$c_2 + c_6 - c_3 \geq 1$

$c_2 + c_5 \geq 1$

$30c_1 + 45c_2 + 50c_3 + 40c_4 + 80c_5 + 90c_6 \leq 180$

c_i variable binaria.

La solución de Lingo es seleccionar las ciudades 2 y 4.

5.5 Otros problemas

Problema 33 *Dado el problema de programación lineal entera*

$$\min \ z = 3x_1 + 4x_2$$

$$s.a. \begin{cases} 3x_1 + x_2 . \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, \ x_2 \geq 0, \ enteras \end{cases}$$

Se pide:

Resolver el problema de programación lineal entera siguiendo el esquema del algoritmo de ramificación y acotación (no definiendo las variables como enteras en LINGO).

Solución:

La solución óptima del problema de programación lineal entero es

$x_1 = 2, \ x_2 = 1$, con $z = 10$.

Problema 34 *Realizar el siguiente problema usando formato matricial*

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$s.\ a. \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 12/5 \\ x_1,\ x_2 \geq 0,\ enteras \end{cases}$$

Solución:

La solución óptima del problema de programación lineal entero es

$x_1 = 2,\ \ x_2 = 0$, con $\ z = 4$.

Bibliografía

[1] Investigación Operativa. Optimización. *Sixto Ríos Insua.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces. 1988.

[2] Programación Lineal y aplicaciones: Ejercicios resueltos. *Sixto Ríos Insua, David Ríos Insua, Alfonso Mateos y Jacinto Martín.* Editorial RA-MA. 1997.

[3] Investigación de Operaciones: Aplicaciones y Algoritmos. *Wayne L. Winston.* Grupo Editorial Iberoamérica. 1994.

[4] Introducción a los modelos cuantitativos para administración. *David R. Anderson. Dennis J. Sweeny, Thomas A. Williams.* Grupo Editorial Iberoamérica. 1993.

[5] Introduccion a la Investigación de Operaciones. *Hilliers, Lieberman.* Editorial MacGraw-Hill. 1991.

[6] Métodos y modelos de la Investigación Operativa (2 vol.). Prawda. Editorial Limusa. 1986.

[7] Investigación de Operaciones. Una Introducción. *Hamdy A. Taha.* Prentice Hall. 1998.

[8] Programación Lineal. Metodología y Problemas. *M. Mocholi Arce, R Sala Garrido.* Editorial Tébar Flores.1993.

[9] Programación Lineal, Entera y Meta. Problemas y Aplicaciones. *Herminia I. Calvete Fernández, Pedro M. Mateo.* Prensas Universitarias de Zaragoza. 1994.

[10] Problemas de Programación Lineal. *Javier Osorio Acosta.* Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Servicio de Publicaciones. 1993.

[11] Técnicas de Investigación Operativa. *Javier García Cabañes, Luis Fernández Martínez, Pablo Tejera del Pozo.* Paraninfo. 1990.

[12] Problemas de Investigación Operativa. *Sarabia.* Editorial ICAI. 1984.

[13] Métodos de Optimización. *Mital.* Editorial Limusa. 1984.

[14] Técnicas de Investigación Operativa. *Cabanes.* Editorial Paraninfo. 1989.

[15] Investigación de Operaciones. *Bronson.* Editorial Schaum-MacGraw Hill. 1992.

[16] Programación Matemática. *Balbas.* Editorial AC. 1990.

[17] Métodos de Programación Matemática. U.N.E.D. 1991.

[18] Programación Lineal. *Gass.* McGraw-Hill, México, 1972.

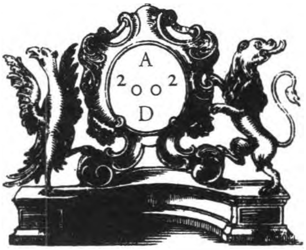
[19] Investigación Operativa: Programación dinámica. *Chacón, E.* Madrid. Ibérico Europea, 1972.

[20] Administración de Operaciones. *Monks, J.* McGraw-Hill. 1987.

[21] Programación Lineal y Flujos de Redes. *Bazaraa, M.S. y Jarvis, J.J.* Ed. Limusa, 1981.

[22] Fundamentals of Queuing Theory. *Gross, Harris.* John Wiley & Sons. 1998.

[23] Simulación. Métodos y aplicaciones. *David Ríos Insua, Sixto Ríos Insua y Jacinto Martín Jiménez.* RA-MA. 1997.



Este libro se terminó de imprimir el día 27 de diciembre, festividad de San Juan Evangelista, discípulo predilecto de Jesús, a quien se le representa con un águila al lado, como símbolo de la elevada espiritualidad que transmite con sus escritos.

textos básicos

UNIVERSITARIOS

11

UCA Universidad de Cádiz

Servicio de Publicaciones
2002

ISBN 84-7786-775-5

9 788477 867753