

Universidad de

**Cádiz**

# Fundamentos de **regulación automática**



**FUNDAMENTOS DE REGULACIÓN  
AUTOMÁTICA**



# FUNDAMENTOS DE REGULACIÓN AUTOMÁTICA

Rafael González López  
Daniel Espinosa Corbellini  
M. Ángel Fernández Granero  
Eduardo Romero Bruzón



**UCA** | Universidad  
de Cádiz

Servicio de Publicaciones  
2004

FUNDAMENTOS de regulación automática / Rafael González López [et al.]. — Cádiz: Universidad, Servicio de Publicaciones, 2004. --200 pp.

ISBN 84-92674-16-0

1. Control automático-Tratados, manuales, etc. 2. Servomecanismos-Tratados, manuales, etc.. I. González López, Rafael. II. Universidad de Cádiz. Servicio de Publicaciones, ed. III. Título

681.5

© Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz  
Rafael González López  
Daniel Espinosa Corbellini  
M.A. Fernández Granero  
Eduardo Romero Bruzón

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz  
C/ Doctor Marañón, 3. 11002 Cádiz  
[www.uca.es/serv/publicaciones](http://www.uca.es/serv/publicaciones)

ISBN: 84-96274-16-0  
Depósito Legal: CA-073/04

Diseño: Cadigrafía  
Maquetación y fotomecánica: Produce  
Imprime: Imprenta Santa Teresa

# ÍNDICE

PRÓLOGO .....	11
1. INTRODUCCIÓN	
1.1.- Sistemas de control .....	13
1.2.- Sistemas de control en bucle abierto y cerrado .....	13
1.3.- Diagramas de bloques .....	14
1.4.- Servosistemas y reguladores .....	16
1.5.- Función de transferencia .....	17
1.6.- Determinación de funciones de transferencia .....	19
1.7.- Sistemas lineales .....	20
1.8.- Régimen transitorio y permanente .....	21
2. TRANSFORMADA DE LAPLACE	
2.1.- Definición de transformada de Laplace .....	23
2.2.- Transformada de Laplace de algunas funciones .....	23
2.3.- Propiedades de la transformada de Laplace .....	24
2.4.- Aplicación de la transformada de Laplace a las funciones de transferencia .....	26
3. ÁLGEBRA DE BLOQUES	
3.1.- Introducción .....	29
3.2.- Reducción a realimentación unitaria .....	29
3.3.- Bloques en cascada .....	30
3.4.- Bloques en paralelo .....	30
3.5.- Desplazamiento de puntos de suma y conexión .....	31

#### 4. RÉGIMEN PERMANENTE DE LOS SERVOSISTEMAS

4.1.- Tipos de funciones de transferencia .....	35
4.2.- Constantes de error .....	36
4.3.- Error en régimen permanente .....	36

#### 5. RÉGIMEN TRANSITORIO DE LOS SERVOSISTEMAS

5.1.- Generalidades .....	41
5.2.- Respuesta de un sistema de segundo orden .....	41
5.3.- Rapidez y estabilidad relativa .....	44
5.4.- Sistemas de segundo orden subamortiguados .....	45
5.5.- Influencia de un cero .....	48
5.6.- Sistemas de tercer orden .....	52

#### 6. LUGAR DE LAS RAÍCES

6.1.- Introducción .....	55
6.2.- Sistemas de segundo orden .....	57
6.3.- Trazado del lugar de las raíces .....	58
6.4.- Configuración en el lugar de las raíces y respuesta .....	69
6.5.- Efecto de un cero y un polo .....	72

#### 7. COMPENSACIÓN EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES

7.1.- Introducción .....	75
7.2.- Compensación en cascada .....	78
7.3.- Compensación por realimentación .....	91

#### 8. DOMINIO DE LA FRECUENCIA

8.1.- Introducción .....	97
8.2.- Margen de fase y margen de ganancia .....	98
8.3.- Gráficos de Bode .....	99
8.4.- Ábaco de Black .....	104

---

## 9. COMPENSACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

9.1.- Introducción	109
9.2.- Retardo de fase	109
9.3.- Adelanto de fase	119
9.4.- Compensación por realimentación	123

## 10. DESCRIPCIÓN INTERNA

10.1.- Introducción	133
10.2.- Distintas formas de la descripción interna	136
10.3.- Forma canónica de control	137
10.4.- Forma canónica de observación	139
10.5.- Forma canónica de Jordan	141
10.6.- Función de transición y función de transferencia	145

## 11. ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN LA DESCRIPCIÓN INTERNA

11.1.- Introducción	147
11.2.- Estabilidad en el sentido de Liapunov	148
11.3.- Estabilidad asintótica en el sentido de Liapunov	148
11.4.- Función de Liapunov	152
11.5.- Teoría de Liapunov	153

## 12. DISEÑO EN LA DESCRIPCIÓN INTERNA

12.1.- Observabilidad y controlabilidad	159
12.2.- Realimentación con las variables de estado	163
12.3.- Determinación de la ley de control	164
12.4.- Observadores	167
12.5.- Observador de orden N-1	170

## 13. SIMULACIÓN

13.1.- Generalidades	171
13.2.- Unidades operacionales	173

13.3.- Programación de funciones de transferencia .....	173
13.4.- Escala de tiempo .....	175
13.5.- Escala de amplitud .....	176
13.6.- Ejemplos de simulación .....	176

#### 14. SISTEMAS NO LINEALES

14.1.- Linealización .....	183
14.2.- Estudio del comportamiento de un sistema en el plano de fase .....	185
14.3.- Ejemplos .....	192

## Prólogo

Este libro representa un cariñoso tributo al profesor Dr. D. Rafael González López que sus compañeros y discípulos los profesores D. Daniel Espinosa, D. M. Angel Fernández y D. Eduardo Romero brindan mediante la recopilación y puesta al día en este nuevo formato electrónico de muchos de los apuntes que él mismo creó para la primitiva asignatura de “Servosistemas”, y posteriormente “Fundamentos de Regulación Automática” de la Titulación de Ingeniería Técnica Industrial en Electrónica Industrial de la Escuela Superior de Ingeniería de Cádiz.

El contenido del libro repasa los temas básicos de los sistemas de control, haciendo una introducción inicial de conceptos en el primer capítulo. Posteriormente el Capítulo 2 y 3 tratan la transformada de Laplace y Algebra de bloques como herramientas de manejo y diseño. Los capítulos siguientes se dedican a la exposición del régimen transitorio y permanente de los servosistemas, el lugar de las raíces y su compensación. Los capítulos 8 y 9 se encargan de la somera descripción del dominio de la frecuencia y su compensación. Esto supone un conocimiento necesario básico para trabajar con servosistemas. La última parte del libro trata descripción interna, haciendo hincapié en el análisis de estabilidad y el diseño. Posteriormente a este bloque se han anexado un par de capítulos: El capítulo 13 sobre simulación y un último capítulo 14 que introduce los sistemas no lineales.

El libro utiliza una sencilla estructuración y presentación con numerosas figuras y ejemplos. La realización y revisión del manuscrito ha sido llevada a cabo por el profesor D. Daniel Espinosa en conjunción con el profesor Dr. D. Rafael González. También incluye una nueva generación de figuras y gráficos (a partir de MATLAB y POWERPOINT) por parte del profesor M. Angel Fernández, que facilitará el uso del libro a los alumnos de asignaturas de Regulación Automática de Escuelas Técnicas.



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. SISTEMAS DE CONTROL

Un sistema de control es una combinación de elementos que actúan conjuntamente con la finalidad de controlar una cierta magnitud (salida) de acuerdo con el valor que toma otra (entrada).

Existen sistemas de control con varias entradas y salidas, pero en lo sucesivo nos referiremos solamente a los que tienen una sola entrada y una sola salida, como el que se representa en la siguiente figura.



### 1.2. SISTEMAS DE CONTROL DE BUCLE ABIERTO Y CERRADO

Supongamos que pretendemos tostar rebanadas de pan con un grado de tueste determinado, para lo cual disponemos de un tostador al eléctrico dotado de un cronómetro con el cual se puede graduar el tiempo de funcionamiento del mismo. Ajustando adecuadamente el cronómetro podemos lograr el grado de tueste adecuado, pero si posteriormente ocurriese algún cambio en las condiciones propias del pan u otra razón similar no se obtendría el mismo grado de tueste y el dispositivo no podría por si solo de forma automática corregir el tiempo de tueste para obtener el resultado apetecido.

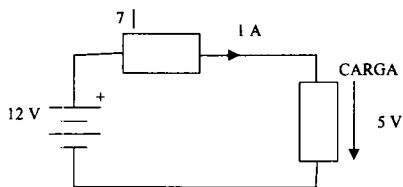
Supongamos un tostador en el cual un sistema fotoeléctrico vigilase continuamente la rebanada de pan y desconectase la corriente eléctrica cuando el grado de tueste fuese el deseado, cualquier alteración en las condiciones del proceso determinaría una variación automática del tiempo de tueste, por lo que el resultado sería siempre el deseado.

En el primero de los casos tenemos un sistema de control de bucle abierto, cuya principal característica es que el resultado o salida no puede influir sobre el proceso para corregirlo automáticamente.

El tostador del segundo caso es un sistema de control de bucle cerrado en el cual la salida influye sobre al sistema y permite de forma automática la introducción de correcciones que determinen lograr o acercarse a los resultados deseados. A esta acción de “retroceso” de la señal de salida hacia la entrada del sistema es lo que llamaremos desde ahora en adelante “realimentación”.

Consideremos un segundo ejemplo: con una batería de  $12\text{ V}$  se desea alimentar un receptor que precise  $5\text{ V}$ , siendo su corriente nominal de  $1\text{ A}$ .

FIG.1:



Una posible solución sería la de la figura 1.1, en la que se utiliza una resistencia para absorber la tensión sobrante, pero este circuito tendría el inconveniente de que cualquier variación de la intensidad de la carga modificaría la tensión en la misma sin que se realizase ninguna acción correctora que restableciese la tensión de salida en el valor apropiado. En este caso tendríamos un sistema de bucle abierto.

Un dispositivo más eficiente que el anterior podría ser el de la figura 1.2, que corresponde a un circuito regulador de tensión muy simple, en el que si, por ejemplo, se produce un aumento de tensión en la salida sobre el valor de equilibrio este se transmitiría hasta la base de  $T_2$  por mediación del divisor de tensión formado por  $R_3$  y  $R_4$ , lo cual determinaría un aumento de la corriente de colector del mismo que haría aumentar la caída de tensión en  $R_2$ , disminuiría la tensión de base de  $T_1$ , que haría bajar la tensión de salida en contra del anterior aumento. Estamos, por tanto, en el caso de un sistema de bucle cerrado.

### 1.3. DIAGRAMA DE BLOQUES

Un sistema de control de bucle cerrado puede representarse mediante un diagrama de bloques como el de la figura 1.3, en el que se pueden apreciar los siguientes elementos:

FIG.2:

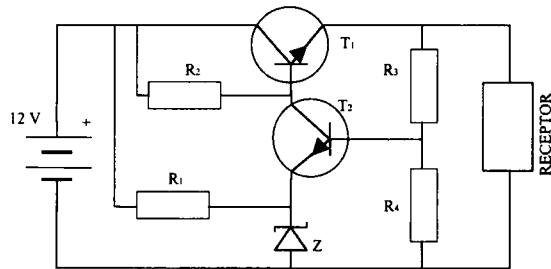
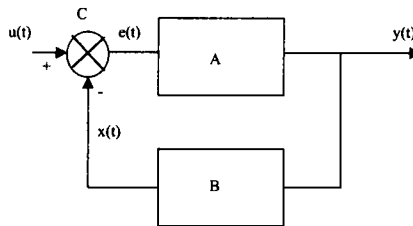


FIG.3:



Magnitud controlada  $y(t)$ . - Variable que se debe mantener en el valor prescrito. Es la salida del sistema.

Magnitud de referencia  $u(t)$ . - Es la entrada del sistema de control y determina que valor ha de tomar la magnitud controlada.

Cadena directa  $A$ . - Produce y gobierna la magnitud controlada de acuerdo con la señal recibida a su entrada (señal de error).

Cadena de realimentación  $B$ . - Facilita los medios para conducir la magnitud controlada o una función de ella hasta el comparador.

Comparador  $C$ . - Como su nombre indica, sirve para comparar la magnitud controlada o una función de ella con la magnitud de referencia.

Señal de error  $e(t)$ . - Es la diferencia entre la magnitud de referencia y la salida o una función de ella. Es la salida del comparador y entrada de la cadena directa.

En el anterior ejemplo del regulador de tensión, la magnitud controlada es la tensión de salida que se aplica a la carga, la magnitud de referencia es la tensión del diodo zener,

el comparador es al transistor  $T_2$ , la cadena de realimentación está constituida por el divisor de tensión formado por  $R_3$  y  $R_4$  y las conexiones del mismo a la base de  $T_2$  y a la salida. La cadena directa está constituida por  $T_1$ , la batería de  $12 V$  y la carga.

#### 1.4. SERVOSISTEMAS Y REGULADORES

Son sistemas de control de bucle cerrado y su principal diferencia está en la finalidad de los mismos.

Regulador.- Su finalidad es mantener constante la magnitud controlada de acuerdo con el valor de la magnitud de referencia, que también es constante, sin que influyan las perturbaciones que se produzcan. Podemos poner como ejemplo el regulador de tensión de la figura 1.2.

Servosistema.- Un servosistema tiene como finalidad el obtener una salida (magnitud controlada) que siga lo más fielmente posible a la entrada (magnitud de referencia), pero a un nivel de potencia mayor. Un servosistema es por tanto un sistema de control de bucle cerrado amplificador de potencia.

En el servosistema, la entrada es variable y se pretende que la salida “siga” a la entrada. Por el contrario, en el regulador la entrada es constante.

En el servosistema la fuente de error es la variación de la entrada y en el regulador lo son las perturbaciones exteriores que separan al sistema del estado requerido.

En el servomecanismo se produce una amplificación de potencia en la señal de salida, que es lo que interesa y en el regulador la señal de salida en sí no interesa, sino que solo es una medida de algo que sucede en la planta controlada, que es lo que realmente interesa.

Junto a estas diferencias y a otras que pudieran establecerse se presenta una profunda semejanza entre ambos, ya que los dos conducen al mismo diagrama de bloques realimentado que se muestra en la figura 1.3, pero no debe olvidarse nunca que físicamente se trata de dos problemas diferentes.

Como ejemplo elemental podemos considerar el servosistema de posición de la figura 1.4, que emplea un motor de corriente continua controlado por armadura, en donde  $A$  es un amplificador diferencial cuya salida alimenta el inducido del motor, representándose la resistencia y autoinducción del mismo por  $R$  y  $L$ . El campo del motor es fijo por lo que se alimenta con una tensión constante. El eje del motor mueve una carga y al potenciómetro  $P_2$ . El potenciómetro  $P_1$  se mueve a mano. Ambos potenciómetros están alimentados por tensiones constantes que suponemos iguales y sus cursores se conectan a las entradas del amplificador.

Si inicialmente suponemos que las tensiones en los cursores de los potenciómetros son iguales, la salida del amplificador será nula y el motor permanecerá quieto, pero si movemos el cursor de  $P_1$  el motor se pondrá en marcha hasta que el cursor de  $P_2$  tenga una tensión igual a la de  $P_1$ .

En este servosistema la magnitud controlada es la posición del eje del motor, la magnitud de referencia la posición del cursor de  $P_1$  y la cadena de realimentación está constituida por  $P_2$  con sus conexiones eléctricas y mecánicas, la cadena directa la forman  $A$ , el motor y la carga, y el comparador as también  $A$ .

Nótese el efecto amplificador de potencia de este dispositivo, que nos permite mediante el pequeño esfuerzo de mover el cursor de  $P_1$ , posicionar una carga.

En todo lo que sigue nos referiremos principalmente a los servosistemas.

## 1.5. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Definiremos como función de transferencia de un sistema la relación entre su salida y su entrada, es decir:

$$F.deT = \frac{Salida}{Entrada}$$

Si nos fijamos en el diagrama de bloques de la figura 1.3 podríamos considerar las siguientes funciones de transferencia:

a) Función de transferencia de la cadena directa:

$$G(t) = \frac{y(t)}{e(t)}$$

b) Función de transferencia de la cadena de realimentación:

$$H(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$$

c) Función de transferencia en bucle cerrado:

$$U(t) = \frac{y(t)}{u(t)}$$

d) Función de transferencia en bucle abierto:

$$M(t) = \frac{x(t)}{e(t)}$$

Entre las funciones de transferencia anteriormente definidas se pueden encontrar algunas relaciones:

$$e(t) = u(t) - x(t) = u(t) - H(t) \cdot y(t)$$

$$y(t) = G(t) \cdot e(t) = G(t) \cdot u(t) - G(t) \cdot H(t) \cdot y(t)$$

Despejando  $y(t)$  queda:

$$y(t) = \frac{G(t)}{1 + G(t) \cdot H(t)} \cdot u(t)$$

De donde se deduce:

$$W(t) = \frac{G(t)}{1 + G(t) \cdot H(t)}$$

La anterior expresión nos da la función de transferencia en bucle cerrado en función de la de la cadena directa y de la de la cadena de realimentación.

$$M(t) = \frac{x(t)}{e(t)} = \frac{x(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)}{e(t)}$$

$$M(t) = H(t) \cdot G(t)$$

Cuando  $H(t) = 1$  se dice que tenemos un sistema con realimentación unitaria, en cuyo caso es:

$$W(t) = \frac{G(t)}{1 + G(t)} \quad ; \quad M(t) = G(t)$$

## 1.6. DETERMINACIÓN DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Para conocer las prestaciones de un sistema de control es de gran importancia el conocer cual es su función de transferencia, lo cual se puede lograr mediante medición experimental o mediante cálculos cuando se conocen las características de los distintos elementos que constituyen el sistema.

Como ejemplo calcularemos la función de transferencia del servosistema de posición de la figura 1.4.

Designaremos por:

*A.*- Ganancia del amplificador

*i.*- Corriente en el inducido

*T.*- Par motor

*f.*- Coeficiente de amortiguamiento viscoso.

*M.*- Momento de inercia de la carga respecto de su eje

*V<sub>1</sub>.*-Tensión a la salida del amplificador

*θ.*- Posición angular del eje del motor

*θ<sub>1</sub>.*-Posición angular del potenciómetro *P<sub>1</sub>*

*U.*- Tensión en el cursor de *P<sub>2</sub>*

*U<sub>1</sub>.*-Tensión en el cursor de *P<sub>1</sub>*

El par motor es proporcional a la intensidad que circula por el inducido y al flujo, pero si suponemos el flujo constante al estar el inductor alimentado a tensión constante (despreciando la reacción del inducido), tenemos:

$$T = K \cdot i$$

Por otra parte, el par motor debe ser igual a la suma del par de inercia más el par de amortiguamiento:

$$T = M \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Igualando las dos expresiones anteriores y despejando *i* queda:

$$i = \frac{M \cdot D^2 + f \cdot D}{K} \cdot \theta$$

La fuerza contraelectromotriz en el inducido es proporcional al flujo y a la velocidad angular del mismo, pero si suponemos constante el flujo, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$V_1 = R \cdot i + L \cdot Di + K_1 \cdot D\vartheta$$

La tensión de salida del amplificador es proporcional a la diferencia de las tensiones de sus entradas:

$$V_1 = A \cdot (U_1 - U)$$

Las tensiones en los cursores de los potenciómetros son proporcionales a los desplazamientos de los mismos si estos lineales:

$$U_1 = K_2 \cdot \vartheta_1 \quad ; \quad U = K_2 \cdot \vartheta$$

De las anteriores ecuaciones se deduce:

$$A \cdot K_2 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta) = R \cdot i + L \cdot Di + K_1 \cdot D\vartheta$$

Sustituyendo  $i$  por su valor y ordenando se obtiene:

$$W(t) = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{A \cdot K_2 \cdot K / L \cdot M}{D^3 + \left(\frac{R}{L} + \frac{f}{M}\right)D^2 + \left(\frac{R \cdot f}{L \cdot M} - \frac{K_1 \cdot K}{L \cdot M}\right)D + \frac{A \cdot K_2 \cdot K}{L \cdot M}}$$

Que es la función de transferencia en bucle cerrado del servosistema considerado.

## 1.7. SISTEMAS LINEALES

Diremos que un sistema es lineal cuando cumple el principio de superposición, es decir: si para la entrada  $u_1$  se obtiene la salida  $y_1$  y para la entrada  $u_2$  se obtiene la salida  $y_2$ , al aplicar la entrada  $K_1 \cdot u_1 + K_2 \cdot u_2$ , la salida es  $K_1 \cdot y_1 + K_2 \cdot y_2$ .

Es difícil encontrar sistemas de control que sean perfectamente lineales, pero en gran cantidad de casos se puede admitir con buena aproximación la linealidad, al menos dentro de unos ciertos márgenes de funcionamiento.

El modelo matemático de un sistema lineal está constituido por ecuaciones diferenciales lineales, como las obtenidas en la sección 1.6, lo cual ha permitido el desarrollo

de una teoría sobre los mismos general y sencilla. En todo lo que sigue nos referiremos a sistemas lineales o que puedan considerarse como tales.

## 1.8. RÉGIMEN TRANSITORIO Y PERMANENTE

Al resolver la ecuación diferencial implícita en la función de transferencia de un servosistema lineal para una cierta entrada se obtiene la suma de dos expresiones claramente identificables:

- a) Solución particular de la ecuación completa.- Representa el régimen permanente del sistema, el cual interesa se aproxime lo más posible al valor determinado por la entrada.
- b) Solución general de la ecuación homogénea.- Es un término indeseable que interesa tienda rápidamente a cero para que se alcance el régimen permanente lo más pronto posible. Conjuntamente con el anterior representa el régimen transitorio. En ciertos casos la solución general de la ecuación homogénea no tiende a cero, lo cual es inadmisibles para un sistema de control.

Como resumen de lo anterior, podemos establecer las siguientes condiciones que debe cumplir un servosistema:

- a) El límite de la solución general de la ecuación homogénea cuando el tiempo tiende a infinito debe ser cero. Los sistemas que cumplen esta condición diremos que son estables.
- b) Un servosistema es tanto mejor cuanto antes se alcance el valor de régimen permanente, es decir, cuanto antes tienda a cero la solución general de la ecuación homogénea. Diremos que un servosistema es más rápido cuanto más pronto tienda a cero el límite anteriormente mencionado.
- c) El valor de régimen permanente debe aproximarse lo más posible al valor determinado por la entrada. Cuanto mejor se cumpla esta condición diremos que el servosistema es más preciso.



## CAPÍTULO 2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

### 2.1. DEFINICIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformación de Laplace directa de una función  $f(t)$  del tiempo viene dada por la ecuación:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s)$$

La evaluación de la integral da lugar a una función  $F(s)$  que tiene como variable a  $s$ , la cual es compleja. Hay que hacer notar que como los límites de integración son cero e infinito es indiferente el valor que tenga  $f(t)$  en un tiempo negativo o cero.

Hay limitación sobre la posibilidad de que una función  $f(t)$  pueda sufrir la transformación de Laplace. Básicamente el requisito necesario es el que la integral de Laplace converja lo que significa que tiene un valor funcional definido. Para ello la función  $f(t)$  debe: (a) ser continua en cada intervalo finito, y (b), ser de orden exponencial. Una función es continua en un intervalo finito si tal intervalo puede dividirse en un número finito de subintervalos, en los que la función es finita y en cuyos extremos  $f(t)$  tiene límites a su izquierda y a su derecha.

Una función es de orden exponencial si existe una constante  $a$ , tal que el producto  $e^{-st} \cdot f(t)$  sea limitado para todo valor de  $t$  mayor que uno finito  $T$ .

### 2.2. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUNAS FUNCIONES

En el estudio de los servosistemas son muy empleadas las funciones escalón unitario, exponencial decreciente, senoide, rampa y parábola, por lo que a continuación se relacionan sus transformadas de Laplace.

Función escalón unitario:

$$L[U(s)] = \frac{1}{s}$$

Exponencial decreciente:

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s + a}$$

Senoide:

$$L[\cos \omega t] = \frac{s}{a^2 + \omega^2}$$

Función rampa  $f(t) = t$

$$L[t] = \frac{1}{s^2}$$

Función parábola  $f(t) = t^2 / 2$

$$L\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{1}{s^3}$$

### 2.3. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección se presentan varios teoremas y propiedades de la transformación de Laplace.

a) Superposición.- La transformación de Laplace es una operación lineal que cumple el principio de superposición:

$$L[A \cdot f_1(t) + B \cdot f_2(t)] = A \cdot L[f_1(t)] + B \cdot L[f_2(t)] = A \cdot F_1(s) + B \cdot F_2(s)$$

b) Derivación.- Si la transformada de Laplace de  $f(t)$  es  $F(s)$  y si la primera derivada de  $f(t)$  respecto el tiempo es transformable, entonces:

$$L[Df(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$$

El término  $f(0)$  es el valor del límite de la función  $f(t)$  cuando  $t$  se aproxima al valor cero desde valores positivos. Esto afecta a funciones tales como la función escalón que puede ser indefinida en  $t = 0$ .

La transformada de la segunda derivada es:

$$L[D^2 f(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

La transformada de la derivada n-sima es:

$$L[D^n f(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

En el caso de que  $f(t)$  y sus derivadas fuesen cero para  $t = 0$  tendríamos lo siguiente:

$$L[D^n f(t)] = s^n \cdot F(s)$$

c) Integración.- Si la transformación de la función  $f(t)$  es  $F(s)$ , tenemos, siendo  $C$  la constante de integración:

$$L\left[\frac{f(t)}{D}\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{C}{s}$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s)$$

d) Valor final.- Si  $f(t)$  y su derivada son transformables y si el límite de  $f(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito existe, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Es decir: que el comportamiento de  $f(t)$  en las proximidades de  $t =$  infinito está ligado al comportamiento de  $s \cdot F(s)$  en el entorno de  $s = 0$ .

e) Valor inicial.- Si la función  $f(t)$  y su derivada son transformables y existe el límite de  $s \cdot F(s)$  para el tiempo tendiendo a infinito, entonces:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

## 2.4. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LAS FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

La forma general de una función de transferencia de un sistema lineal es la siguiente:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{P(D)}{Q(D)} = W(t)$$

Siendo  $P(D)$  y  $Q(D)$  dos polinomios en el operador  $D$ .

La anterior expresión puede ponerse en la forma:

$$D^n y + A \cdot D^{n-1} y + B \cdot D^{n-2} y + \dots = K \cdot D^m u + L \cdot D^{m-1} u + \dots$$

Suponiendo condiciones iniciales nulas, que es la forma normalizada que se utiliza en el estudio de los servosistemas, y si la transformadas de  $y(t)$  y de  $U(s)$  son  $Y(s)$  y  $U(s)$ , de acuerdo con los teoremas y propiedades de la transformada de Laplace. considerados anteriormente, tenemos:

$$\begin{aligned} s^n \cdot Y(s) + A \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + B \cdot s^{n-2} \cdot Y(s) + \dots = \\ = K \cdot s^m \cdot U(s) + L \cdot s^{m-1} \cdot U(s) + \dots \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$Q(s) \cdot Y(s) = P(s) \cdot U(s)$$

Si designamos por  $W(s)$  a la transformada de Laplace de  $W(t)$ , podemos poner:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Es decir, la transformada de Laplace de la salida de un sistema lineal para condiciones iniciales nulas se obtiene multiplicando la transformada de Laplace de la entrada por la función de transferencia, en la que se sustituye el operador  $D$  por la variable compleja  $s$ , que es lo que designamos como transformada de Laplace de la función de transferencia.

Generalizando las anteriores conclusiones, podemos considerar un sistema de control transformado de Laplace cuyo diagrama de bloques sería el de la figura 2.1. que se muestra a continuación:

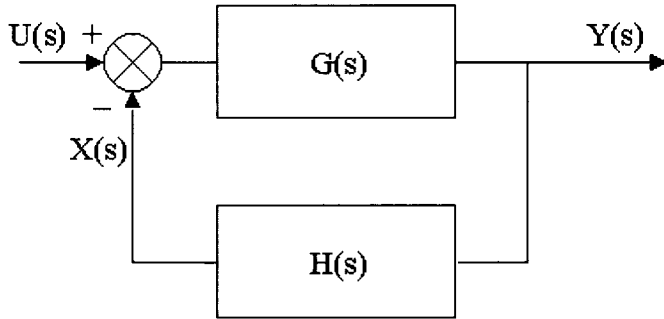


Figura 2.1.



# CAPÍTULO 3

## ALGEBRA DE BLOQUES

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Algunos sistemas pueden tener una estructura compleja por lo que para reducirlos a la forma simplificada de diagrama de bloques como la considerada en el capítulo primero es necesario el efectuar algunas transformaciones.

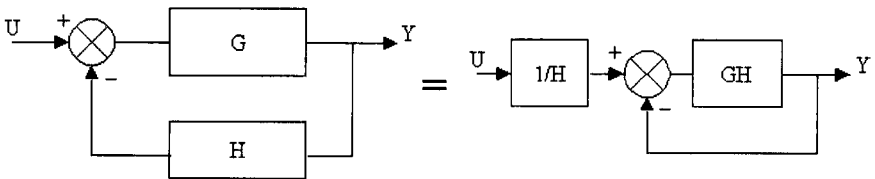
Consideremos seguidamente algunos teoremas de transformación de diagramas de bloques aplicables a sistemas lineales.

### 3.2. REDUCCIÓN A REALIMENTACIÓN UNITARIA

Para reducir el diagrama de bloques de un sistema con realimentación no unitaria a otro con realimentación unitaria basta con sustituir la función de transferencia de la cadena directa por la función de transferencia en bucle abierto y situar un bloque a la entrada con la inversa de la función de transferencia de la cadena de realimentación, según muestra la figura 3.1.

En este caso la función de transferencia en bucle cerrado es la siguiente:

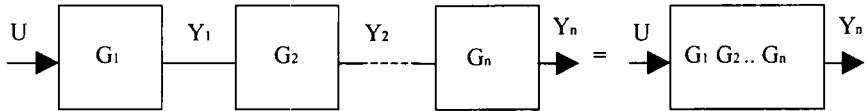
FIG.3.1:



$$W = \frac{1}{H} \cdot \frac{G \cdot H}{1 + G \cdot H} = \frac{G}{1 + G \cdot H}$$

Que sigue siendo la misma del diagrama de bloques con realimentación no unitaria.

FIG.3.2:

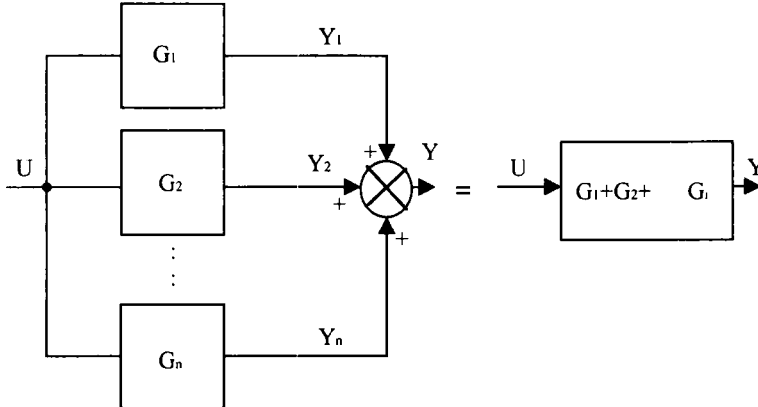


### 3.3. BLOQUES EN CASCADA

Si tenemos varios bloques en cascada de funciones de *transferencia*  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$  y sus correspondientes salidas  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_n$ , (ver figura 3.2), la función de transferencia equivalente es:

$$G = \frac{Y_n}{U} = \frac{Y_1}{U} \cdot \frac{Y_2}{Y_1} \cdots \frac{Y_n}{Y_{n-1}} = G_1 \cdot G_2 \cdots G_n$$

FIG.3.3:



### 3.4. BLOQUES EN PARALELO

La función de transferencia resultante de varios bloques conectados en paralelo (figura 3.3) es la siguiente:

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{Y_1}{U} + \frac{Y_2}{U} + \cdots + \frac{Y_n}{U} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

### 3.5. DESPLAZAMIENTO DE PUNTOS DE SUMA Y CONEXIÓN

Se consideran los casos que muestran las figuras 3.4 a 3.9 cuyas demostraciones no se incluyen por su simplicidad.

FIG.3.4:

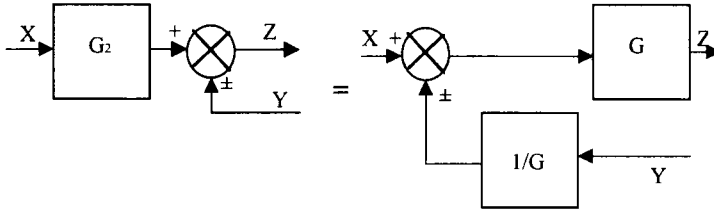


FIG.3.5:

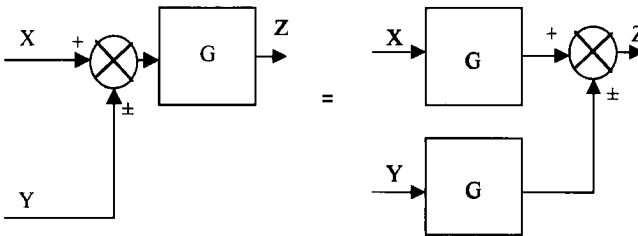


FIG.3.6:

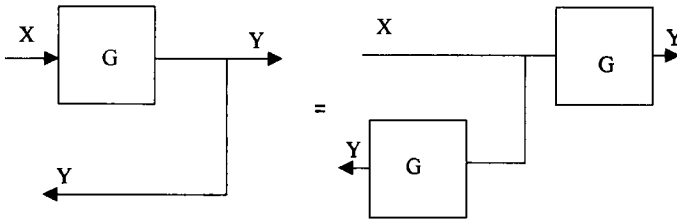


FIG.3.7:

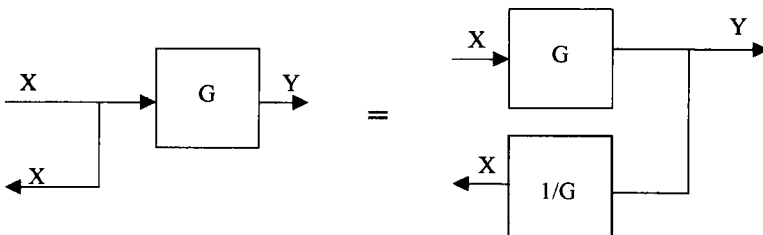


FIG.3.8:

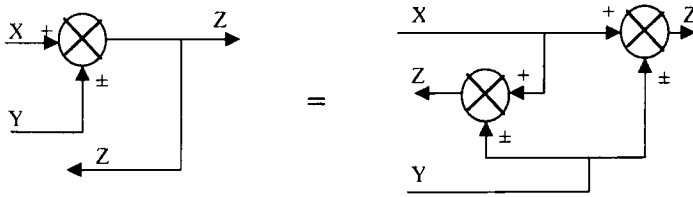
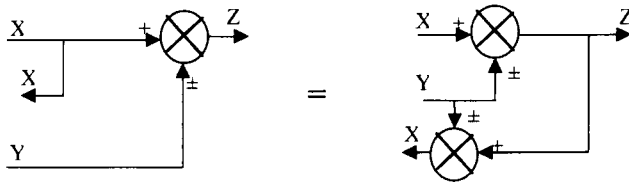
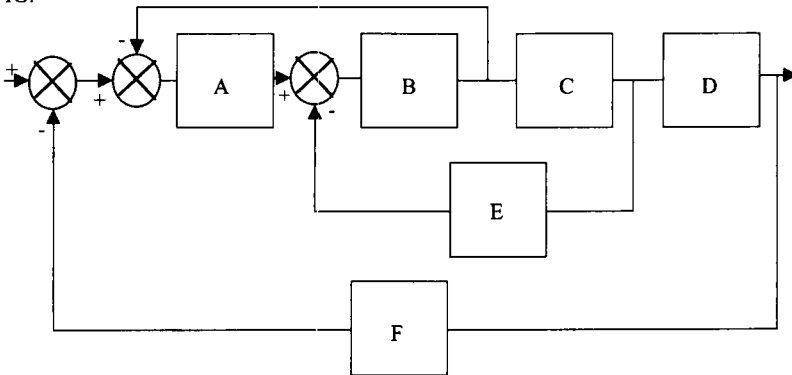


FIG.3.9

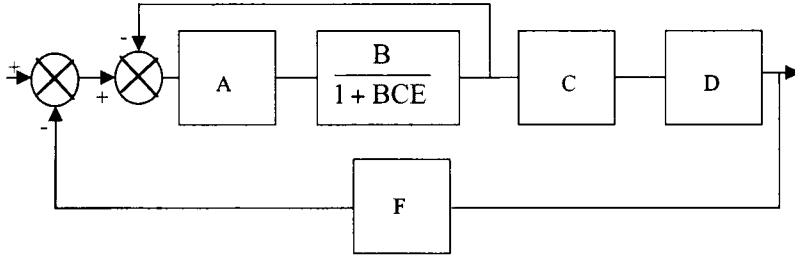


**EJEMPLO.-** Reducir a un único bloque el diagrama siguiente:

FIG:



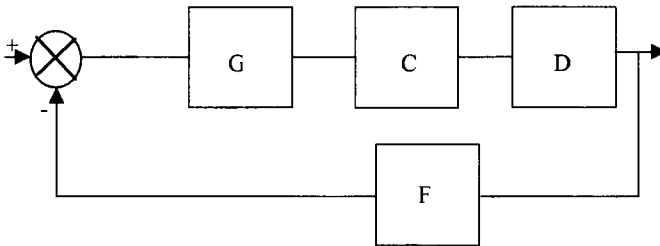
- a) Desplazamos el bloque  $C$  hacia la derecha, situándolo después de la conexión y reducimos a un solo bloque los  $B$ ,  $E$  y uno de los bloques  $C$ :



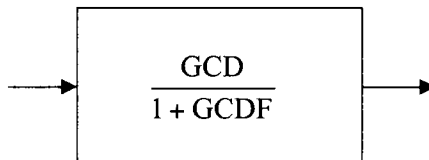
- b) El último bloque obtenido y el  $A$  está en cascada, por lo que se pueden reducir a un único bloque cuya función de transferencia es el producto de las de los dos bloques, y con la realimentación unitaria queda:

$$G = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B + B \cdot C \cdot E}$$

El diagrama de bloques queda según la siguiente figura:



- c) El último diagrama es lo suficientemente simple como para poderlo reducir directamente a un solo bloque, según muestra la siguiente figura:





## CAPÍTULO 4

### RÉGIMEN PERMANENTE DE LOS SERVISISTEMAS

#### 4.1. TIPOS DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

La forma general de la función de transferencia en bucle abierto para un sistema con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K \cdot P(s)}{s^n \cdot Q(s)}$$

En donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son dos polinomios de coeficientes constantes en  $s$  de la forma  $A_1 + A_2 s + \dots + s^m$

Al valor de  $n$  se le denomina tipo de la función de transferencia (cero, uno, etc.).

Tipo 0 ( $n=0$ ). - Un error constante hace que la magnitud controlada permanezca también constante.

Tipo 1 ( $n=1$ ). - Cuando la señal de error es constante la magnitud controlada es una rampa.

Tipo 2 ( $n=2$ ). - Si la señal de error es constante la salida es una función de segundo grado.

Si el grado de  $P(s)$  es  $m$  y el de  $Q(s)$  es  $r$  se suele cumplir que:

$$n + r \geq m$$

Es decir, el orden de la función de transferencia, que es el mismo de la ecuación diferencial implícita en ella, es  $n+r$ . Esto se debe a la naturaleza física de los sistemas realimentados de control, no obstante, hay excepciones.

## 4.2. CONSTANTES DE ERROR

Se define como constante de error de posición  $K_p$ :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$K_p$  tiene valor finito cuando  $G(s)$  es de tipo cero, en los restantes casos el límite tiende a infinito.

Se define como constante de error de velocidad  $K_v$ :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)$$

$K_v$  es nula cuando  $G(s)$  es de tipo cero, es finita si  $G(s)$  es de tipo uno y el límite tiende a infinito en los restantes casos.

La constante de error de aceleración  $K_a$  se define mediante la expresión:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)$$

El anterior límite es cero para  $G(s)$  de tipo cero o uno y finito para tipo dos.

Las anteriores definiciones corresponden al caso de un servosistema con realimentación unitaria, en caso contrario se debe sustituir  $G(s)$  por el producto  $G(s) \cdot H(s)$ , es decir, por la función de transferencia en bucle abierto.

## 4.3. ERROR EN RÉGIMEN PERMANENTE

Es la diferencia entre el valor que toma la magnitud controlada cuando alcanza el régimen permanente y la entrada, en el caso de un sistema con realimentación unitaria. Interesa que sea nulo o lo más pequeño posible y es clara medida de la precisión de un servosistema.

En general, puede definirse el error en régimen permanente como el límite de la señal de error cuando el tiempo tiende a infinito es decir:

$$Erp = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Para un sistema con realimentación unitaria se cumple:

$$e(t) = u(t) - y(t) = u(t) - G(t) \cdot e(t)$$

Despejando de la anterior  $e(t)$ :

$$e(t) = \frac{u(t)}{1 + G(t)}$$

Aplicando el teorema del valor final:

$$Erp = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot U(s)}{1 + G(s)}$$

Por tanto el error en régimen permanente depende de la clase de entrada y de la función de transferencia  $G(s)$ . Calcularemos el error en régimen permanente para tres distintas clases de entradas.

a) Entrada en escalón:

$$Erp = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s/s}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para entrada en escalón el error en régimen permanente es finito si  $G(s)$  es de tipo cero y nulo para los restantes tipos.

b) Entrada en rampa:

$$Erp = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s/s^2}{1 + G(s)} = \frac{1}{K_v}$$

Para esta entrada el error es infinito si  $G(s)$  es de tipo cero, finito si es de tipo uno y nulo para  $G(s)$  de tipo dos.

c) Entrada en parábola:

$$Erp = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s/s^3}{1 + G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

En este caso, el error en régimen permanente es finito si  $G(s)$  es de tipo dos e infinito si es de tipo cero o uno.

Las expresiones obtenidas anteriormente se han calculado para entradas unitarias, por lo que el error en régimen permanente se obtiene en tanto por uno.

**EJEMPLO.-** Como ejemplo aclaratorio, calculemos el error en régimen permanente de un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en bucle abierto es:

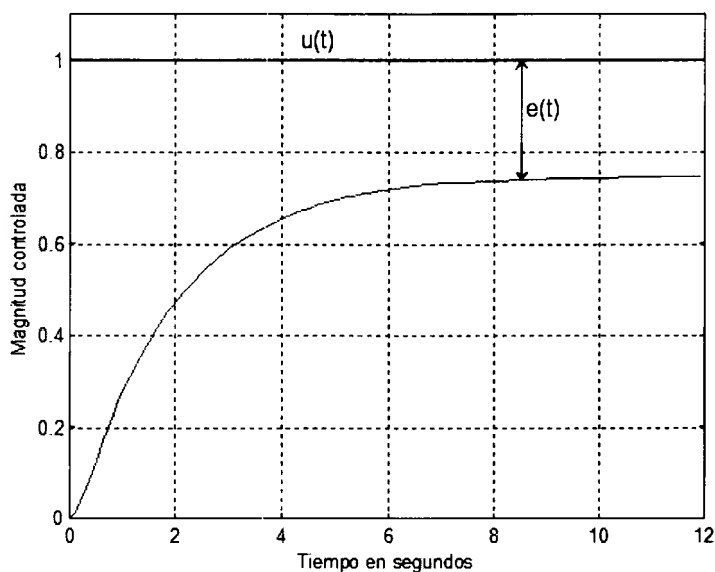
$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 8s + 1}$$

Consideremos en primer lugar el caso de una entrada en escalón.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s^2 + 8s + 1} = 3$$

$$E_{rp} = \frac{1}{1+3} = 0.25 = 25\%$$

FIG.4.1:



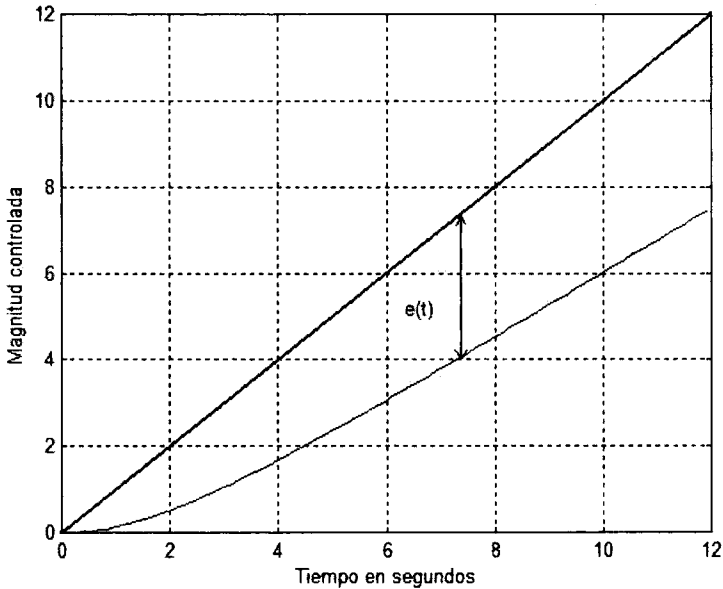
En la figura 4.1. se ha representado la respuesta de este sistema para una entrada en escalón unitario y, como puede apreciarse,  $e(t)$  disminuye con el tiempo y tiende a 0.25 ya que la salida se aproxima asintóticamente a 0.75 en lugar de hacerlo a la unidad.

Para el caso de entrada en rampa  $u(t)=t$  tenemos:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s^2 + 8s + 1} = 0$$

$$Erp = 1 / K_v \rightarrow \infty$$

FIG 4.2:



Este resultado puede interpretarse claramente en la figura 4.2. en la que aparece la salida de este sistema para una entrada en rampa de pendiente unitaria  $u(t)=t$ . El error  $e(t)$  aumenta con el tiempo, pues la salida tiende asintóticamente hacia  $0.75 t - 1.5$  en lugar de hacerlo hacia  $t$ .



## CAPÍTULO 5

### RÉGIMEN TRANSITORIO DE LOS SERVOSISTEMAS

#### 5.1. GENERALIDADES

Como hemos visto en el capítulo precedente, la evaluación del régimen permanente de los servosistemas lineales es sumamente simple, llegándose de forma sencilla a conclusiones claras. El análisis del régimen transitorio es algo más complejo y ha supuesto el desarrollo de diversas técnicas que permiten obtener resultados rápidos, aunque muchas veces sean sólo aproximados. Para la evaluación del régimen transitorio se suelen utilizar señales de entrada normalizadas y se parte de condiciones iniciales nulas. En el análisis del régimen transitorio utilizaremos la entrada en escalón.

#### 5.2. RESPUESTA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Consideremos el caso de un sistema simple de segundo orden (sin ceros), cuya función de transferencia en bucle cerrado siempre puede ponerse en la siguiente forma:

$$W(s) = \frac{K}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\delta$  es el coeficiente de amortiguamiento, cuyo significado veremos más adelante.

$\omega_n$  es la pulsación natural no amortiguada y representa la que tendría la señal de salida si el sistema diese oscilaciones mantenidas ( $\delta = 0$ ).

Si igualamos a cero el denominador de la función de transferencia en bucle cerrado anterior (ecuación característica), obtenemos las raíces  $P_1$  y  $P_2$ . Considerando una entrada en escalón unitario ( $U(s)=1/s$ ), tenemos:

$$Y(s) = \frac{K}{s(s-1)(s-2)} = \frac{K}{\omega_n^2 s} + \frac{A}{s-P_1} + \frac{B}{s-P_2}$$

En donde:

$$P_1 = -\omega_n(\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})$$

$$P_2 = -\omega_n(\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})$$

$$A = K/P_1 \cdot (P_1 - P_2)$$

$$B = K/P_2 \cdot (P_2 - P_1)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace se obtiene:

$$y(t) = K/\omega_n^2 + A \cdot e^{P_1 t} + B \cdot e^{P_2 t}$$

De acuerdo con los valores que tomen  $P_1$  y  $P_2$  obtenemos distintas formas de respuesta:

- Si  $\delta \leq -1$ ,  $P_1$  y  $P_2$  son reales y positivos, por lo que en  $y(t)$  aparecen exponenciales que no tienden a cero, como muestra la figura 5.1.
- Para  $-1 < \delta < 0$  los polos tienen valores complejos de parte real positiva, por lo que la respuesta (figura 5.2.) tiene una forma senoidal de amplitud creciente.
- Cuando  $\delta = 0$  los dos polos son imaginarios puros y la respuesta es una señal senoidal de pulsación  $\omega_n$  (figura 5.3.).
- Cuando sea  $0 < \delta < 1$  los polos serán complejos de parte real negativa por lo que la respuesta es como la de la figura 5.4., una forma senoidal de amplitud decreciente. En este caso se dice que el sistema es subamortiguado.
- Para  $\delta \geq 1$  se obtienen raíces reales negativas (dobles para  $\delta = 1$ ) por lo que en esta respuesta aparecen formas exponenciales que tienden a cero. Para  $\delta > 1$  se dice que el sistema es sobreamortiguado y para  $\delta = 1$  que el amortiguamiento es crítico. Véase la figura 5.5.

FIG.5.1:

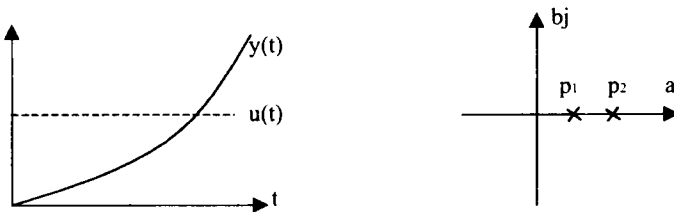


FIG.5.2:

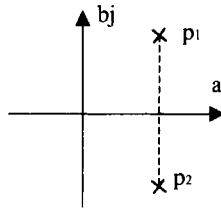
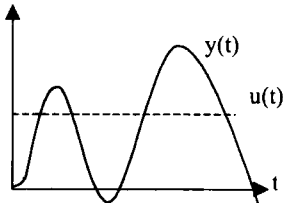


FIG.5.3:

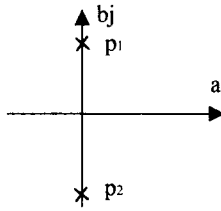
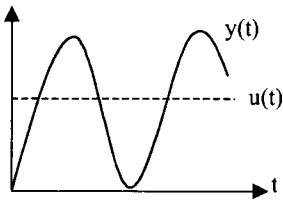


FIG.5.4:

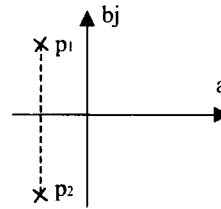
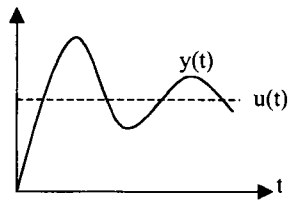


FIG.5.5:

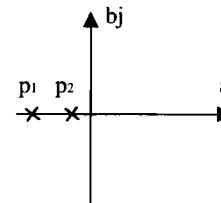
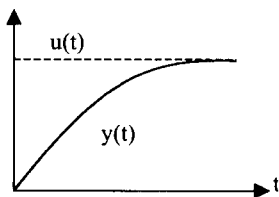
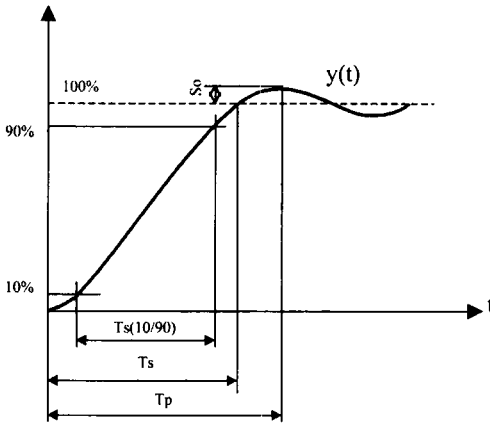


FIG.5.6:



En los casos a, b y c no se alcanza el valor de régimen permanente  $K/\omega_n$  por lo que corresponden a dispositivos inestables que son inadmisibles como sistemas de control. En las respuestas de los casos d y e el límite de  $y(t)$  al tender el tiempo a infinito es  $K/\omega_n^2$ , por lo que son estables y apropiados para un sistema de control.

De estas dos formas admisibles de respuesta la que se considera en general como más apropiada es la del caso d por las siguientes razones:

- Cuando  $\delta \geq 1$  la magnitud controlada tarda mucho en aproximarse al valor de régimen permanente en comparación con la respuesta de tipo subamortiguada, por lo que los sistemas sobreamortiguados son "lentos".
- Una respuesta sobreamortiguada supone en un servosistema de posición el alcanzar el régimen permanente con velocidad nula, lo cual puede producir en la práctica el que se incremente el error en régimen permanente por efecto de alinealidades (huelgos, zonas muertas, etc.), aunque la porción lineal del sistema sea uno o superior.

### 5.3. RAPIDEZ Y ESTABILIDAD RELATIVA

Para evaluar la rapidez de respuesta de un sistema en forma sencilla podemos definir, según muestra la figura 5.6. :

Tiempo de subida ( $T_s$ ). - Es el tiempo que transcurre desde que se aplica un escalón en la entrada hasta que la salida alcanza por primera vez el valor de régimen permanente. Este valor es infinito para respuestas sobreamortiguadas, por lo que se suele emplear

más corrientemente el tiempo de subida del 10 % al 90 %, que se puede aplicar tanto para respuestas sobreamortiguadas como subamortiguadas.

Tiempo de pico ( $T_p$ ). – Es el tiempo que pasa desde que se aplica un escalón a la entrada hasta que la salida alcanza el primer máximo. Sólo se puede aplicar a respuestas subamortiguadas.

Dentro de los sistemas con respuesta subamortiguada los hay más o menos oscilantes y se acostumbra a considerar una respuesta de este tipo como más o menos estable relativamente aunque siempre sea estable en forma absoluta. Un índice de la estabilidad relativa es la sobreoscilación ( $S_o$ ), que es el exceso sobre el valor de régimen permanente del primer máximo de la salida expresado en tanto por ciento sobre el régimen permanente. En sistemas sobreamortiguados la sobreoscilación es cero.

#### 5.4. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN SUBAMORTIGUADOS

Como hemos visto, la forma de respuesta que en general es más adecuada corresponde a la de tipo subamortiguada, por lo que haremos un análisis un poco más detenido de esta forma de respuesta.

El coeficiente de amortiguamiento ha de ser mayor de cero y menor de uno en un sistema de respuesta subamortiguada, por lo que las raíces de la ecuación característica pueden ponerse en la forma:

$$P_1 = -\delta\omega_n - j\sqrt{1-\delta^2}\omega_n$$

$$P_2 = -\delta\omega_n + j\sqrt{1-\delta^2}\omega_n$$

Por otra parte tenemos:

$$Y(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Cuya transformada inversa de Laplace es:

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} - \frac{K \cdot e^{-\delta\omega_n t}}{\omega_n^2 \sqrt{1-\delta^2}} \cdot \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \arccos\delta)$$

Para calcular el tiempo de pico, derivamos la anterior expresión e igualamos a cero:

$$y'(t) = \frac{K}{\omega_n^2 \sqrt{1-\delta^2}} \left[ \begin{array}{l} \delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \cdot \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \arccos \delta) \\ - e^{-\delta \omega_n t} \omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot \text{cos}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t) + \arccos \delta \end{array} \right]$$

$$\text{tg}(\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \arccos \delta) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

$$\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t + \arccos \delta = \arccos \delta + n\pi$$

$$\omega_n \sqrt{1-\delta^2} \cdot t = n\pi$$

Los distintos máximos y mínimos de  $y(t)$  se obtienen dando a  $n$  los valores naturales. El primer máximo es para  $n=1$ , por tanto resulta:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

Sustituyendo este valor en la expresión  $y(t)$  obtenemos la amplitud del primer máximo:

$$y_m = \frac{K}{\omega_n^2} + \frac{K}{\omega_n^2} \cdot e^{-\delta \pi / \sqrt{1-\delta^2}}$$

El valor determinado anteriormente lo empleamos para calcular la sobreoscilación:

$$S_o = 100 \cdot \frac{y_m - K/\omega_n^2}{K/\omega_n^2}$$

$$S_o = 100 \cdot e^{-\delta \pi / \sqrt{1-\delta^2}}$$

El tiempo de subida podemos calcularlo igualando  $y(t)$  al valor de régimen permanente  $K/\omega_n^2$ , resultando:

$$T_s = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

De las expresiones obtenidas anteriormente se deduce que:

- La sobreoscilación sólo depende del coeficiente de amortiguamiento, aumentando o disminuyendo este.
- El tiempo de pico y el tiempo de subida, si es constante la pulsación natural no amortiguada, decrecen al disminuir el coeficiente de amortiguamiento.
- El tiempo de pico y el tiempo de subida, manteniendo constante  $\delta$ , decrecen al aumentar  $\omega_n$ .

En la siguiente tabla se dan algunos valores de la sobreoscilación en tanto por ciento, tiempo de subida del 10% al 90% por la pulsación natural no amortiguada y del tiempo de pico por la misma pulsación (ambos valores adimensionales), en función del coeficiente de amortiguamiento.

$\delta$	$S_o$	$\omega_n T_{s-10/90}$	$\omega_n T_p$
0.200	52.66	1.203	3.206
0.225	48.41	1.231	3.224
0.250	44.43	1.260	3.245
0.275	40.71	1.290	3.268
0.300	37.23	1.321	3.293
0.325	33.97	1.354	3.322
0.350	30.92	1.389	3.354
0.375	28.06	1.425	3.389
0.400	25.38	1.463	3.428
0.425	22.88	1.503	3.471
0.450	20.53	1.546	3.518
0.475	18.35	1.590	3.570
0.500	16.30	1.637	3.628
0.525	14.40	1.687	3.691
0.550	12.63	1.740	3.762
0.575	10.99	1.795	3.840
0.600	9.48	1.854	3.927
0.625	8.08	1.916	4.024
0.650	6.81	1.982	4.134
0.675	5.65	2.052	4.258
0.700	4.60	2.127	4.399

**Ejemplo.** – Suponiendo que un servosistema con realimentación unitaria tiene por función de transferencia en bucle abierto:  $G(s) = 16 / s(s+4)$ , tenemos lo siguiente:

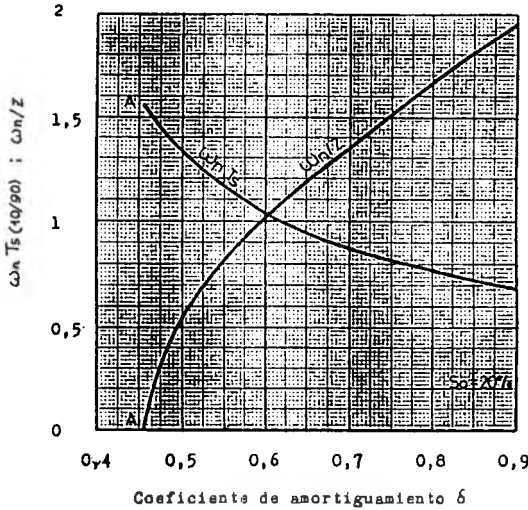
$$\omega_n = 4;$$

$$\delta = 0.5;$$

$$T_s - 10/90 = 0.409 \text{ seg};$$

$$S_O = 16.3 \%$$

fig.5.7:



En la anterior figura 5.7. aparece la respuesta de un sistema simple de segundo orden (sin ceros), para la entrada en escalón y distintos valores del coeficiente de amortiguamiento. Se ha tomado como unidad de amplitud de la magnitud controlada el valor de régimen permanente.

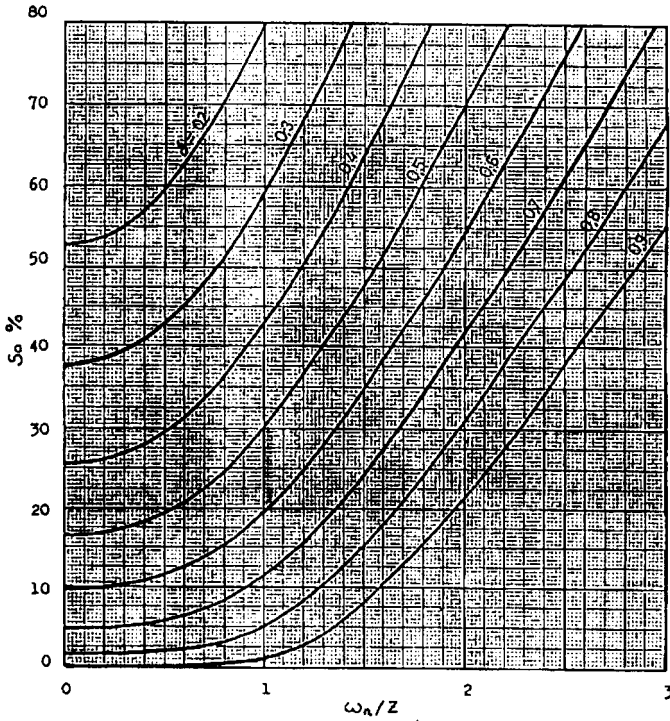
### 5.5. INFLUENCIA DE UN CERO

La función de transferencia en bucle cerrado de un sistema de segundo orden con un cero puede ponerse de la forma:

$$W(s) = \frac{K(s - z)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Podríamos realizar un análisis similar al del caso del sistema simple de segundo orden, que aunque algo más engorroso nos conduciría a soluciones parecidas, pero consideraremos solamente la influencia cualitativa de la inclusión del cero sobre el caso precedente.

fig.5.8



El cero hace un efecto “diferenciador” en la función de transferencia, lo cual determina que las variaciones bruscas de la entrada se transmitan más rápidamente a la salida, lo cual se traduce en mayor rapidez de respuesta y, por tanto, disminución del tiempo de pico y tiempo de subida para una misma sobreoscilación y con respecto a los sistemas simples de segundo orden. Esto se ve claramente en la figura 5.8. cuyas curvas se han trazado para sobreoscilación constante del 20 %, en la que los puntos A corresponden al caso de la función de transferencia sin cero. Como puede apreciarse, cualquier combinación de  $\omega_n/z$  y  $\delta$  para  $S_0 = 20\%$  da un tiempo de subida del 10 % al 90 % menor que en el caso de no haber cero.

fig.5.9:

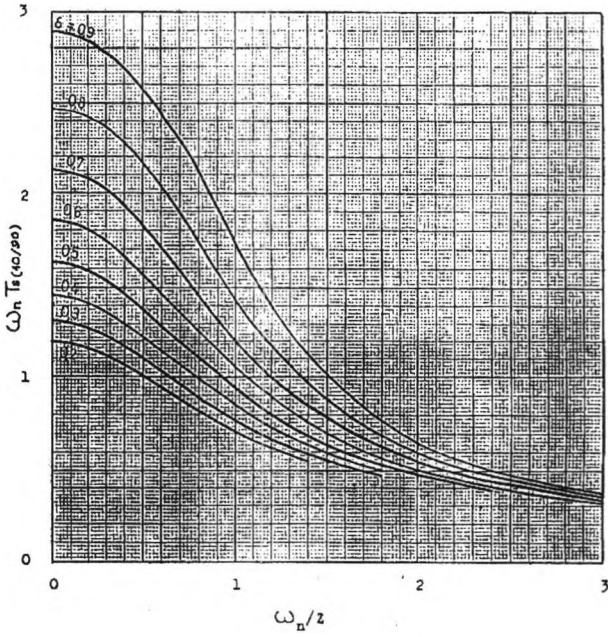
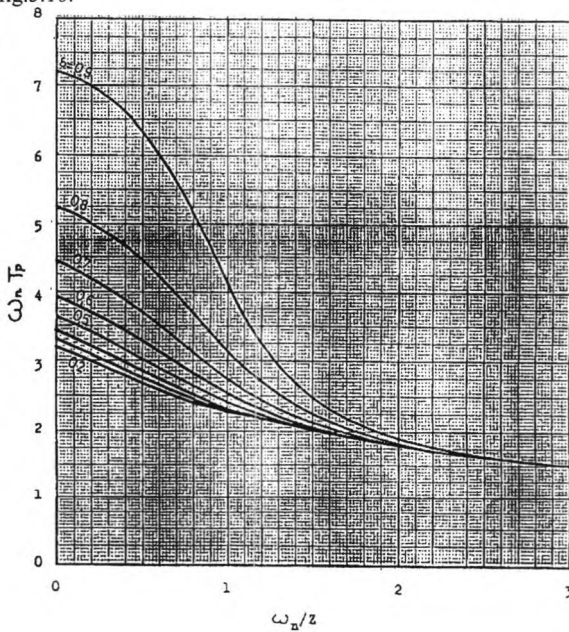


fig.5.10:

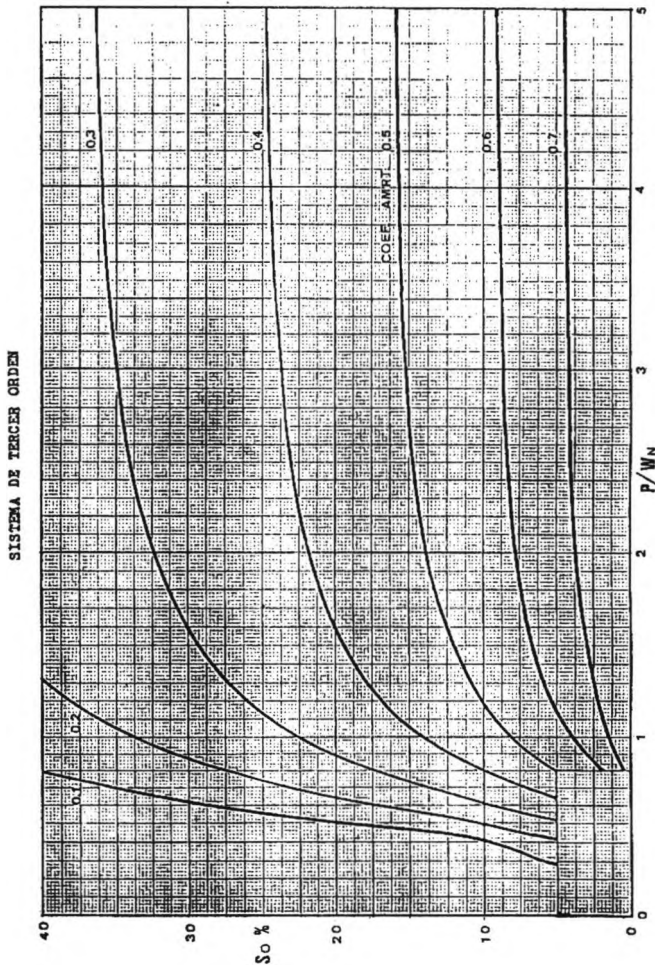


Las curvas de la figura 5.9. a 5.10. han sido obtenidas mediante integración numérica de la ecuación diferencial de este tipo de sistemas y en ellas puede apreciarse que el efecto del cero sobre la oscilación, el tiempo de pico y el tiempo de subida es pequeño cuando  $|z|$  es grande en comparación con la pulsación natural no amortiguada, sobre todo para valores grandes del coeficiente de amortiguamiento.

Como criterio práctico, se puede considerar despreciable el efecto del cero si se cumple que:

$$|z| > 5\delta\omega_n \quad \text{para} \quad \delta > 0.5$$

fig.5.11:



## 5.6. SISTEMAS DE TERCER ORDEN

Consideremos un sistema de tercer orden sin ceros, cuya función de transferencia en bucle cerrado tiene dos polos complejos de parte real negativa y un polo real  $p$  también menor que cero:

$$W(s) = \frac{K}{(s-p)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

La presencia del polo adicional produce un efecto sobre el sistema de segundo orden contrario al del cero, considerado anteriormente, por lo que aumenta el tiempo de subida para sobreoscilación constante, como puede apreciarse en las figuras 5.12. a 5.14 en las que se ha representado  $S_o$ ,  $T_p$ , y  $T_s$ , para distintos coeficientes de amortiguamiento y en función de la relación del polo con la pulsación natural no amortiguada.

Como puede apreciarse en las mencionadas figuras, el comportamiento del sistema de tercer orden tiende asintóticamente al de segundo orden al tender  $p/\omega_n$  hacia infinito. En la práctica el efecto del polo adicional es casi despreciable cuando  $p/\omega_n$  es superior a cinco.

**Ejemplo.** – Si un sistema de tercer orden tiene la función de transferencia en bucle cerrado:

$$W(s) = \frac{12.8}{(s+3.2)(s^2 + 1.6s + 4)}$$

Tenemos:

$$\omega_n = 2; \quad |p| = 3.2; \quad p/\omega_n = 1.6; \quad \delta = 0.4$$

De los correspondientes gráficos deducimos:

$$S_o = 20 \%; \quad T_s = 1.72 / 2 = 0.875 \text{ sg}; \quad T_p = 4.15 / 2 = 2.075 \text{ sg}$$

fig.5.12

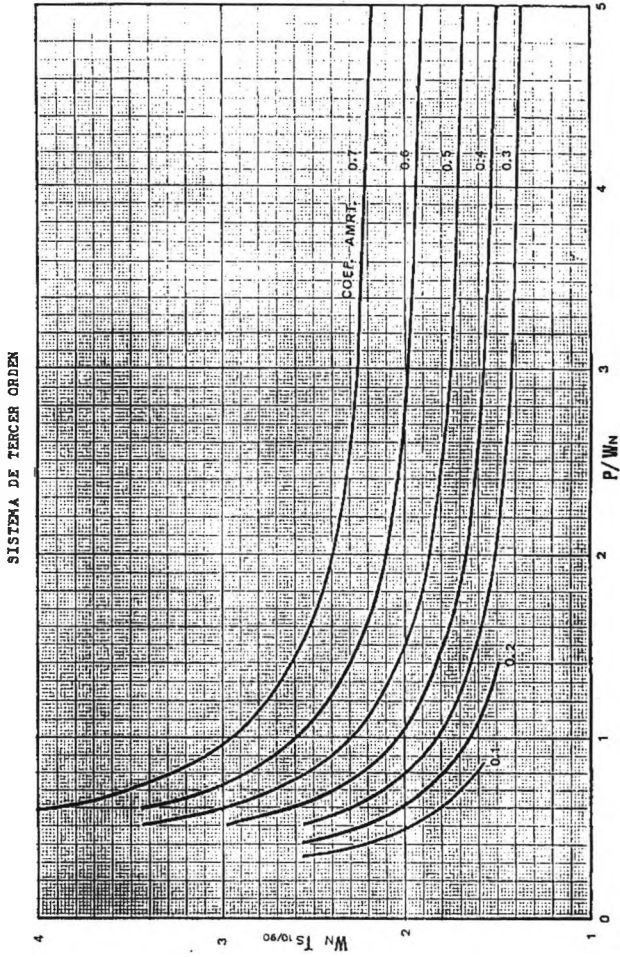
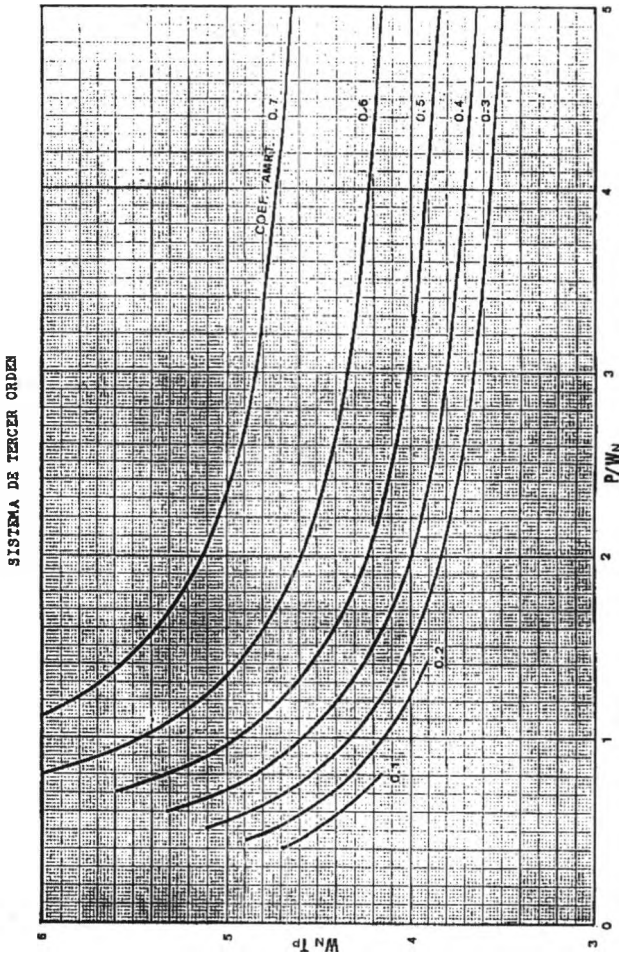


fig.5.13



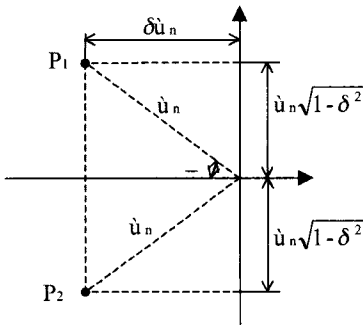
## CAPÍTULO 6 LUGAR DE LAS RAÍCES

### 6.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha visto en el anterior capítulo, la posición en el plano complejo de las raíces de la ecuación característica: determina la forma de respuesta de un sistema, y para que el mismo sea estable es condición necesaria y suficiente que las mencionadas raíces se encuentren en el semiplano de parte real negativa excluido el eje imaginario.

De lo dicho anteriormente se deduce la importancia del conocimiento de la posición de las raíces de la ecuación característica, por lo que se han desarrollado las llamadas técnicas de análisis en el lugar de las raíces, el cual podemos definir como el lugar geométrico en el plano complejo de las raíces que se obtienen de la ecuación característica al hacer variar en la misma algún parámetro. Estas técnicas permiten de forma fácil el obtener información sobre la respuesta temporal del sistema en estudio y la influencia que el parámetro considerado tiene sobre la misma.

FIG.6.1:

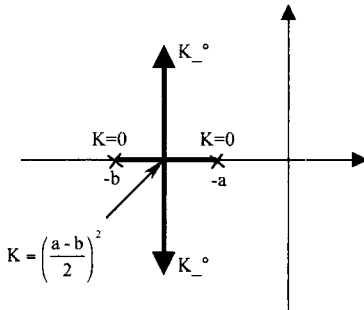


La función de transferencia en bucle abierto se puede poner en la forma:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{K \cdot N(s)}{D(s)}$$

En donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son dos polinomios en  $s$ , y  $K$  es el factor de ganancia, que en todo lo que sigue emplearemos como parámetro del lugar de las raíces. La ecuación car-

FIG.6.2:



acterística se puede poner en función de la anterior expresión:

$$K \cdot \frac{|N(s)|}{|D(s)|} = 1$$

Suponiendo que  $K$  sea mayor que cero, la anterior ecuación se puede descomponer en otras dos:

Condición modular: 
$$K \cdot \frac{|N(s)|}{|D(s)|} = 1$$

Condición angular: 
$$\text{Arg}[N(s)] - \text{Arg}[D(s)] = (2r + 1)\pi$$

En donde  $r$  toma valores enteros.

Los valores de  $s$  que satisfagan a las anteriores ecuaciones corresponderán a puntos del lugar de las raíces.

Nótese que para que un punto  $s_1$  pertenezca al lugar de las raíces es suficiente con que cumpla la condición angular y que la condición modular nos determinará que valor toma  $K$  en ese punto del lugar:

$$K = \frac{|D(s)|}{|N(s)|}$$

Al cumplir  $s_1$  la condición angular, el valor de  $K$  que se obtenga de la anterior expresión deberá ser real.

## 6.2. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Como se determinó en el capítulo precedente, las raíces de la ecuación característica de un sistema de segundo orden sin ceros y subamortiguado tienen la forma:

$$P_1 = -\delta\omega_n + j\sqrt{1-\delta^2}\omega_n$$

$$P_2 = -\delta\omega_n - j\sqrt{1-\delta^2}\omega_n$$

Que son dos polos complejos conjugados, cuyo módulo es:

$$|P_1| = |P_2| = \omega_n$$

El ángulo  $\beta$  de la figura 6.1. (suplemento del argumento de  $P_1$ ) tiene el valor:

$$\beta = \arccos \frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \arccos \delta$$

De las anteriores consideraciones se pueden deducir los siguientes resultados aplicables al semiplano de parte real negativa para sistemas simples de segundo orden:

- Las semicircunferencias de centro en el origen son lugares geométricos de pulsación natural no amortiguada constante.
- Las semirectas que pasan por el origen son lugares geométricos de coeficiente de amortiguamiento constante, es decir, la sobreoscilación es constante en las mismas y disminuye al decrecer el ángulo  $\beta$ .
- Las semirectas paralelas al eje real son lugares geométricos de tiempo de pico constante, cuyo valor es inversamente proporcional a la distancia al eje real. El tiempo de pico es  $p$  dividido por la mencionada distancia.

El lugar de las raíces de un sistema simple de segundo orden es sumamente fácil de dibujar. Supongamos que un sistema con realimentación unitaria tiene los polos reales  $-a$  y  $-b$  en la función de transferencia en bucle abierto:

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

La correspondiente ecuación característica es:

$$s^2 + (s+b) \cdot s + ab + K = 0$$

De la anterior ecuación se obtienen las raíces:

$$-\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - K}$$

Cuando tenemos  $0 \leq K \leq (a-b)^2/4$  dos raíces reales negativas que están comprendidas entre  $-a$  y  $-(a+b)/2$  y cuya parte imaginaria crece en valor absoluto al aumentar  $K$ .

El lugar de las raíces de este sistema es el representado en la figura 6.2.

De lo anteriormente deducido podemos resumir las siguientes conclusiones válidas para un sistema simple de segundo orden como el considerado anteriormente:

- a) La sobreoscilación es cero para  $K \leq (a-b)^2/4$
- b) Para  $K > (a-b)^2/4$  la sobreoscilación crece y el tiempo de pico decrece al crecer  $K$ .

Si los polos de la función de transferencia en bucle abierto fuesen complejos conjugados,  $-a \pm bj$ , la ecuación característica es:

$$s^2 + 2as + a^2 + b^2 + K = 0$$

Cuyas raíces son siempre complejas conjugadas de la forma:

$$-a \pm j\sqrt{b^2 + K}$$

Su parte real es constante ( $-a$ ) y la parte imaginaria es  $b$  para  $K = 0$  y crece en valor absoluto con  $K$ . El lugar de las raíces para este caso es el de la figura 6.3.

### 6.3. TRAZADO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

En el apartado anterior hemos visto lo sencillo que resulta el trazado del lugar de las raíces para sistemas de segundo orden sin ceros, pero en otros casos el método aplicado anteriormente puede no dar tan buenos resultados, por lo que consideraremos seguidamente varias reglas de trazado del lugar de las raíces aplicables en cualquier caso.

Consideraremos como punto de partida la función de transferencia en bucle abierto en forma factorizada:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{nc})}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{np})}$$

Y las condiciones modular y argumental:

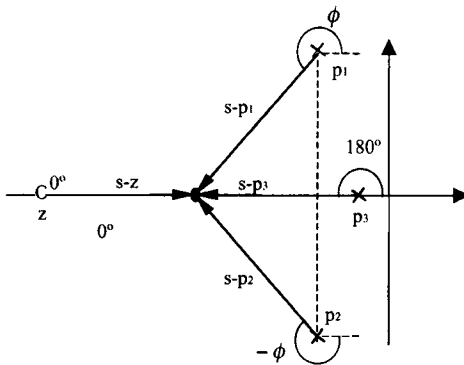
$$K \frac{|s-z_1||s-z_2|\dots|s-z_{nc}|}{|s-p_1||s-p_2|\dots|s-p_{np}|} = 1$$

$$\begin{aligned} & \text{Arg}(s-z_1) + \text{Arg}(s-z_2) + \dots + \text{Arg}(s-z_{nc}) - \\ & \text{Arg}(s-p_1) - \text{Arg}(s-p_2) - \dots - \text{Arg}(s-p_{np}) = \\ & = (2r+1)\pi \end{aligned}$$

- a) Zonas del eje real que pertenecen al lugar de las raíces. – Al aplicar la condición angular a un punto del eje real vemos (figura 6.4.) que los polos y ceros complejos conjugados de la función de transferencia en bucle abierto no influyen por ser sus argumentos iguales y de signo opuesto, los polos y ceros reales que se encuentren a la izquierda del punto aportarán argumentos nulos, por lo que tampoco influyen, pero como los que se encuentran a la derecha aportan  $180^\circ$ , para que el punto considerado sea del lugar el número de ceros menos el de polos ha de ser impar, es decir:

Para que un punto del eje real pertenezca al lugar de las raíces el número de ceros más polos a su derecha debe ser impar.

FIG.6.4:



En la figura anterior, el punto  $s$  y todos los comprendidos entre  $p_3$  y  $z$  pertenecen al lugar de las raíces por cumplir la condición angular (hay un polo a la derecha). El resto del eje real no pertenece al lugar de las raíces.

- b) Número de ramas del lugar de las raíces. – El número de raíces que aparecen al resolver la ecuación característica para cada valor de  $K$  es el grado de la misma y por cada raíz hay una rama del lugar, por tanto:

El número de ramas del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en bucle abierto.

En el caso de la figura 6.4. tendríamos un lugar de las raíces con tres ramas.

- c) Simetría del lugar de las raíces. – Debido a que los polos de la función de transferencia en bucle cerrado cuando sean complejos aparecen siempre por parejas conjugadas, el lugar de las raíces será simétrico con respecto al eje real.
- d) Valor de  $K$  en los ceros y polos. – El límite del primer miembro de la condición angular al tender  $s$  hacia un polo ha de ser uno, pero como el módulo de  $s-p_i$  tiende a cero y los módulos de los restantes vectores son finitos,  $K$  ha de tender hacia cero para que el límite sea finito.

Mediante un razonamiento análogo al del caso anterior, podemos concluir que al tender  $s$  hacia un cero en el primer miembro de la condición modular,  $K$  debe tender hacia infinito para que el límite resultante sea finito. En resumen:

El factor de ganancia  $K$  tiende a cero en los polos y a infinito en los ceros.

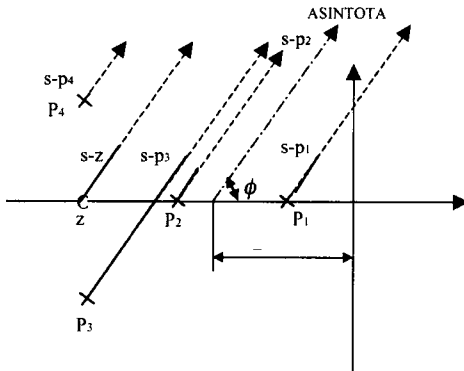
- e) Comienzo y fin de las ramas del lugar. – Las distintas ramas del lugar se obtienen dando sucesivamente valores al factor de ganancia  $K$  desde cero a infinito. Por otra parte, según hemos visto, por cada rama hay un polo y  $K$  vale cero en los mismos, por tanto:

Las ramas del lugar de las raíces comienzan en un polo de la función de transferencia en bucle abierto.

El factor de ganancia tiende a infinito en los ceros, por lo que en cada uno de ellos terminará una rama del lugar de las raíces, pero como hay más ramas que ceros algunas terminarán en puntos del infinito, que son los únicos que hacen cumplirse la condición modular, aparte de los ceros, al tender  $K$  hacia infinito, debido a que normalmente hay más polos que ceros en la función de transferencia en bucle abierto. Como veremos en  $f$ , para que se cumpla la condición angular en esos puntos del infinito, el lugar de las raíces ha de tender hacia ellos según ciertas direcciones, es decir;

Las ramas del lugar de las raíces comienzan en un polo de la función de transferencia en bucle abierto y terminan en un cero de la misma o en un punto del infinito de una cierta dirección (asíntota).

FIG.6.5:



f) Asíntotas. – Si  $s$  es un punto del infinito del lugar de las raíces correspondiente a la dirección  $\phi$ , para que cumpla la condición angular, los argumentos de los vectores trazados con argumento  $\phi$  desde los polos y ceros han de satisfacer:

$$np\phi - nc\phi = (2r + 1)\pi$$

$$\phi = \frac{2r + 1}{np - nc} \pi$$

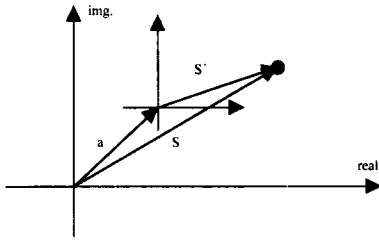
La anterior expresión da la inclinación de las asíntotas del lugar de las raíces, obteniéndose una para cada valor de  $r$ .

Si cada rama del lugar de las raíces comienza en un polo y termina en un cero o en una asíntota, el número de asíntotas ha de ser la diferencia entre el número de polos y el de ceros:

$$Na = np - nc$$

Para el caso representado en la figura 6.5. hay tres asíntotas con argumentos de  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $300^\circ$ .

FIG.6.6:



Las asíntotas tienen un punto común que seguidamente determinaremos, para lo cual ponemos la ecuación característica en la forma:

$$\begin{aligned}
 -K &= \frac{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_{np})}{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_{nc})} = \\
 &= \frac{s^{np} - s^{np-1} \sum_l^{np} p_l + \dots}{s^{nc} - s^{nc-1} \sum_l^{nc} z_l + \dots} = \\
 &= s^{np-nc} + s^{np-nc-1} \left( \sum_l^{nc} z_l - \sum_l^{np} p_l \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Consideremos el punto  $a = \sigma + \omega j$  (figura 6.6.) al que queremos trasladar el origen. Si designamos por  $a$  un complejo referido a los nuevos ejes, se cumple que:

$$s = a + s'$$

Sustituyendo en la expresión obtenida de la ecuación característica resulta:

$$\begin{aligned}
 -K &= (a+s')^{np-nc} + (a+s')^{np-nc-1} \left( \sum_l^{nc} z_l - \sum_l^{np} p_l \right) + \dots \\
 -K &= s'^{np-nc} + \left[ (np-nc)a + \sum_l^{nc} z_l - \sum_l^{np} p_l \right] s'^{np-nc-1} + \dots
 \end{aligned}$$

Consideremos la expresión:

$$s'^{np-nc} = -K \quad (1)$$

Que representa a  $np - nc$  rectas que pasan por el nuevo origen  $a$  y tienen las mismas pendientes que asíntotas, pues:

$$|s'| = \sqrt[np-nc]{K} \quad ; \quad \text{Arg}(s') = \frac{(2r+1)\pi}{np-nc}$$

Si  $a$  fuese un punto de las asíntotas, la expresión (1) sería la ecuación de las mismas.

Como el lugar de las raíces debe tender hacia las asíntotas para valores grandes de  $s$ , la condición para que  $a$  sea un punto de las asíntotas es que los puntos determinados por la expresión (1) satisfagan la ecuación característica referida a los nuevos ejes para valores grandes de  $s$ , lo cual se conseguirá cuando los coeficientes de la ecuación característica sean cero menos el de  $s^{np-nc}$ , o al menos, lo sean los de las potencias de mayor grado de  $s$ .

Aplicando tal condición al coeficiente de obtenemos el siguiente valor de  $a$ :

$$a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{np - nc}$$

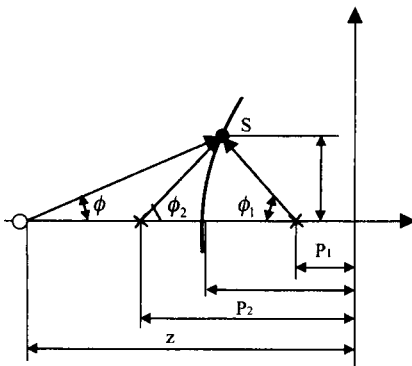
La anterior expresión es la condición para que  $a$  sea un punto de las asíntotas, pero como los polos y ceros de la función de transferencia en bucle abierto, si son complejos, están siempre por parejas conjugadas, el valor que se obtendrá es siempre real, por tanto:

Todas las asíntotas pasan por un punto del eje real  $\sigma$  dado por la fórmula anterior.

g) Puntos de corte del lugar de las raíces con el eje real. – Consideraremos dos casos:

1) La función de transferencia en bucle abierto sólo tiene ceros y polos reales. – En la figura 6.7. se ha representado un caso de 2 polos y un cero reales, siendo  $s$  un punto del lugar de las raíces próximo al eje real y a distancia  $\varepsilon$  del mismo.

FIG.6.7:



Suponiendo que exista corte del lugar de las raíces con el eje real, se realizará en el punto  $\sigma$ , que ha de encontrarse en una zona del eje real que pertenezca al lugar. En tal caso podemos hacer tender a  $s$  hacia el mismo, haciendo que  $\varepsilon$  tienda a cero.

Como  $s$  pertenece al lugar de las raíces, cumple la condición angular:

$$\varphi - \varphi_2 - (\pi - \varphi_1) = (2r + 1)\pi$$

Al hacer tender a  $s$  hacia cero, la ecuación anterior la podemos transformar en:

$$\operatorname{tg}\varphi - (\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1) = (2r + 2)\pi = 0$$

El segundo miembro siempre será un múltiplo par de  $\pi$ , pues el número de polos más ceros a la derecha del punto de corte es siempre impar.

Sustituyendo las tangentes por sus valores se obtiene:

$$\frac{\varepsilon}{z - \sigma} - \left[ \frac{\varepsilon}{p_2 - \sigma} + \frac{\varepsilon}{p_1 - \sigma} \right] = 0$$

Esta expresión se puede generalizar fácilmente:

$$\sum \frac{l}{z_i - \sigma} = \sum \frac{l}{p_i - \sigma}$$

Las raíces reales de la anterior ecuación son los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje real.

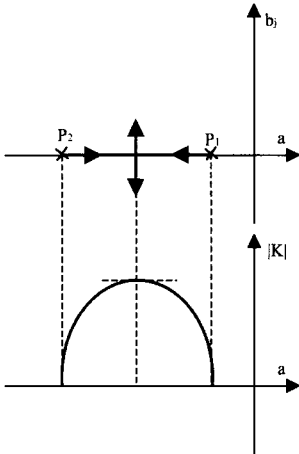
- 2) Los ceros y polos de la función de transferencia en bucle abierto son reales y/o complejos. – Consideremos en primer lugar el caso de un punto de corte entre dos polos, punto que siempre existirá si la zona comprendida entre los polos pertenece al lugar de las raíces.

Si analizamos los valores que toma  $K$  en la zona considerada (figura 8.6), llegaremos a la conclusión de que  $K$  crece desde los polos, donde vale cero, hasta el punto de corte, donde hay un máximo relativo.

Si la zona comprendida entre dos ceros pertenece al lugar de las raíces, debe existir en ella al menos un punto de corte (figura 6.9.), en el que  $K$  toma un valor mínimo relativo. A esta misma conclusión podemos llegar al analizar una zona del eje real entre un cero y  $-\infty$ , cuando pertenece al lugar de las raíces.

Entre un cero y un polo o entre un polo y  $-\infty$  no deben existir necesariamente puntos de corte del lugar de las raíces con el eje real, pero si los hay deben ser, al menos, dos de manera que en el más próximo al polo existirá un máximo relativo de  $K$  y en el más próximo al cero un mínimo, pero también puede suceder que los dos puntos de corte se reúnan en uno solo (figura 6.10.) en cuyo caso tendríamos una raíz triple de la ecuación característica (punto común a tres ramas del lugar de las raíces), con inflexión y tangente horizontal en la gráfica de  $K$ .

FIG.6.8:



En resumen los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje real son soluciones múltiples de la ecuación característica y corresponden a máximos, mínimos o inflexiones con tangente horizontal de  $K = F(s)$ , por lo que cumplirán:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

FIG.6.9:

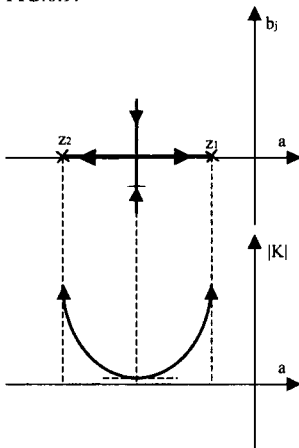
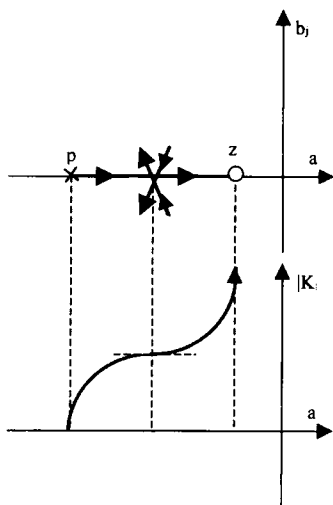


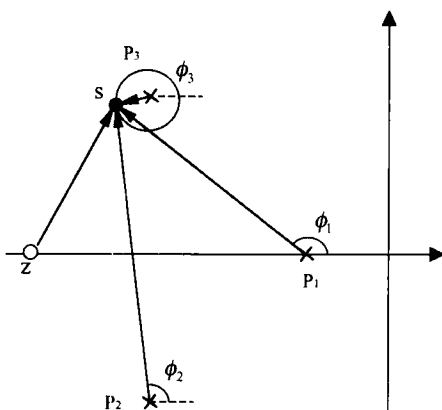
FIG.6.10:



Los polos triples de la función de transferencia en bucle cerrado cumplen:

$$\frac{d^2 K}{ds} = 0$$

FIG.6.11:



h) Ángulo de arranque en un polo o en un cero complejo. – Si queremos conocer el ángulo con que parte el lugar de las raíces desde el polo  $P_3$  (figura 6.11) podemos considerar el punto  $s$  que pertenezca al lugar y próximo a  $P_3$ . Los argumentos de los vectores trazados desde todos los polos y ceros hasta  $s$  deben cumplir la condición angular, por lo que en nuestro caso debe ser:

$$\phi - [\phi_1 + \phi_2 + \phi_3] = (2r + 1)\pi$$

Si hacemos tender  $s$  hacia  $P_3$ , el vector  $s - P_3$  tiende a confundirse con la tangente trazada al lugar de las raíces desde  $P_3$  y su argumento  $\phi_3$  al ángulo de arranque de la rama que parte de  $P_3$ .

En resumen, para determinar el ángulo de arranque desde un polo o un cero complejo se trazan vectores desde todos los restantes polos hasta el polo o cero en cuestión y se aplica la condición angular a sus argumentos y al ángulo de arranque. En el caso de la figura es:

$$\phi_3 = \phi - \phi_1 - \pi/2 - (2r + 1)\pi$$

FIG.6.12:

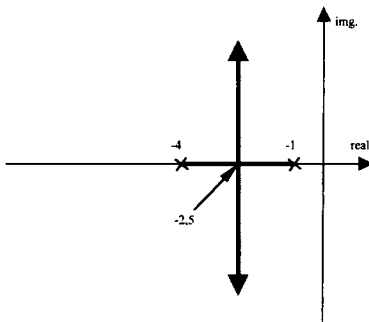


FIG.6.13:

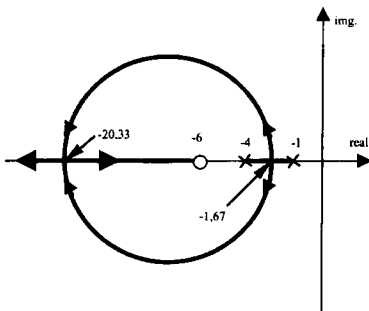
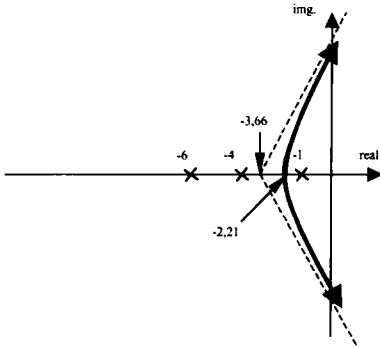


FIG.6.14



**EJEMPLO 1º.**- Sea un sistema con realimentación unitaria cuya función de transferencia en bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)}$$

La zona del eje real que pertenece al lugar de las raíces es la comprendida entre los polos  $-1$  y  $-4$ .

El número de ramas, igual al de polos, es dos.

Las asíntotas son dos ( $np-nc$ ), sus argumentos  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , y el corte de las mismas con el eje real es en el punto  $-2,5$ .

El corte del lugar con el eje real se produce en  $-2,5$ , que es el mismo punto en que se cortan las asíntotas.

El lugar de las raíces de este sistema aparece en la figura 6.12. y, como puede apreciarse, coincide con los resultados obtenidos en 6.2.

**EJEMPLO 2º.**- Al caso anterior se le añade un cero en  $-6$ , con lo que la función de transferencia queda:

$$G(s) = \frac{K(s+6)}{(s+1)(s+4)}$$

El lugar de las raíces en el eje real está comprendido entre  $-1$  y  $-4$  y entre  $-6$  y menos infinito.

Hay dos ramas y una sola asíntota de argumento  $180^\circ$ , que coincide con el eje real.

Los cortes del lugar con el eje real se producen en los puntos  $-1,67$  y  $-20,33$  (ver figura 6.13.).

**EJEMPLO 3º.**- A la función de transferencia del ejemplo 1º se le añade un tercer polo en  $-6$  :

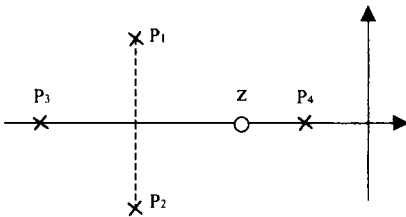
$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)(s+6)}$$

El lugar en el eje real es el mismo del ejemplo anterior (figura 6.14.), hay tres ramas y tres asíntotas, con ángulos de  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $-60^\circ$ , que se cortan en  $-3,66$ . El corte del lugar con el eje real se produce en  $-2,21$ .

#### 6.4. CONFIGURACIÓN EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES Y RESPUESTA

Supongamos que un cierto sistema tiene para un determinado valor de  $K$  la configuración en el lugar de las raíces de la figura 6.15., es decir su función de transferencia en bucle cerrado tiene cuatro polos y un cero.

FIG.6.15



La función de transferencia en bucle cerrado es:

$$W(s) = \frac{K(s-z)}{(s-P_1)(s-P_2)(s-P_3)(s-P_4)}$$

La transformada de Laplace de la magnitud controlada es:

$$Y(s) = W(s)/s = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-P_1} + \frac{C}{s-P_2} + \frac{E}{s-P_3} + \frac{F}{s-P_4}$$

La anterior expresión corresponde a una entrada en escalón unitario y las constantes A, B, etc. tienen los valores:

$$A = \frac{-Kz}{P_1 P_2 P_3 P_4}$$

$$B = \frac{K(P_1 - z)}{P_1(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_1 - P_4)}$$

$$C = \frac{K(P_2 - z)}{P_2(P_2 - P_1)(P_2 - P_3)(P_2 - P_4)}$$

$$E = \frac{K(P_3 - z)}{P_3(P_3 - P_1)(P_3 - P_2)(P_3 - P_4)}$$

$$F = \frac{K(P_4 - z)}{P_4(P_4 - P_1)(P_4 - P_2)(P_4 - P_3)}$$

La antitransformada de  $Y(s)$  es  $y(t)$ :

$$y(t) = A + B e^{P_1 t} + C e^{P_2 t} + E e^{P_3 t} + F e^{P_4 t}$$

Si los polos complejos conjugados  $P_1$  y  $P_2$  tienen de parte real  $a$  y de parte imaginaria  $b$ , la anterior igualdad queda:

$$y(t) = A + e^{at} (B + C) \cos bt + j e^{at} (B - C) \operatorname{sen} bt + E e^{P_3 t} + F e^{P_4 t}$$

$$y(t) = A + e^{at} L \cos(bt + \phi) + E e^{P_3 t} + F e^{P_4 t}$$

Como puede apreciarse los sumandos correspondientes a los polos  $P_3$  y  $P_4$  alargan la duración del transitorio, por lo que su efecto es perjudicial y para minimizarlo es preciso que  $E$  y  $F$  sean pequeños y los módulos de  $P_3$  y  $P_4$  grandes, es decir, para que el efecto perjudicial de los polos adicionales sea pequeño deben estar muy alejados del origen en comparación con  $P_1$  y  $P_2$  y/o próximos a un cero. Cuando tales condiciones se cumplen, la respuesta del sistema dependerá principalmente de  $P_1$  y  $P_2$  y diremos que son los polos dominantes. En este supuesto se puede considerar que aproximadamente se cumple:

$$y(t) = A + e^{at} L \cos(bt + \phi)$$

En donde  $L$  y  $\phi$  toman los valores:

$$L = 2\sqrt{BC} = 2|B|$$

$$\varphi = -\arccos \frac{B+C}{2\sqrt{BC}} = \text{Arg } B$$

Derivando e igualando a cero:

$$y'(t) = a e^{at} L \cos(bt + \phi) - e^{at} L b \sin(bt + \phi) = 0$$

$$\text{tg}(bt + \phi) = \frac{a}{b} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arg } P_1\right)$$

De la anterior igualdad obtenemos el tiempo de pico:

$$T_p = \frac{1}{b} \left( \frac{\pi}{2} - \text{Arg } B - \text{Arg } P_1 \right)$$

Esta expresión se puede generalizar fácilmente:

$$T_p = \frac{1}{b} \left[ \frac{\pi}{2} - \sum_1^{nc} \text{Arg}(P_1 - Z_i) + \sum_2^{np} \text{Arg}(P_1 - P_i) \right]$$

Para calcular la sobreoscilación sustituimos en  $y(t)$ :

$$y_m = A + e^{aT_p} L \cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arg } B - \text{Arg } P_1 + \text{Arg } B\right)$$

$$y_m = A + e^{aT_p} L \frac{b}{|P_1|}$$

$$S_o = 100(y_m - A)/A = \frac{2|B|b}{A|P_1|} e^{aT_p}$$

$$S_o = 100 \frac{|P_1 - z| |P_3| |P_4|}{|z| |P_1 - P_3| |P_1 - P_4|} e^{aT_p}$$

La anterior fórmula se puede generalizar a la siguiente:

$$S_o = 100 \frac{\prod_l^{nc} |P_l - Z_i| |P_i|}{\prod_l^{nc} |Z_i| \prod_3^{np} |P_l - P_i|} e^{aT_p}$$

Las fórmulas obtenidas para el tiempo de pico y la sobreoscilación son sólo exactas para sistemas de segundo orden y aproximadas para orden superior al segundo.

### 6.5. EFECTO DE UN CERO Y UN POLO

En las figuras 6.16. y 6.17. aparecen los lugares de las raíces del sistema simple de segundo orden considerado en el ejemplo 1º de 6.3. al añadirle un cero y un polo a su función de transferencia en bucle abierto.

Como puede apreciarse, cuando el cero está a la derecha del polo (figura 6.16.) el lugar de las raíces se desplaza hacia la izquierda, por lo que mejora el transitorio. Al estar el cero a la izquierda del polo ocurre lo contrario.

En la figura 6.18. aparecen las respuestas de estos dos casos y de los tres ejemplos de 6.3. para  $K_p=10$  . En la tabla adjunta aparecen los polos y ceros de la función de transferencia en bucle abierto y la  $S_o$ ,  $T_p$  y  $T_{s(10/90\%)}$ .

FIG.6.16:

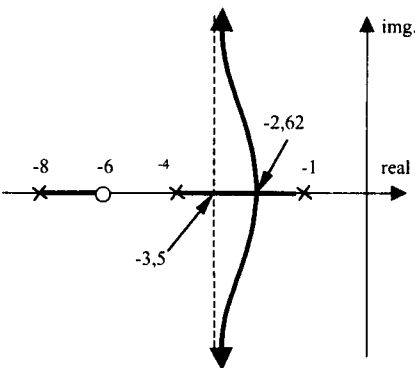


FIG.6.17:

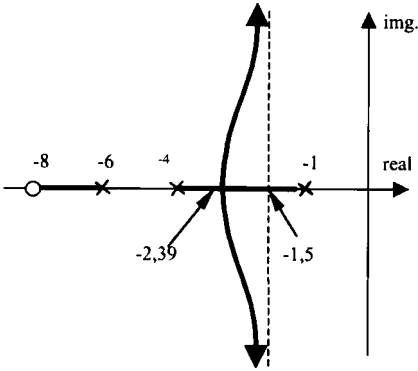
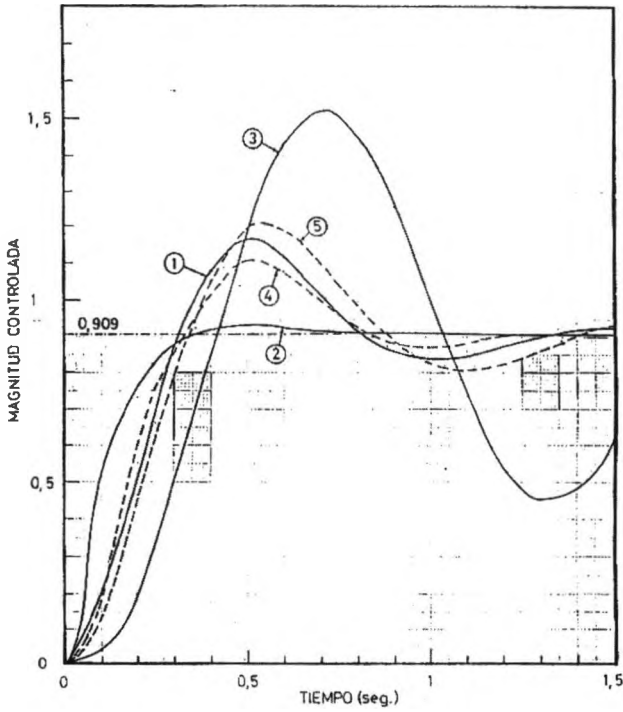


fig 6.18:



N°	POLOS	CERO	So %	Tp	Ts 10/90
1	-1,-4	-	27,8	0,51	0,21
2	-1,-4	-6	2,6	0,51	0,22
3	-1,-4,-6	-	69,1	0,71	0,24
4	-1,-4,-8	-6	22,5	0,46	0,20
5	-1,-4,-6	-8	33,0	0,56	0,23

## CAPÍTULO 7

### COMPENSACIÓN EN EL LUGAR DE LAS RAÍCES

#### 7.1. INTRODUCCIÓN

En muchos casos no es posible encontrar un valor del factor ganancia que permita que se satisfagan simultáneamente las especificaciones impuestas a un servosistema, en cuyo caso, la única solución es introducir alguna variación en la función de transferencia del mismo que mejore el comportamiento del sistema, es decir, “compensarlo”.

Los compensadores podemos dividirlos de acuerdo con su lugar de situación en el diagrama de bloque del sistema, en:

- a) *Compensación en cascada*.- El compensador se coloca en cadena directa como se muestra en la figura 1.7, resultando como nueva función de transferencia de la cadena directa:

$$G^*(s) = C(s)$$

- b) *Compensación por realimentación* .- El compensador se sitúa en el lazo de realimentación, de forma que la nueva función de transferencia de la cadena directa es:

$$G^*(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s) G(s)}$$

FIG.7.1:

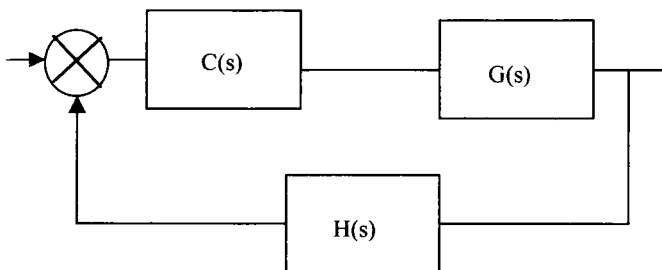
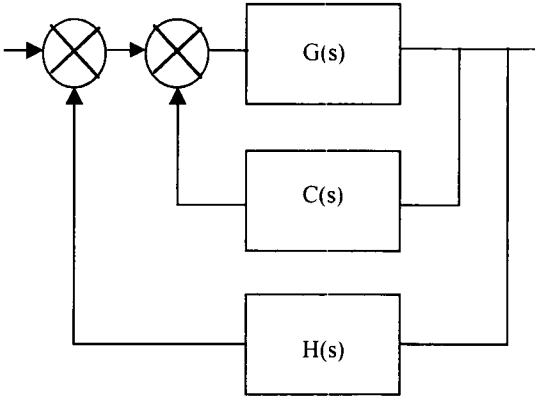


FIG.7.2:



Los dispositivos de compensación pueden consistir en redes eléctricas o equipos mecánicos con palancas, resortes, amortiguadores, etc.

La selección del lugar en que se inserten los compensadores depende en gran manera del sistema de control, de las modificaciones físicas que son necesarias y de los resultados que se deseen. El compensador en cascada se inserta en un punto de baja energía en el camino de la señal, de manera que la disipación de potencia sea pequeña. Esto requiere que la impedancia de entrada sea elevada y puede ser necesario el empleo de amplificadores separadores para evitar el efecto de la carga en el compensador o la de éste en el bloque anterior.

Al elegirse el método de compensación entre el de cascada o el de realimentación deben tenerse en cuenta los siguientes puntos:

- a) Los procedimientos para diseñar un compensador en cascada son mas directos que los necesarios para un compensador por realimentación. Estos últimos compensadores son a veces mas laboriosos de diseñar.
- b) Puede no existir o no ser práctico el empleo de un compensador en cascada o en realimentación en casos particulares de realización física del sistema; es decir, en casos de que este sea eléctrico, hidráulico, mecánico, etc.
- c) Debe considerarse el tipo de señal que se aplicará al compensador considerado. Por ejemplo, si la señal de realimentación se modula sobre una portadora puede resultar mas difícil proyectar un compensador de realimentación que uno en cascada.
- d) El aspecto económico de emplear una u otra técnica de compensación en un sistema dado de control implica aspectos como el del tamaño, peso y coste de los componentes y amplificadores. En la cadena directa la seña va desde un nivel bajo

de energía a otro superior, mientras que en la compensación por realimentación ocurre lo contrario. Así, generalmente, puede no ser necesario el empleo de un amplificador en el bucle de realimentación, pero en la cadena directa suele requerirse un amplificador para ajustar la ganancia ó bien para aislar bloques funcionales entre sí. Por otra parte, el tamaño y peso de los condensadores de una red compensadora en cascada pueden ser muy grandes respecto a los que se necesitarían en el compensador por realimentación. Esto último es de gran importancia en aviación, en la que es de desear el mínimo tamaño y peso de los equipos.

- e) El problema del ruido dentro de un sistema de control puede determinar la elección del compensador. En los casos en que se requiera una mayor amplificación con un compensador en cascada que con otro en la realimentación, se acentúa el problema del ruido con el primero.
- f) El tiempo de respuesta deseado de un sistema de control es un factor determinante del comportamiento. Puede lograrse a menudo una respuesta mas rápida empleando la compensación en paralelo.
- g) Algunos sistemas requieren una fuerte estabilización que aisle la dinámica de parte del sistema de control de las demás del sistema empleado. Esto puede lograrse introduciendo un bucle secundario de realimentación en la parte que quiera aislarse.
- h) Los componentes disponibles y las condiciones ambientales en las que se va a encontrar el sistema de control pueden determinar el lugar más apropiado para situar el compensador.

La compensación supone un cambio en la función de transferencia del sistema y, por tanto, una modificación del lugar de las raíces del mismo.

La finalidad que se persigue con reformar el lugar de las raíces obedece generalmente a una de las causas siguientes:

- 1) Un sistema dado es estable y su respuesta transitoria es satisfactoria pero su error en régimen permanente es demasiado grande. En este caso debe aumentarse la constante de error pero sin reducir apreciablemente la estabilidad y rapidez del sistema, por lo que el lugar de las raíces no se debe modificar apreciablemente.
- 2) Un sistema es estable, pero tanto su respuesta transitoria como permanente no son satisfactorias. El lugar de las raíces debe desplazarse hacia la izquierda y aumentar su constante de error.
- 3) Un sistema estable, pero su respuesta transitoria no es satisfactoria. Debe deformarse el lugar de las raíces de manera que se desplace hacia la izquierda alejándose del eje imaginario.

- 4) Un sistema es inestable con cualquier valor de la de la ganancia  $K$ . El lugar de las raíces debe deformarse de manera que parte de cada rama caiga a la izquierda del eje imaginario pudiéndose hacer que el sistema sea estable.

El compensador introduce nuevos polos y ceros para mejorar el comportamiento del sistema.

Sin embargo, cada nuevo cada nuevo compensador aumentale número de raíces de la ecuación característica. Debe tenerse en cuenta la contribución de cada raíz para poder comparar las dos respuestas temporales y cuanto mayor sea el número de raíces mas laboriosa será la tarea de obtener la solución exacta.

Si se desea una respuesta del tipo subamortiguada con pequeña sobreoscilación, debe utilizarse el ajuste del compensador de manera que existan un par de polos complejos dominantes. Esto requiere que los restantes polos estén alejados hacia la izquierda o próximos a un cero.

## 7.2. COMPENSACIÓN EN CASCADA

Consideraremos solamente algunos pocos tipos de compensadores en cascada:

a) *Compensación proporcional mas integral*.- Cuando la respuesta transitoria de un sistema realimentado de control es considerada satisfactoria, pero tiene un error en régimen permanente demasiado grande, es posible eliminar el error cambiando el tipo del sistema a otro de rango superior. Esto debe lograrse sin cambiar apreciablemente las raíces dominantes de la ecuación característica. Puede aumentarse el tipo introduciendo un bloque en la cadena directa cuya salida sea proporcional a la entrada y a la salida de la misma:

$$C(s) = 1 + \frac{A}{s} = \frac{s + A}{s}$$

Como se cambia el tipo de  $G(s)$  a otro superior, la correspondiente constante de error se hace infinita.

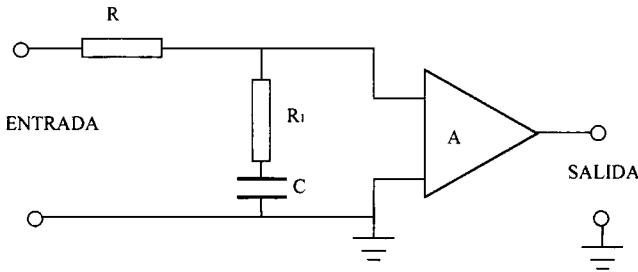
Como puede apreciarse, este compensador introduce en la función de transferencia en bucle abierto un polo en el origen y un cero en  $-A$ . El polo, como se vio en el capítulo precedente, movería al lugar de las raíces hacia la derecha aumentando el tiempo de respuesta. El cero debe estar muy cerca del origen para reducir el mínimo el aumento de respuesta del sistema.

La principal limitación al empleo de este tipo de compensadores la del equipo necesario para obtener la integración.

Mecánicamente puede obtenerse la integración de la señal con un giróscopo integrador cuando la mejora justifique el gasto. Frecuentemente, sin embargo, un simple filtro eléctrico de resistencia y condensadores logra aproximadamente la sección proporcional e integral pedidas. Este tipo de compensador de retardo de fase, que es mucho más económico y del que el ahora considerado es un caso particular, se trata seguidamente.

b) *Compensación por retardo de fase.*- Eléctricamente se puede realizar un compensador de retardo de fase con un circuito como el indicado en la figura 7.3.

FIG7.3:



La función de transferencia que se obtiene es:

$$C(s) = \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T} \frac{A}{\alpha}$$

En donde:  $A = \text{ganancia del amplificador}$

$$\alpha = (R + R_1) / R_1$$

$$T = 1/R_1 C$$

Se suele hacer  $A = \infty$ , con lo que la función de transferencia del compensador queda:

$$C(s) = \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T}$$

Como puede apreciarse, el cero y el polo del compensador tienen los valores:

$$Z_c = 1/T \quad ; \quad P_c = -1/\alpha T$$

Al ser  $\infty$  mayor de la unidad, el cero del compensador queda a la izquierda del polo del mismo, por lo que el efecto sobre el lugar de las raíces es un desplazamiento hacia la

derecha, con lo que empeorará el régimen transitorio. Para minimizar este efecto negativo se procura que el polo y el cero del compensador estén muy cerca el uno del otro y para que también se consiga que  $\alpha$  sea lo suficientemente grande se les sitúa próximos al origen.

La correspondiente constante de error antes de la compensación es:

$$Kx = \lim_{s \rightarrow 0} S^n G(s)$$

La constante de error del sistema compensado:

$$K * x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(S + 1)/T}{(S + 1)/\alpha T} \quad S^n G(s) = \alpha Kx$$

El error en régimen permanente disminuye al quedar multiplicada por  $\alpha$  la constante de error.

En resumen, el compensador por retardo de fase disminuye el error en régimen permanente, pero el empeoramiento del régimen transitorio podrá ser pequeño colocando adecuadamente el polo y el cero del compensador. Este método de compensación estará indicado para sistemas de control que cumplan sobradamente las especificaciones de régimen transitorio pero en los que el error en régimen permanente sea demasiado grande.

**EJEMPLO.-** Un sistema con realimentación unitaria tiene por función de transferencia en bucle abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)}$$

Se desea que se cumplan las especificaciones siguientes:

$$So \text{ " } 25\% ; \quad Tp \text{ " } 2,50\text{seg.} ; \quad Erp \text{ " } 10\%$$

Pasos a seguir :

a) Tratamos de encontrar un valor del factor de ganancia que haga que se cumplan las tres especificaciones anteriores:

Para  $So = 25\%$ , según tabla de la página 8.5, es aproximadamente 0,40 al coeficiente de amortiguamiento.

La ecuación característica es:

$$S^2 + 2s + K = 0$$

De donde se deduce que:

$$\omega_n = \frac{2}{2\delta} = \frac{2}{2 \times 0,40} = 2,50$$

$$T_p = \frac{3,428}{2,50} = 1,37 \text{ sg.} < 2,5 \text{ sg.}$$

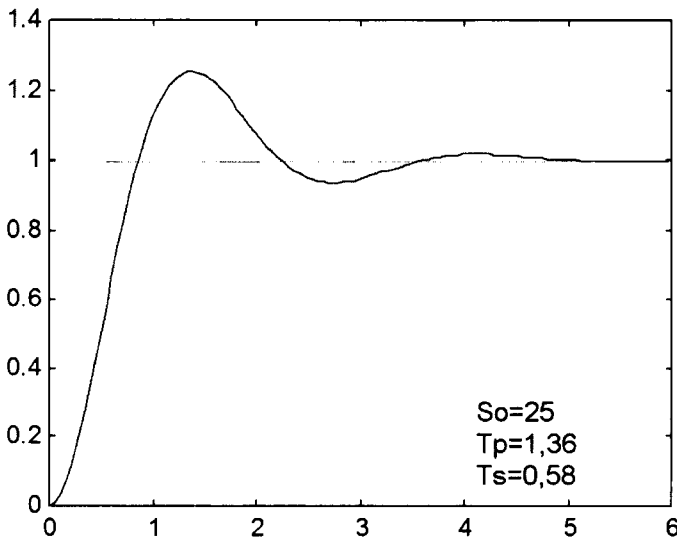
$$K = \omega_n^2 = 2,50^2 = 6,25$$

$$Erp = \frac{1}{Kv} = \frac{2}{666,25} = 0,32 = 32\% > 10\%$$

Al aumentar el factor de ganancia  $K$  para disminuir el error en régimen permanente aumentará el valor de la sobre oscilación, por lo que no existe ningún valor de  $K$  que permita satisfacer simultáneamente las tres especificaciones.

La respuesta transitoria de este sistema para el valor del factor de ganancia anteriormente determinado es la que se muestra en la figura 7.4.

Fig.7.4:



Como las especificaciones de régimen transitorio se cumplen sobradamente, pero no el error en régimen permanente, esta indicado el realizar una compensación por retardo de fase, según se realiza seguidamente.

b) Determinación de unos polos posibles dominantes, de la ecuación característica:

Para  $S_o = 15\%$ , aproximadamente es  $\delta = 0,52$

$$\omega_n = \frac{2}{2 \times 0,52} = 1,923$$

$$T_p = \frac{3,677}{1,923} = 1,9 \text{ seg.} < 2,50 \text{ seg.}$$

$$K = \omega_n^2 = 1,923^2 = 3,698$$

$$\beta = \text{acos } 0,52 = 58,66^\circ$$

$$P_1 = 1,923 \angle 121,33^\circ = -1 + 1,64 j$$

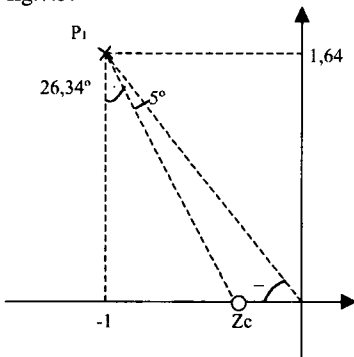
$$E_{pr} = \frac{2}{3,698} = 0,54 = 54\%$$

c) Diseño del compensador:

$$\alpha = 54 / 10 = 5,4 \cong 6$$

Como criterio práctico se puede admitir que si el ángulo trazado tomado como vértice al polo dominante y extremos en el cero y en el polo del compensador es menor de  $5^\circ$  el efecto sobre el transitorio es pequeño, lo cual empleamos para fijar la situación del cero ( figura 7.5).

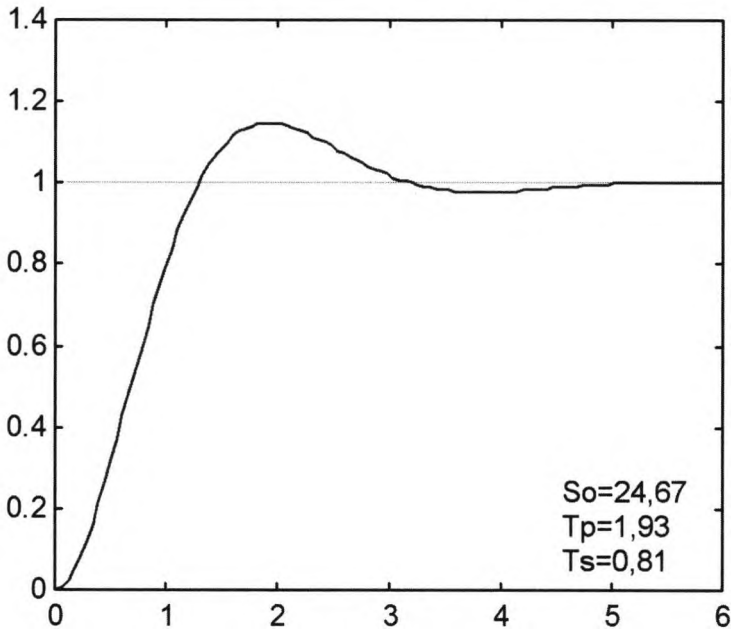
fig.7.5:



$$Z_c = -1 + 1,64 \operatorname{tg} 26,34 = -0,18$$

$$P_c = \frac{Z_c}{a} = \frac{-0,18}{6} = -0,03$$

fig.7.6:



La nueva función de transferencia en el bucle abierto es:

$$G(s) = \frac{3,7(s+0,18)}{s(s+2)(s+0,03)}$$

d) Comprobación aproximada:

Calcula la nueva función de transferencia en el bucle cerrado:

$$W^*(s) = \frac{3,7(s+0,18)}{(s+0,195)(s+0,917+1,6j)(s+0,917-1,6j)}$$

Conocida  $W^*(s)$  podemos determinar el tiempo del pico y la sobreoscilación:

$$T_p = \frac{1}{1,6} \left[ \frac{\pi}{2} - (\pi - \arctg \frac{1,6}{0,917 - 0,18}) + (\pi - \arctg \frac{1,6}{0,917 - 0,195}) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= 1,958 \text{ seg.}$$

$$S_o = 100 \frac{\sqrt{1,6^2 + (0,97 - 0,18)^2} \cdot 0,195}{0,18 \sqrt{1,6^2 + (0,917 - 0,195)^2}} e^{-0,917 \times 1,958}$$

$$S_o = 18,5\%$$

En la figura 7.6 se ha representado la respuesta transitoria del sistema compensado.

c) *Compensación proporcional mas derivada.*- Cuando debe mejorarse la respuesta transitoria de un sistema realimentado de control es necesario modificar el lugar de las raíces de manera que se aleje del eje imaginario, lo cual puede lograrse mediante la introducción de un cero adicional en la función de transferencia en bucle abierto, lo que supone obtener una señal a la salida del compensador que es proporcional a la señal de entrada y a su derivada (rapidez de cambio).

La función de transferencia es:

$$C(s) = 1 + A \cdot s$$

El sistema compensador de esta forma reacciona no solo a la señal de error sino también al valor probable que pueda tener en un futuro próximo. Si el error está cambiando rápidamente entonces su derivada es grande y el sistema responde más deprisa, siendo el resultado neto el de que el sistema sea más rápido.

La introducción del cero produce un desplazamiento del lugar de las raíces hacia la izquierda, como se vio en el capítulo anterior.

En la práctica es difícil construir un diferenciador ideal requiriendo una gran complejidad de equipo críticamente ajustado. Además la acción derivada amplifica cualquier señal indeseada o ruido que puede encontrarse mezclado con la señal activa. La amplificación del ruido puede realmente saturar los amplificadores electrónicos, por lo que el sistema no funcionará correctamente, por ello no se emplean estos compensadores ideales y en su lugar se emplean redes pasivas que se aproximan al comportamiento ideal.

d) *Compensación por adelanto de fase.*- Eléctricamente se puede realizar un compensador de adelanto de fase con un circuito como el indicado en la figura 7.7.

La función de transferencia del mismo es:

$$G(s) = \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha} A$$

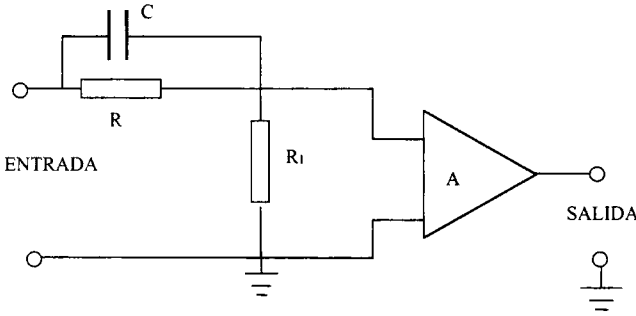
En donde :

$A$  = ganancia del amplificador

$\alpha = R_1 / (R + R_1)$

$T = RC$

fig.7.7:



Si se hace  $A = 1/\infty$  :

La nueva constante de error es:

$$Kx^* = \lim_{s \rightarrow 0} s^n G(s) \frac{(s+1)/T}{(s+1)/\alpha T} \cdot \frac{1}{\alpha} = Kx$$

Es decir, el error en régimen permanente no se altera, por lo que deberá dar a la ganancia del amplificador este valor para no afectarlo.

El polo y el cero del compensador toman los valores:

$$Pc = 1/\alpha$$

$$Zc = 1/T$$

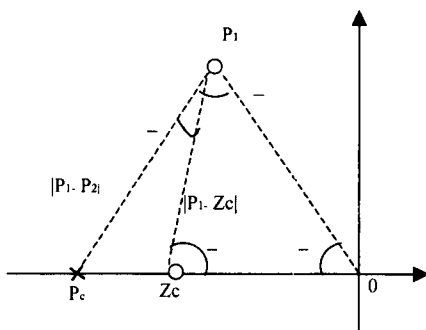
Al ser  $\alpha$  menor que la unidad, el polo del compensador queda a la izquierda del cero, por lo que se obtendrá un desplazamiento del lugar de las raíces hacia la izquierda que hará mejorar el régimen transitorio del sistema.

El diseño de un compensador de adelanto de fase para lograr que se cumplan las especificaciones de error en régimen permanente, rapidez y estabilidad relativa, supondrá el encontrar un par de puntos conjugados en el plano complejo en los que hipotéticamente se cumplirán las especificaciones de régimen transitorio si fuesen polos dominantes de la función de transferencia en bucle cerrado y obligar a que los mismos pertenezcan al lugar de las raíces del sistema obligando a que el factor de ganancia en los mismos sea el necesario para que se cumpla el error en régimen permanente.

Para que un punto pertenezca al lugar de las raíces será suficiente con que en el mismo se cumpla la condición angular y para que además el factor de ganancia tome un valor determinado en el mismo deberá cumplirse la condición modular para ese valor de  $K$  en el mismo.

Supongamos que en el punto  $P_1$  de la figura 7.8 cumple la condición angular, para lo cual el ángulo  $\omega$ , que aporta el compensador, debe tomar un valor concreto.

fig.7.8:



Aplicando el teorema del seno en los triángulos  $PcOP_1$ , y  $ZcOP_1$ , se obtiene:

$$\frac{\text{sen}\beta}{|P_1 - Pc|} = \frac{\text{sen}\lambda}{|Pc|}$$

$$\frac{\text{sen}(\lambda - \varphi)}{|Zc|} = \frac{\text{sen}\beta}{|P_1 - Zc|}$$

En el triángulo  $ZcOP_1$ ; se cumple:

$$e + \beta + \lambda - S = 180^\circ$$

La condición modular en el punto  $P_i$  :

$$|G(P_i)| \cdot \frac{|P_i - Z_c|}{|P_i - P_c|} \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

La relación entre el cero y el polo del compensador:

$$\alpha = \frac{|Z_c|}{|P_c|}$$

De las cinco anteriores ecuaciones con cinco incógnitas obtenemos:

$$\lambda = \operatorname{arccotg}\left(\cotg \varphi - \frac{|G(P_i)|}{\operatorname{sen} \varphi}\right)$$

$$e = 180^\circ - \beta - \lambda + \varphi$$

$$|P_c| = \frac{|P_i| \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen}(\theta - \varphi)}$$

$$|Z_c| = \frac{|P_i| \cdot |G(P_i)| \cdot \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\alpha = |Z_c| / |P_c|$$

**EJEMPLO.-** Un sistema con realimentación unitaria tiene por función de transferencia en bucle abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)}$$

Se desea que se cumplan las siguientes especificaciones:

$$S_o \leq 20\%; T_p \leq 0,50 \text{ sg.}; E_{rp} \leq 10\%$$

El coeficiente de amortiguamiento es aproximadamente 0,45 para sobreoscilación del 20%.

La ecuación característica:

$$s^2 + 4s + K = 0$$

De la que se deduce:

$$\omega_n = \frac{4}{2\delta} = \frac{4}{2 \times 0,45} = 4,44$$

$$K = \omega_n^2 = 4,44^2 = 19,75$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = \frac{3,14}{4,44 \sqrt{1-0,45^2}}$$

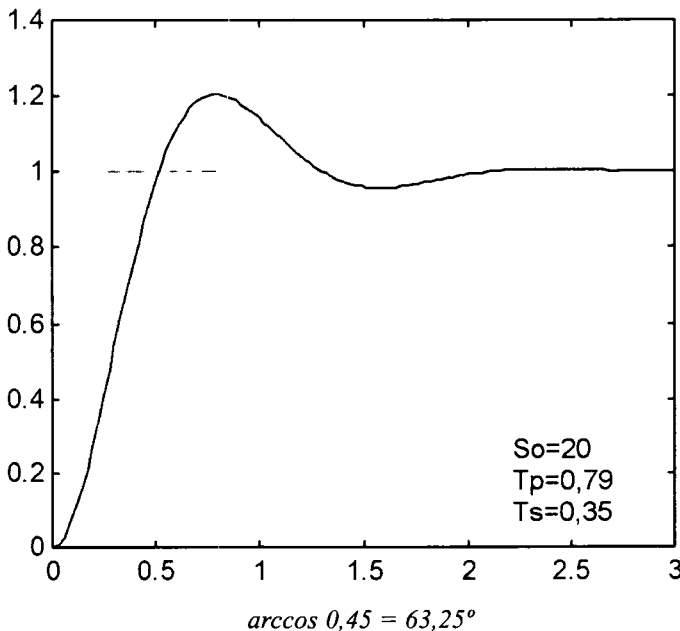
$$T_p = 0,79 \text{ seg.}$$

$$E_{rp} = \frac{1}{K_v} = \frac{4}{K} = \frac{4}{19,75} = 0,202$$

Como puede apreciarse, no hay ningún valor del factor de ganancia que satisfaga las tres especificaciones simultáneamente ni se puede realizar compensación por retardo de fase, por lo que estará indicada la compensación por adelanto de fase.

Trataremos de determinar unos posibles polos dominantes que cumplan las especificaciones del régimen transitorio:

fig.7.9:



Tomamos:

$$\beta = 58^\circ; \delta = \cos 58^\circ = 0,53$$

$$\varpi_n = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi}{0,5 \sqrt{1 - 0,53^2}} = 7,41$$

Tomaremos  $\omega_n = 9$

El punto resultante para los valores anteriormente calculado es:

$$P_i = 9 \angle 122^\circ = -4,77 + 7,63 j$$

Para que se cumpla el error en régimen permanente, el factor de ganancia debe ser:

$$K = \frac{4}{E_{rp}} = \frac{4}{0,1} = 40$$

El ángulo lo determinaremos mediante la condición angular aplicada en  $P_i$  :

$$\varphi - 122^\circ - (180^\circ) - \arctg \frac{7,63}{4,77 - 4} = 180(2R + 1)$$

Para  $R = -1$ , resulta  $\omega = 37,76^\circ$

$$|G(P_i)| = \frac{40}{9 \sqrt{7,63^2 + (4,77 - 4)^2}} = 0,5795$$

$$\lambda = \operatorname{arccot}((\cotg 37,76^\circ - 0,5795) / \operatorname{sen} 37,76^\circ) = 71^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 58^\circ - 71^\circ + 37,76^\circ = 88,76^\circ$$

$$|P_c| = \frac{9 \operatorname{sen} 71^\circ}{\operatorname{sen}(88,76^\circ - 37,76^\circ)} = 10,96$$

$$|Z_c| = \frac{9 \operatorname{sen} 71^\circ \times 0,5795}{\operatorname{sen} 88,76^\circ} = 4,93$$

$$\alpha = 4,93 / 10,96 = 0,45$$

$$K/\alpha = 40 / 0,45 = 88,88$$

La nueva función de transferencia en bucle abierto:

$$G^*(s) = \frac{88,88 (s + 4,93)}{s(s + 4)(s + 10,96)}$$

Y en bucle cerrado:

$$W^*(s) = \frac{88,88 (s + 4,93)}{(s + 4,77 + 7,63 j)(s + 4,77 - 7,63 j)(s + 5,42)}$$

Calculamos mediante las fórmulas aproximadas el tiempo de pico y la sobreoscilación:

$$T_p = \frac{1}{7,63} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{7,63}{4,93 - 4,77} + \arctg \frac{7,63}{5,42 - 4,77} + \frac{\pi}{2} \right)$$

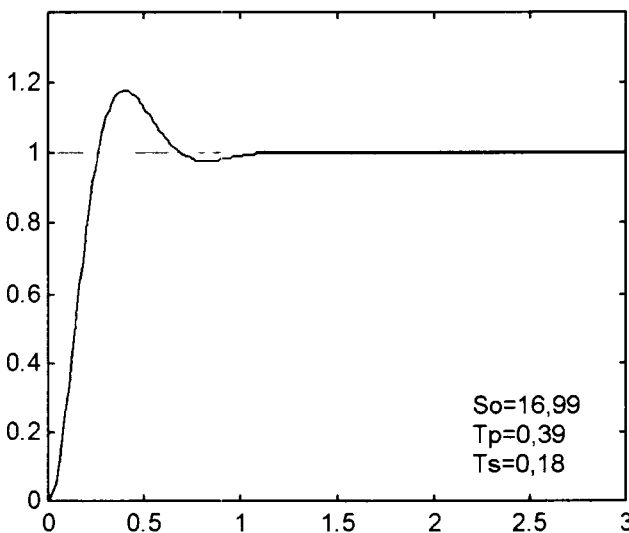
$$T_p = 0,403 \text{ seg}$$

$$S_c = 100 \frac{5,42 \sqrt{7,63^2 + (4,93 - 4,77)^2}}{\sqrt{7,63^2 + (5,42 - 4,77)^2} \times 4,93} e^{-4,77 \times 0,403}$$

$$S_o = 16 \%$$

En la figura 7.9. se ha representado la respuesta transitoria del sistema sin compensar y para el factor de ganancia correspondiente a sobreoscilación del 20%. En la figura 7.10. aparece la respuesta transitoria del sistema compensado, comparando una y otra se aprecia el aumento de rapidez de respuesta y como se alcanza mucho antes el régimen permanente.

fig.7.10:



### 7.3. COMPENSACIÓN POR REALIMENTACIÓN

Al aplicar la compensación por realimentación es a menudo necesario mantener el tipo del sistema básico y no aumentar el error en régimen permanente. Debe, en tal caso, tenerse cuidado con la forma que se adopte para la función de transferencia del compensador, Supongamos que las funciones de transferencia del sistema original y del compensador son las siguientes:

$$G(s) = \frac{K N(s)}{s^n Q(s)}$$

$$C(s) = \frac{K_t s^m}{A(s)}$$

La nueva función de transferencia de la cadena directa es:

$$G^*(s) = \frac{K N(s) A(s)}{s^n Q(s) A(s) + s^m K K_t N(s)}$$

De la anterior expresión deducimos que para que se mantenga el tipo de la función de transferencia es preciso que sea:

$$m \geq n$$

La constante de error del sistema básico es:

$$K_x = \frac{K N(O)}{Q(O)}$$

Y la del sistema compensado:

$$K_x^* = \frac{K N(O) A(O)}{Q(O) A(O) + s^{m-n} K K_t N(O)}$$

Para que sea  $K_x^* = K_x$  debe cumplirse que:

$$m > n$$

Haciendo:

$$m = n + 1$$

El numerador de la función de transferencia primitiva queda multiplicado por  $A(S)$  y el denominador por:

$$A(s) + S K K, \frac{N(s)}{Q(s)}$$

Para que el compensador de realimentación introduzca en la nueva función de transferencia un polo y un cero con los que se consiga reformar adecuadamente el lugar de las raíces para mejorar el régimen transitorio es necesario que  $A(s)$  sea de primer grado.

En resumen; para que el sistema compensado tenga el mismo error en régimen permanente que el sistema de partida y para que se consiga introducir un cero y un polo en la nueva función de transferencia, se pueden emplear como funciones de transferencia del compensador de realimentación.

Para sistemas de tipo cero 
$$C(s) = \frac{K + s}{(s + a)}$$

Para sistemas de tipo uno 
$$C(S) = \frac{K + s^2}{(s + a)}$$

Para servosistemas de posición, se pueden conseguir estas funciones de transferencia con los dispositivos que se muestran en las figuras 7.8 y 7.9 .

fig.7.11:

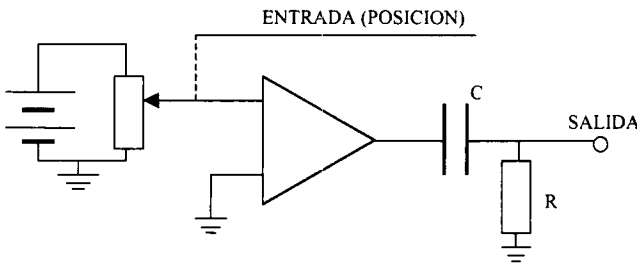
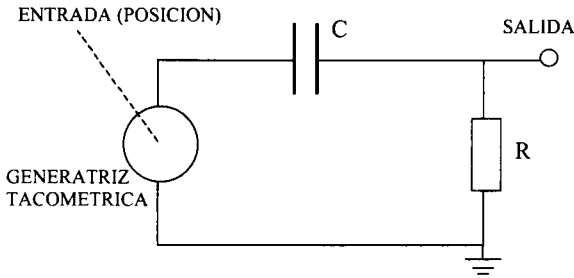


FIG.7.12:



**EJEMPLO.-** Un sistema con realimentación unitaria tiene por función de transferencia un bucle abierto:

$$G(S) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Se desea que se cumpla:

$$S_o = 35\% ; t_p = 1.2 \text{ seg.} \quad E_{r,p} = 10\%$$

$$\text{Para } S_o = 35\% \text{ es } \delta \cong 0,31$$

La ecuación característica:

$$s^2 + 2s + K = 0$$

$$\omega_n = \frac{2}{2} = \frac{2}{2 \cdot 0,31} = 3,22$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi}{3,22 \sqrt{1 - 0,31^2}} = 1,02 \text{ seg.}$$

$$K = \omega_n^2 = 3,22^2 = 10,37$$

$$E_{r,p} = \frac{2}{K} = \frac{2}{10,37} = 0,19 = 19\%$$

Valor de  $K$  necesario para que se cumpla el error en régimen permanente:

$$K = \frac{2}{0,1} = 20$$

Para determinar un posible polo dominante en bucle cerrado tomamos:

$$\delta = 0,5 \quad ; \quad \beta = \arccos 0,5 = 60^\circ$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{\pi}{1,2 \sqrt{1 - 0,5^2}} = 3,02$$

Tomamos  $\omega_n = 3,5$

El punto  $P_1$  resulta ser:

$$P_1 = 3,5 \angle 120^\circ = -1,75 + 3,03j$$

Como  $G(s)$  es de tipo 1 tomamos:

$$C(s) = \frac{K + s^2}{s + a}$$

Con lo cual, resulta:

$$G^*(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+a)(s+2) + s^2 K K_r}$$

$$W^*(s) = \frac{K(s+a)}{S^3(2+a+K K_r) s^2 + (2a+K) s + K a}$$

La ecuación característica para

$$s = 3,45 \angle 120^\circ \quad y \quad K = 20$$

resulta ser:

$$42,87 \angle 0^\circ + (2 + a + 20 K_r) \cdot 12,25 \angle 240^\circ + (2a + 20) \cdot 3,5 \angle 120^\circ + 20a = 0$$

Operando se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} -122,4 K_t + 10,38 a &= 4,37 \\ 212,2 K_t + 4,55 a &= 339,38 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es:

$$a = 2,08 \quad , \quad K_t = 0,14$$

Para estos valores se obtiene una nueva función de transferencia en bucle cerrado y en bucle abierto:

$$\omega^*(s) = \frac{20(s+2,08)}{(s+3,4)(s+1,75+3,03j)(s+1,75-3,03j)}$$

$$G^*(S) = \frac{20(s+2,08)}{s(s+0,67)(s+6,21)}$$

Calculamos el tiempo de pico y la sobreoscilación por las fórmulas aproximadas:

$$t_p = \frac{1}{3,03} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \frac{3,03}{2,08-1,75} + \operatorname{artg} \frac{3,03}{3,4-1,75} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,908 \text{ seg.}$$

$$S_o = 100 \frac{3,4\sqrt{3,03^2 + (2,08-1,75)^2}}{2,08\sqrt{3,03^2 + (3,4-1,75)^2}} e^{-1,75 \times 0,908} = 29 \%$$

Por integración numérica se obtienen los resultados:

$$S_o = 32,53 \%$$

$$t_p = 0,877 \text{ seg}$$

$$t_s = 0,346 \text{ seg}$$



## CAPÍTULO 8 DOMINIO DE LA FRECUENCIA

### 8.1. INTRODUCCIÓN

Para estudiar el comportamiento de un sistema lineal en régimen estacionario sencillo senoidal basta, según es conocido, el sustituir el operador  $D$  por  $\omega j$  en las funciones de transferencia, siendo  $\omega$  la pulsación de la señal considerada y  $j$  la unidad imaginaria.

La función de transferencia en bucle cerrado en este caso la podemos poner:

$$w(\omega j) = \frac{G(\omega j)}{1 + G(\omega j) H(\omega j)}$$

Para un valor dado de la pulsación, la anterior función de transferencia se reduce a un número complejo con cierto módulo y argumento.

Supongamos que existe un cierto valor de la pulsación que hace que se cumpla:

$$1 + G(\omega j) \zeta(\omega j) = 0 \tag{1.8}$$

En tal caso, el módulo de  $W$  sería infinito, lo cual, dado que la función de transferencia en bucle cerrado representa la relación entre la salida y la entrada, podemos interpretarlo como que existe una salida no nula para entrada cero, es decir, el sistema de control se comporta como un generador (oscilador) y sería estable. Esta conclusión concuerda perfectamente con lo estudiado hasta ahora en el lugar de las raíces, pues si la ecuación característica  $1 + GH = 0$  tiene una raíz imaginaria pura,  $s = \omega j$ , la salida es una senoide no amortiguada y el sistema de control es inestable.

De la ecuación ( 1.8 ) podemos deducir las dos siguientes:

$$|G(\omega j) \zeta(\omega j)| = 1$$

$$\text{Arg} [ G(\omega j) \zeta(\omega j) ] = (2R + 1) \pi$$

Que son las condiciones para que la salida sea esencial de amplitud no amortiguada.

Las condiciones generales para que un sistema sea inestable son las siguientes:

$$|G(\omega j) \zeta(\omega j)| \geq 1$$

$$\text{Arg}[G(\omega j) \zeta(\omega j)] = (2R + 1)\pi$$

Si estas condiciones se cumplen para un factor de ganancia  $K = K_2$ , existirá un factor de ganancia  $K_1 \geq K_2$ , para el que  $\omega j$  será raíz de la ecuación característica y para  $K = K_2$  la ecuación característica tendrá al menos una raíz en el semiplano de parte real positiva o en el eje imaginario ( $K_1 = K_2$ ).

En la mayor parte de los casos, el sistema de control tiene el grado del denominador de la función de transferencia en bucle abierto mayor que el grado del numerador, por lo cual generalmente podemos expresar las condiciones de inestabilidad de la siguiente manera:

$$|G(\omega j) H(\omega j)| \geq 1$$

$$\text{Arg}[G(\omega j) H(\omega j)] = (2R + 1)\pi$$

## 8.2. MARGEN DE FASE Y MARGEN DE GANANCIA

Si para un cierto valor de  $\omega$  se cumple que:

$$|G(\omega j) H(\omega j)| = 1$$

Pero es:

$$\text{Arg}[G(\omega j) H(\omega j)] > -180^\circ$$

El sistema es absolutamente estable, pero lo que hay que restarle el argumento hasta alcanzar los  $-180^\circ$  se puede emplear como indicador de la estabilidad relativa del sistema. A este indicador se le denomina margen de fase, es decir:

$$Mf = 180^\circ + \text{Arg}[G(\omega j) H(\omega j)]$$

Siendo  $\omega$  la pulsación que hace el módulo de la función de transferencia en bucle abierto igual a la unidad.

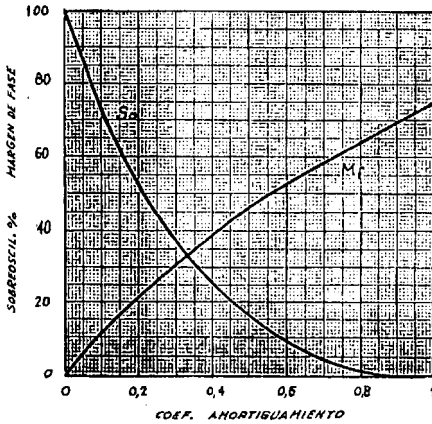
Si el margen de fase es positivo, el sistema es estable y en caso contrario inestable.

De similar manera, podemos definir el margen de ganancia como la amplitud, expresada en  $dB$ , que habría que aumentarle al módulo de la función de transferencia en bucle abierto para alcanzar  $0\text{ dB}$ , cuando su argumento es  $-180^\circ$ .

Evidentemente, el margen de ganancia es también un indicador de la estabilidad del sistema.

En lo sucesivo, emplearemos preferentemente el margen de fase como indicador de la estabilidad. En el gráfico de la figura 8.1 se muestra el margen de fase y la sobreoscilación en un sistema de segundo orden sin ceros y de tipo uno, en función del coeficiente de amortiguamiento.

Fig.8.1



### 8.3. GRÁFICOS DE BODE

En estos gráficos se representa en abscisas la frecuencia o la pulsación, en escala logarítmica, y en ordenadas el módulo en  $dB$  y el argumento en grados de una función de transferencia.

Consideremos una función de transferencia de la forma:

$$G(\omega j) = \frac{Kx(1 + \omega j / Z_1)(1 + \omega j / Z_2) \dots}{(\omega j)^n (1 + \omega j / P_1)(1 + \omega j / P_2) \dots}$$

Donde  $Z_i$  y  $P_i$  son los ceros y polos de la misma cambiados de signo y  $Kx$  la ganancia estática.

El módulo de esta función de transferencia expresado en dB tiene la siguiente forma:

$$A = 20\log Kx + 20\log|1 + \omega j / Z_1| + 20\log|1 + \omega j / Z_2| + \dots - 20\log|(\omega j)^2| \\ - 20\log|1 + \omega j / P_1| - 20\log|1 + \omega j / P_2| - \dots$$

Como puede apreciarse, esta amplitud se compone de una serie de sumandos de varios tipos, cuyas gráficas en función del  $\log \omega$  consideraremos seguidamente.

a) El sumando  $20 \log Kx$ , al ser constante e independiente de la pulsación, es una recta horizontal.

b) El sumando:

$$- 20\log|(\omega j)^n| = -20n \log \omega$$

Al ser la abscisa el logaritmo de la pulsación, es una recta de pendiente negativa  $-20n \text{ dB} / \text{década}$ , que pasa por el punto de pulsación igual a uno y  $0 \text{ dB}$ .

c) Los sumandos de la forma:

$$20\log|1 + \omega j / Z_i|$$

Tienden a  $0 \text{ dB}$  para valores pequeños de la pulsación, que sería una recta horizontal. Para valores grandes de la pulsación la amplitud tiende a:

$$20\log \omega / Z_i = 20\log \omega - 20\log Z_i$$

Que es una recta de pendiente positiva de  $20 \text{ dB} / \text{década}$ , que pasa por el punto de pulsación igual a  $Z_i$  y amplitud  $0 \text{ dB}$ .

En consecuencia, el gráfico de este tipo de sumando se puede aproximar por estas dos rectas (asíntotas), sin cometer un error de importancia, pues su valor máximo se produce para pulsación igual a  $Z_i$  y es:

$$10 \log 2 = 3 \text{ dB}$$

En cualquier otro punto el error cometido es inferior a esta cantidad ( $3 \text{ dB}$ ). La forma de esta gráfica y su aproximación por asíntotas se ve en la figura 8.2.

d) De similar manera al caso anterior, los sumandos de la forma:

$$- 20\log|1 + \omega j / P_i|$$

Los podemos aproximar por asíntotas en  $0\text{ dB}$  (horizontal). Para valores pequeños de la pulsación, y por la recta:

$$-20 \log \omega + 20 \log P_i$$

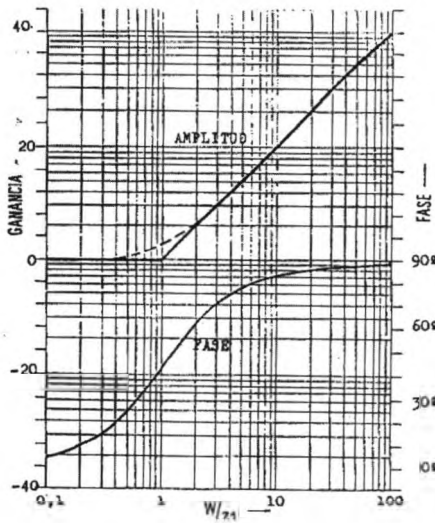
Para valores grandes de la pulsación, cuya pendiente es de  $-20\text{ dB / década}$ , siendo el error máximo que se comete con esta aproximación  $-3\text{ dB}$ , para pulsación igual a  $P_i$  y parando por el punto de esas abscisas y  $0\text{ dB}$  de amplitud. La forma de este gráfico es el de la figura 8.3.

El argumento o fase de la función de transferencia considerada anteriormente es:

$$\varphi = \text{ar tg } \omega / Z_1 + \text{ar tg } \omega / Z_2 + \dots - 90n - \text{ar tg } \omega / P_1 - \text{ar tg } \omega / P_2 - \dots$$

El sumando  $-90n$  es una cantidad constante e independiente de la pulsación y los otros sumandos se han representado en las figuras 8.2. y 8.3.

Fig.8.2



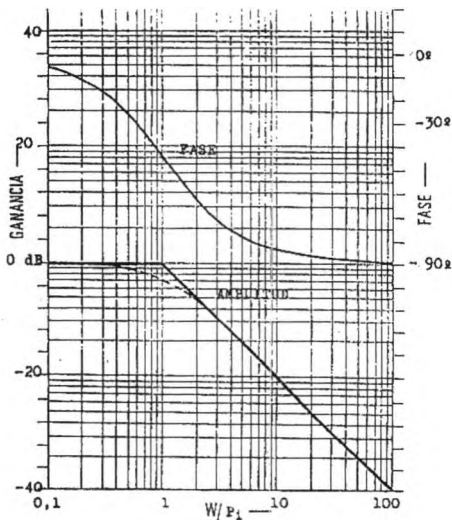
Consideremos ahora el caso en que la función de transferencia tenga un par de polos complejos conjugados:

$$W(\omega j) = \frac{1}{(\omega j / \omega_n)^2 + 2 \delta \omega j / \omega_n + 1}$$

En este caso, la amplitud toma la forma:

$$A = -10 \log \left[ \left( 1 - \omega^2 / \omega_n^2 \right)^2 + \left( 2\delta\omega / \omega_n \right)^2 \right]$$

Fig.8.3

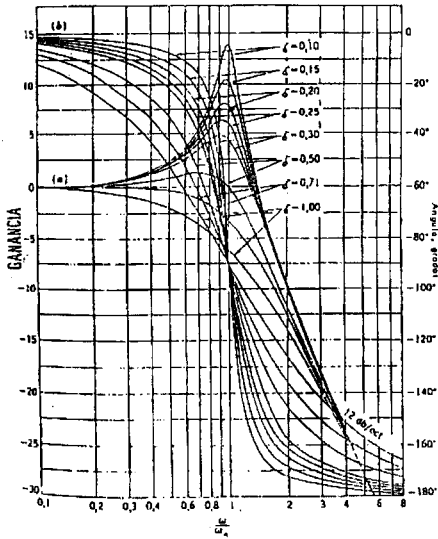


La fase de función de transferencia:

$$\varphi = -\text{artg} \frac{2\delta\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

Esta amplitud y fase aparecen representadas en la figura 8.4. en la que se puede apreciar que el error al aproximar la amplitud por asíntotas como en los casos precedentes puede ser de cierta importancia debido al máximo, que hace apartarse a la amplitud de las mismas para valores medios o pequeños del coeficiente de amortiguamiento. La forma del diagrama de fase también depende del valor del coeficiente de amortiguamiento.

Fig.8.4



El valor máximo de la amplitud lo obtendremos derivando e igualando a cero la expresión de la amplitud:

$$M_o = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$

El anterior valor de la amplitud máxima se obtiene para la pulsación:

$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1-2\omega^2}$$

Nótese que el valor del pico depende solamente del coeficiente de amortiguamiento. Las ecuaciones anteriores sólo tienen significado para valores reales de  $\omega_m$ , por lo que la curva de  $M_o$  en función de la pulsación tiene un valor superior a la unidad solamente para valores del coeficiente de amortiguamiento menores de 0,707. La pulsación a la que presenta el pico depende tanto del coeficiente de amortiguamiento como de la pulsación natural no amortiguada.

Cuanto mayor sea  $\omega_m$ , tanto más rápida será la respuesta transitoria del sistema. Nótese que para valores pequeños del coeficiente de amortiguamiento,  $\omega_m$  se aproxima al denominador de la fórmula del tiempo de pico obtenida en 4.5.

El valor del pico  $M_o$  da una buena aproximación del máximo de la magnitud controlada para coeficientes de amortiguamiento mayores de 0,4 y menores de 0,7, es decir,  $100 (M_o - 1)$  es aproximadamente la sobreoscilación para esos valores de  $\delta$ .

Las anteriores conclusiones se refieren, lógicamente, a que la función de transferencia considerada correspondiese al bucle cerrado de un sistema de control, y a los resultados obtenidos se ilustran claramente en las figuras 8.5. y 8.6., en las que se compara la sobreoscilación con  $100 (M_o - 1)$  y se muestra la correlación del tiempo de pico con el que se obtendría un valor de  $\omega_m$ .

## 8.4. ÁBACO DE BLACK

De lo dicho anteriormente se deduce la importancia de conocer el valor del pico de resonancia  $M_o$  y de la pulsación de resonancia  $\omega_m$ , los cuales se pueden obtener gráficamente mediante el ábaco de Black (Fig. 8.7.), partiendo del diagrama de Bode de la función de transferencia en bucle abierto, en el caso de que la realimentación sea unitaria.

El ábaco de Black tiene como coordenadas rectangulares la fase en grados abscisas y la amplitud en dB en las ordenadas, y se han trazado familias de curvas de amplitud constante en dB y fase constante en grados de la correspondiente función de transferencia en bucle cerrado para el caso de realimentación unitaria; es decir, si en abscisas tenemos  $Arg (G)$  y ordenadas  $20 \log |G|$ , las familias de curvas trazadas responden a las expresiones:

Fig.8.5

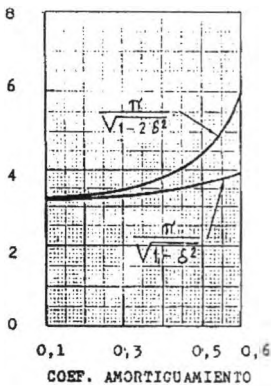


Fig.8.6

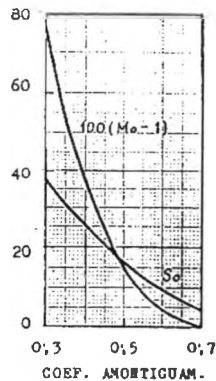
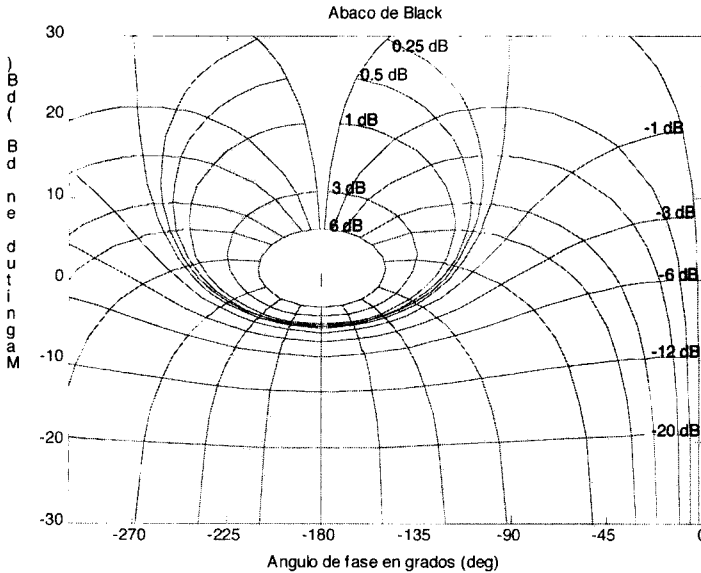


Fig.8.7:



$$\text{Arg} \left[ \frac{G}{1+G} \right] = \text{Cte.} \quad 20 \log \left| \frac{G}{1+G} \right| = \text{Cte.}$$

Por tanto; si tenemos el gráfico de Bode de la función de transferencia en bucle abierto, podemos pasar directamente al ábaco de Black, en el que simultáneamente tenemos la amplitud y la fase de la función de transferencia en bucle cerrado.

Para sistemas con realimentación no unitaria también se puede utilizar el ábaco de Black, pero en este caso resulta poco práctico por ser su empleo algo engorroso.

En la figura 8.8 y siguientes se han representado los gráficos de Bode de las funciones de transferencia de los ejemplos considerados en el capítulo 6, para  $Kp = 10$ . Partiendo del gráfico de Bode de la figura 8.8, se ha obtenido el gráfico de Black que aparece en la figura 8.13., en el que puede apreciarse de la pulsación de resonancia  $5,6 \text{ rad/seg}$ . Y que el pico de resonancia es  $2,3 \text{ dB}$  ( $1,3$  en ganancia natural), lo cual permite determinar que la sobreoscilación es aproximadamente del  $30 \%$  y que el tiempo de pico es  $0,56 \text{ seg}$ , también aproximadamente. Los valores exactos son  $27,8 \%$  y  $0,51 \text{ seg}$ . respectivamente.

Fig.8.8:

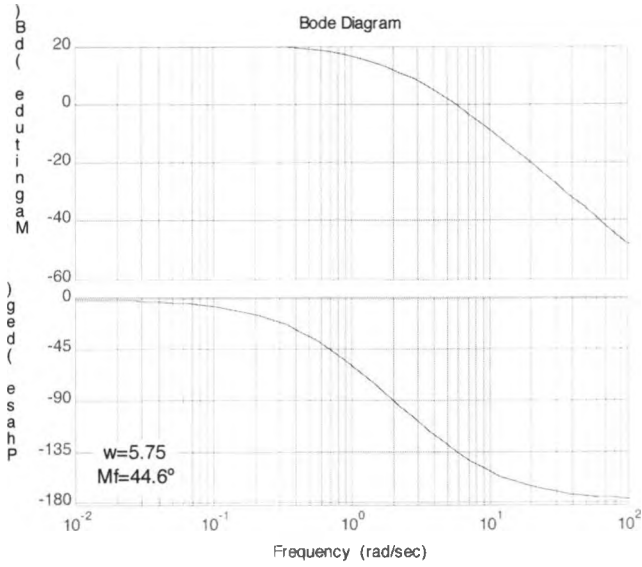


fig.8.9:

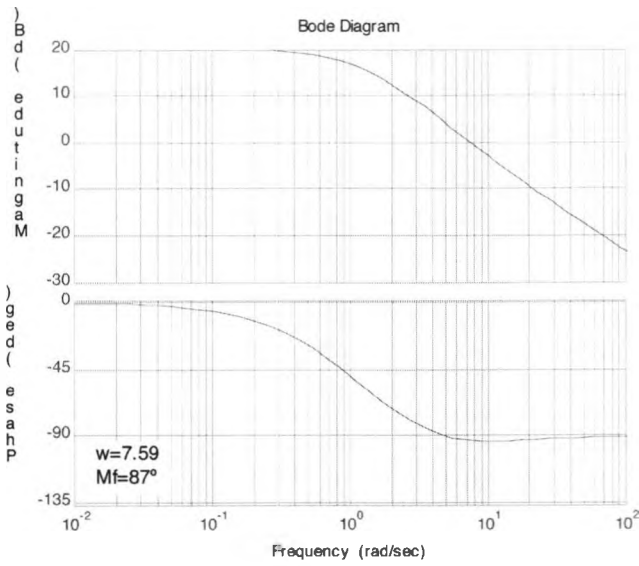


fig.8.10:

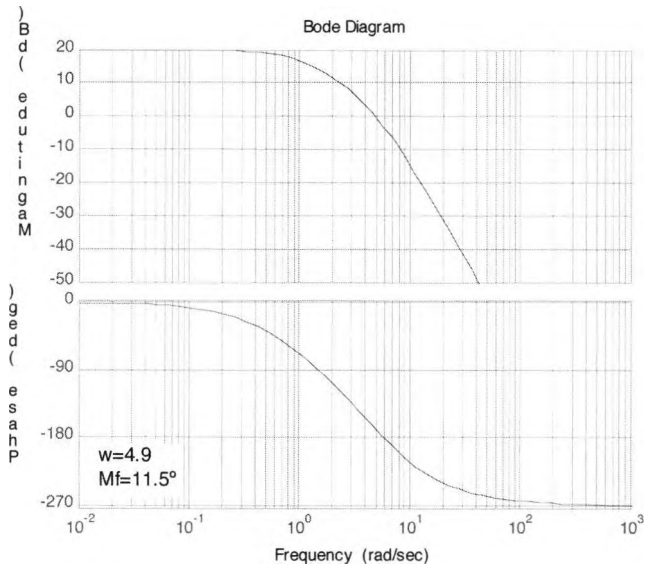


fig.8.11:

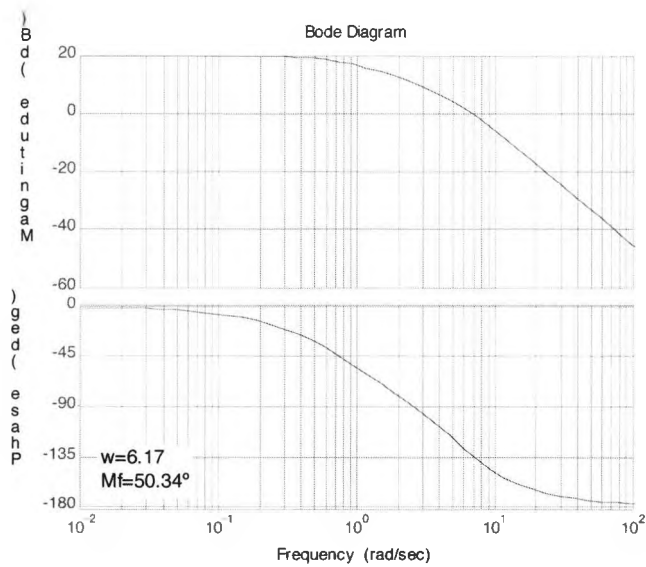


fig.8.12:

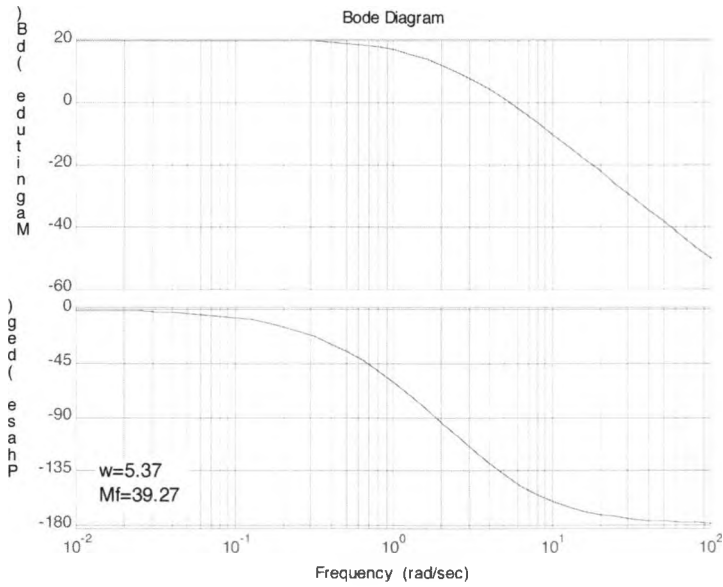
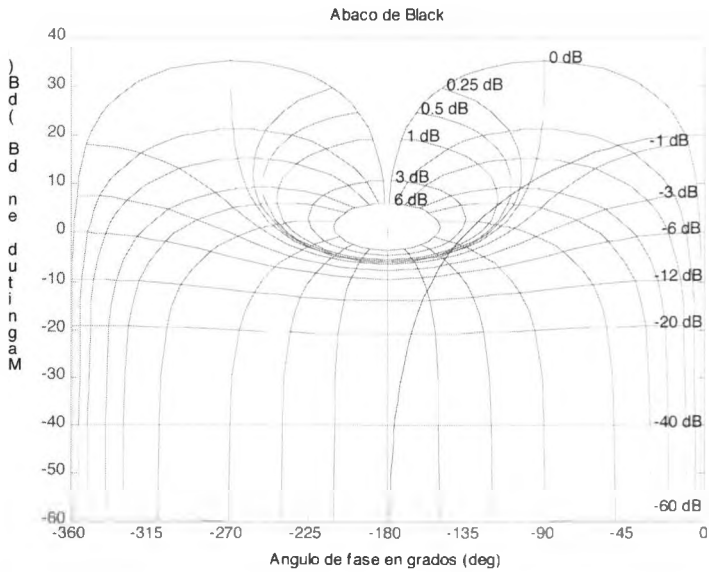


fig.8.13:



## CAPÍTULO 9

### COMPENSACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

#### 9.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 7 ya se estudiaron algunos procedimientos de compensación en cascada y por realimentación, y se analizaron las cualidades de los distintos métodos considerados, por lo que ahora no insistiremos en ello y nos limitaremos a ver algunos procedimientos de diseño de compensadores en el dominio de la frecuencia.

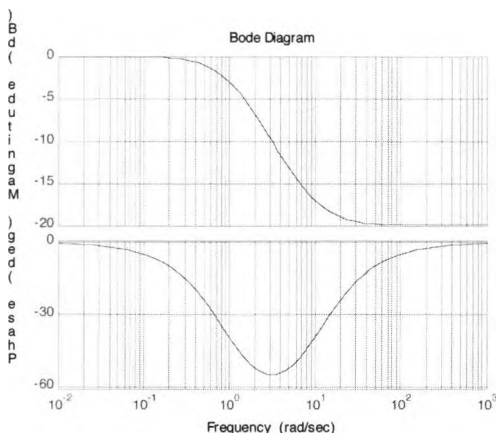
#### 9.2. RETARDO DE FASE

Consideremos la siguiente función de transferencia para este tipo de compensador:

$$C(S) = \frac{1 + \tau S}{1 + \alpha \tau S}$$

Que es idéntica a la considerada en el capítulo 7, con la única diferencia de que no aparece la ganancia "A" del amplificador, que ahora suponemos incluida en la ganancia estática  $K_x$  de la función de transferencia en bucle abierto.

FIG.9.1:

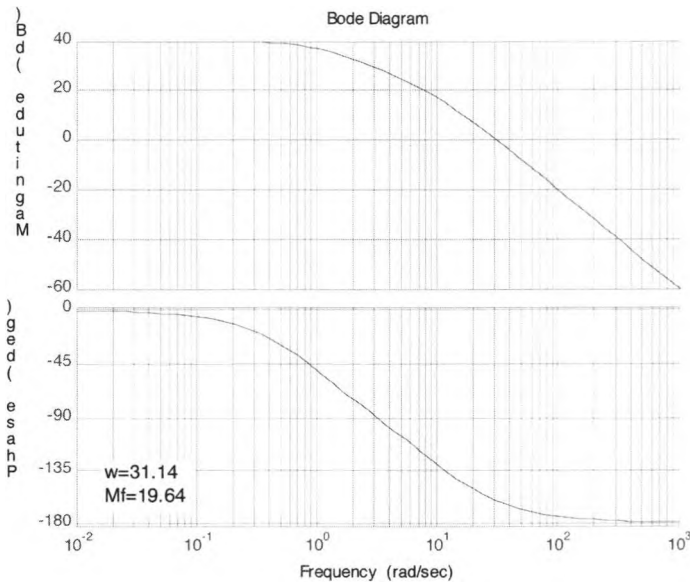


El gráfico de Borde de esta función de transferencia es el que aparece en la figura 9.1., para el caso de un polo en  $-1$  y un cero en  $-10$ .

Como puede apreciarse, la amplitud tiende a  $0$  dB para frecuencias bajas y a  $-20 \log \alpha$  para frecuencias altas, es decir, esta red produce una atenuación en las frecuencias altas, por lo que al aplicarla en la cadena directa de un sistema de control produce una disminución del valor de la pulsación correspondiente a  $0$  dB de amplitud de la función de transferencia en bucle abierto, si el compensador se sitúa en la posición adecuada. También disminuirá la pulsación de resonancia, lo cual se traduce en una disminución de la rapidez de respuesta, pero como la gráfica de la fase de  $G(s)$  es decreciente, se puede conseguir un aumento del margen de fase.

Para lograr el efecto de aumento en el margen de fase, mencionado anteriormente, el cero y el polo del compensador (realmente  $-Z_c$  y  $-P_c$ ), han de situarse a la izquierda del punto de corte con  $0$  dB en el gráfico de Bode, pero como la fase que aporta este compensador es negativa, ha de tenerse la precaución de situarlos lo suficientemente alejados del corte con  $0$  dB para impedir un efecto contrario al deseado sobre el margen de fase. En la práctica, si el cero se coloca a una década o más a la izquierda del corte con  $0$  dB, el efecto negativo de la fase del compensador no es muy superior a cinco grados.

fig.9.2:



Para diseñar un compensador de retardo de fase, buscamos en el gráfico de Bode de la función de transferencia en bucle abierto un punto cuya diferencia de fase con  $-180^\circ$  sea superior en unos cinco grados al margen de fase deseado. Si hacemos que  $\alpha$  del compensador sea igual a la amplitud en ese punto, lograremos que el mismo sea el de corte con  $0$  dB. El cero del compensador lo situaremos una década o más a la izquierda del nuevo punto de corte con  $0$  dB, y el polo de acuerdo con el valor determinado de  $\alpha$ .

**EJEMPLO 9.1.-** Un sistema de control con realimentación unitaria, tiene por función de transferencia en bucle abierto:

$$G(S) = \frac{Kx}{(s+1)(s/10+1)}$$

Se desea que se cumpla:

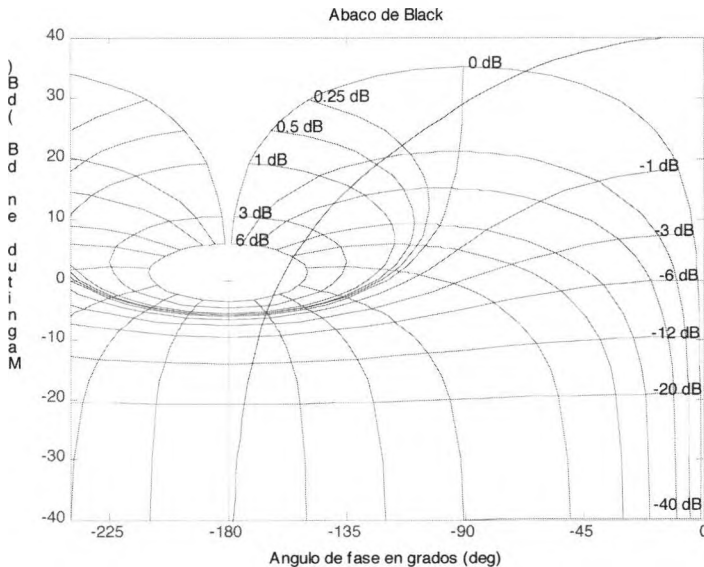
$$Er_p \leq 1\% \text{ (entrada escalón)}$$

$$M_f \geq 40\% \text{ (So aprox. 25\%)}$$

$$T_p \leq 0,3 \text{ seg.}$$

Para que se cumpla el error en régimen permanente necesitamos,  $Kx = 99$ , que redondeamos hasta  $100$ .

fig.9.3:

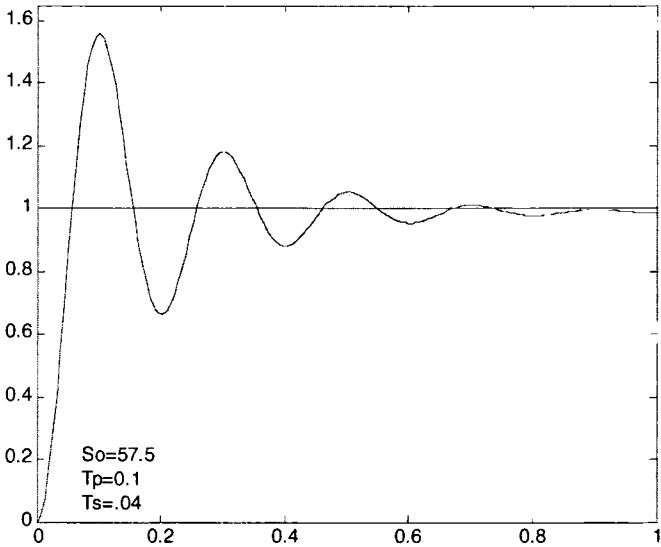


Para la ganancia estática determinada, tenemos el gráfico de Bode de la figura 9.2., en el que encontramos que el margen de fase es de  $19,6^\circ$ , y en la figura 9.3. el correspondiente gráfico de Black, que nos da un pico de resonancia de  $2,9$  y una pulsación de resonancia de  $30,9$  rad./seg. En este caso, la máxima amplitud en bucle cerrado no da buena aproximación de la sobreoscilación (coeficiente de amortiguamiento muy pequeño), pero la pulsación de resonancia permite calcular el tiempo de pico:

$$T_p = \frac{\pi}{30,9} = 0,1 \text{ seg.}$$

En la figura 9.4 puede verse la respuesta transitoria de este sistema.

fig.9.4:



De los anteriores resultados deducimos que está indicada la compensación por retardo de fase en este caso.

En el gráfico de Bode determinamos un punto cuya fase sea algo mayor de  $40 + 5 - 180 = -135$  grados. Para una pulsación de  $11$  tenemos una fase de  $-132,5^\circ$  y una amplitud de  $15,7$  dB =  $6$ , por lo cual situamos el cero en  $0,9$  ( algo mas de una década a la izquierda del nuevo punto de corte  $\omega = 11$  ), y el polo en  $0,9/6 = 0,15$ .

La nueva función de transferencia es:

$$G^*(S) = \frac{100(S/0,9 + 1)}{(S/0,15 + 1)(S + 1)(S/10 + 1)}$$

En la figura 9.5 tenemos el nuevo gráfico de Bode, en el que se aprecia que el margen de fase es de casi  $43^\circ$  y en el diagrama de Black de la figura 9.6, que la pulsación de resonancia de  $1,36$ , lo cual nos permite estimar:

$$So = 100(1,36 - 1) = 36\% ; Tp = \frac{\pi}{10,72} = 0,29 \text{ seg}$$

Los valores reales son,  $So = 25,4\%$  y  $Tp = 0,26$  seg (ver figura 9.7.)

fig.9.5:

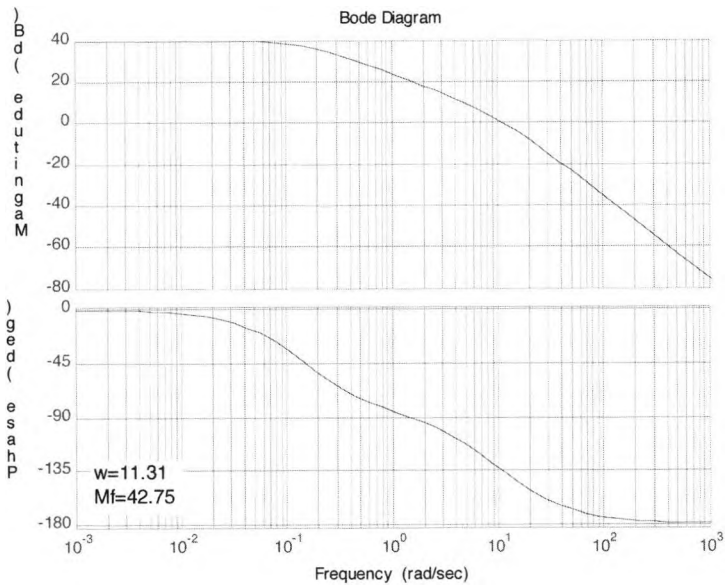


fig.9.6

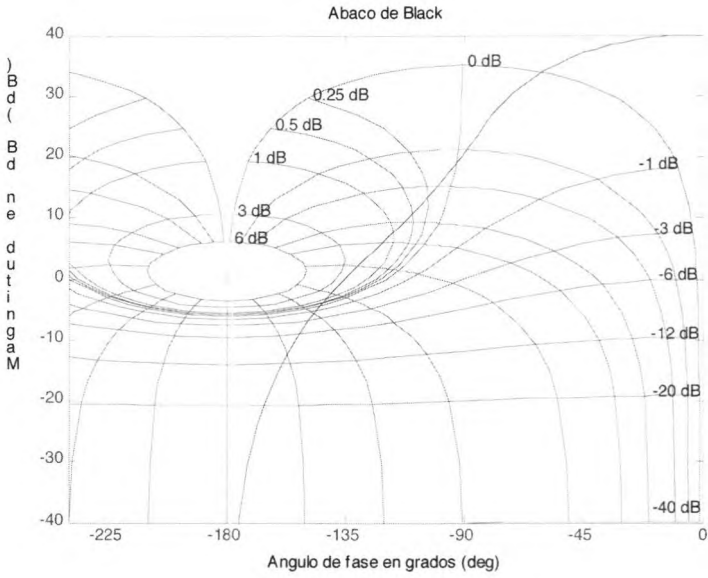
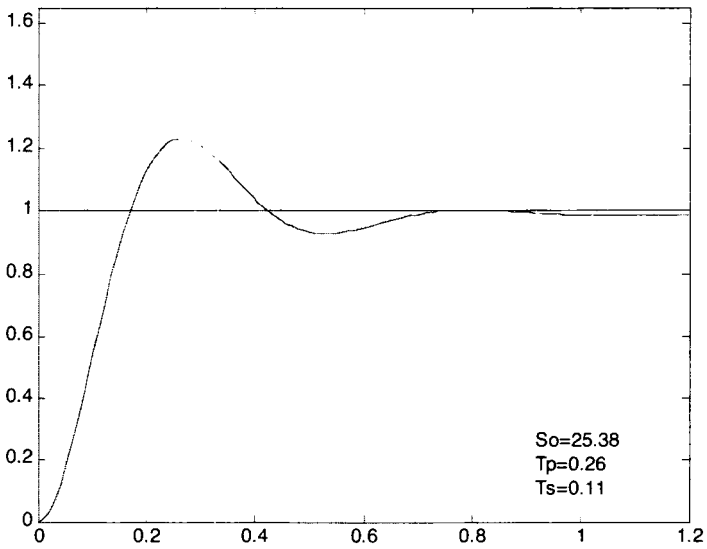


fig.9.7



**EJEMPLO 9.2.-** La función de transferencia en bucle abierto de un servosistema con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{Kx}{s(s/10 + 1)}$$

Las especificaciones que se desean lograr:

$$Er_p \leq 2\% \text{ (entrada rampa)}$$

$$M_f \geq 50^\circ$$

$$T_p \leq 0,8 \text{ seg.}$$

En las figuras 9.8. a 9.10. tenemos los diagramas de Bode y de Black y la respuesta a una entrada de escalón, para  $Kx = 50$ .

fig.9.8

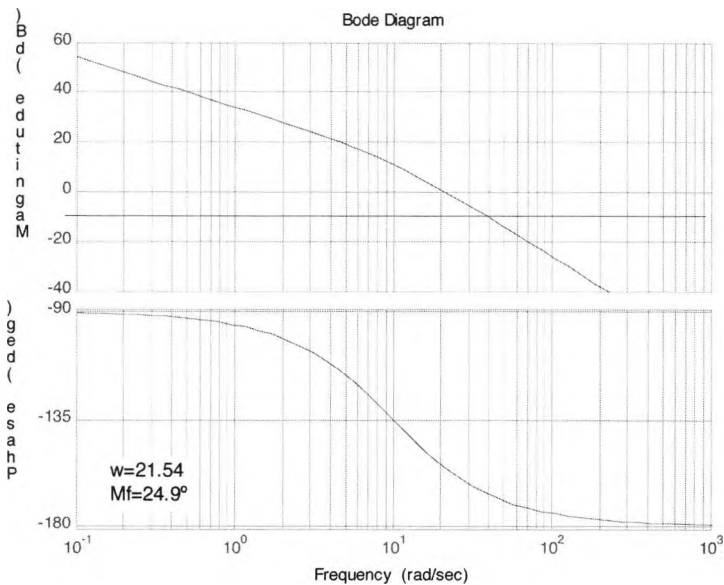


fig.9.9:

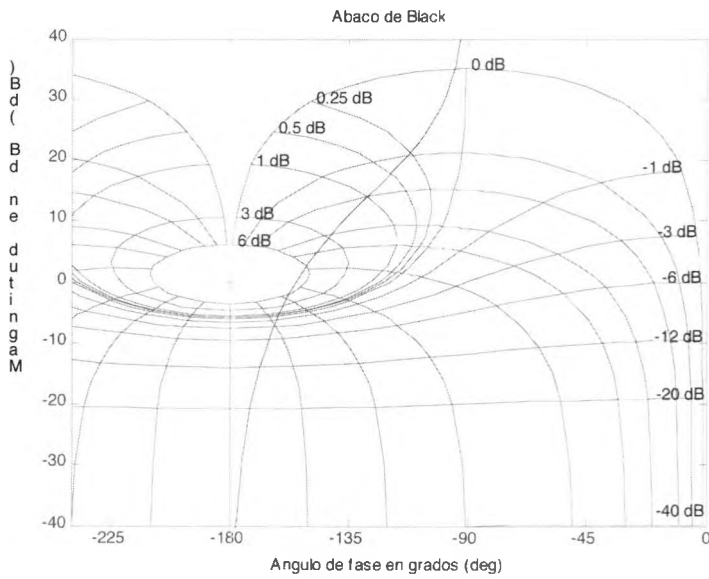
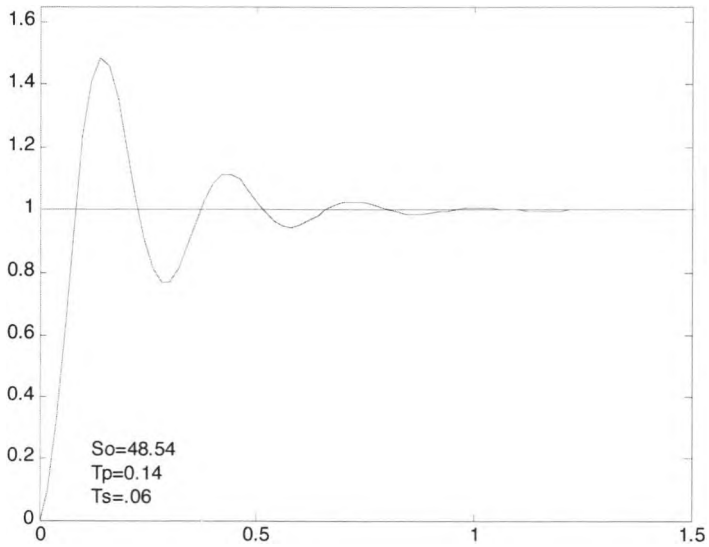


fig.9.10:



En el gráfico de Bode buscamos un punto cuya fase sea algo mayor a  $50 + 5 - 180^\circ = -125^\circ$ , y encontramos que para pulsación igual a 6, la fase es de  $-121^\circ$  y la amplitud  $17 \text{ dB} = 7$ , por lo que tomamos como nueva función de transferencia:

$$G^*(S) = \frac{50(s/0,5 + 1)}{s(s/0,07 + 1)(s/10 + 1)}$$

En las figuras 9.11. a 9.13. tenemos los diagramas de Bode, Black y la respuesta a un escalón del sistema compensado. En los mismos podemos apreciar que se cumplen las especificaciones deseadas.

fig.9.11:

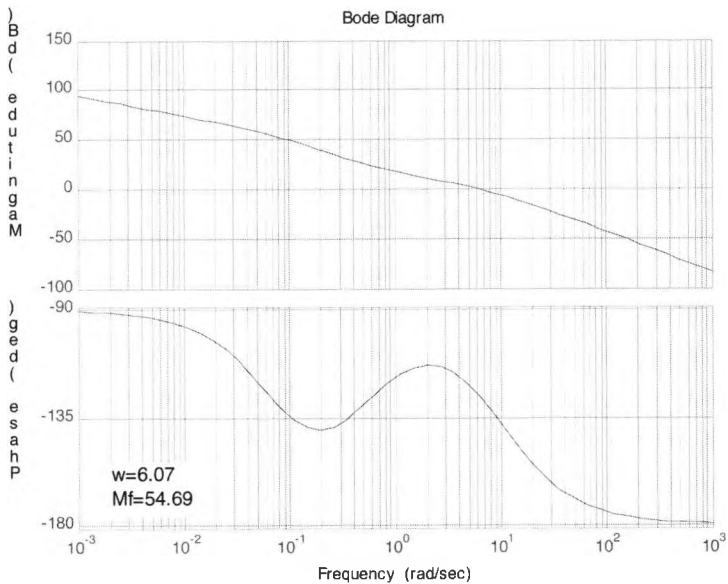


fig.9.12:

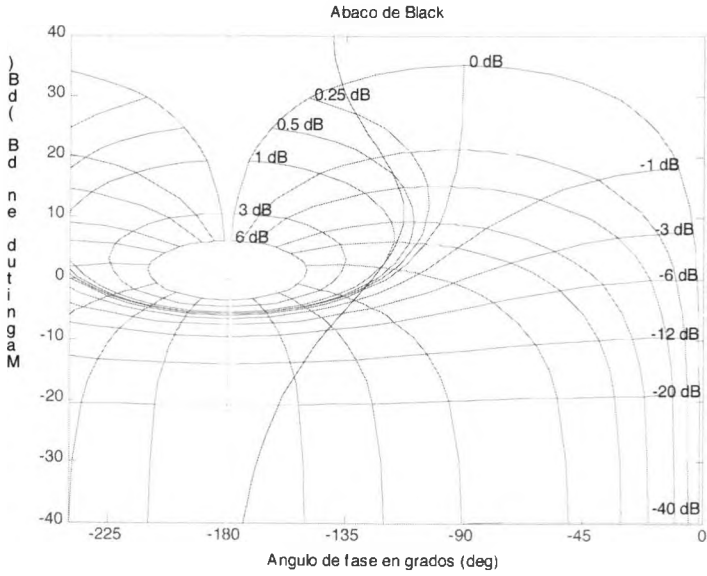


fig.9.13:

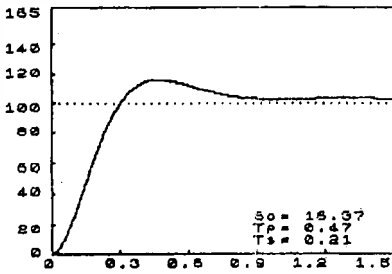
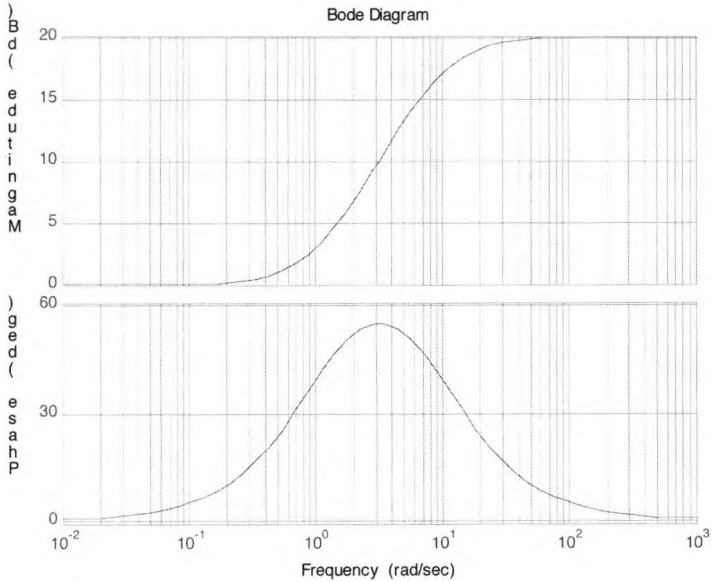


fig.9.14:



### 9.3. ADELANTO DE FASE

La función de transferencia de este compensador en cascada la podemos poner en la forma:

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

En este caso el amplificador tiene una ganancia  $A = 1/\alpha$ . El gráfico de Bode de esta función de transferencia es el que aparece en la figura 9.14., para  $\alpha = 0,1$  y polo y cero en  $-10$  y  $-1$ , respectivamente.

Para frecuencias bajas, la amplitud tiende a 0 dB, y para las altas hay una ganancia de  $-20 \log \alpha$ . La fase que aporta este compensador es positiva y presenta un máximo en el punto central entre  $1/\tau$  y  $1/\alpha\tau$ . Sustituyendo este valor en la función de transferencia, obtenemos la fase máxima:

$$\varphi = \arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (1.9.)$$

Si admitimos que el valor mínimo de  $\alpha$  es 0,1, la fase máxima posible es de  $54,9^\circ$ .

Esta propiedad del compensador, de aportar fase positiva, se puede emplear para aumentar el margen de fase, si se sitúa el compensador en la posición adecuada. Por otra parte, la ganancia que se obtiene para frecuencias altas, puede aumentar la pulsación correspondiente a 0 dB de amplitud, lo cual determinará un aumento de la pulsación de resonancia y, por tanto, se incrementa la rapidez de respuesta del sistema.

El diseño de un compensador de adelanto de fase en el dominio de la frecuencia es algo más complejo que el de retardo, pues el nuevo punto de corte con 0 dB puede ser en algunos casos difícil de estimar. Cuando la pendiente de la amplitud se mantenga sensiblemente constante la zona de corte con 0 dB, se pueden aplicar las siguientes reglas:

a) Se determina el margen de fase del sistema original y se estima la disminución de fase desde el actual corte con 0 dB hasta el nuevo punto de corte con 0 dB (generalmente sobre  $10^\circ$ ). Esta cantidad se le incrementa al margen de fase que se desea alcanzar y se le resta el margen de fase del sistema no compensado:

$$\varphi = M^* f + \Delta \varphi - Mf$$

b) El ángulo obtenido anteriormente en la fase que debe aportar el compensador de adelanto, y nos permite calcular la relación entre el cero y el polo del mismo. Despejando de 1.9 :

$$\alpha = \frac{1 - \operatorname{sen}\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}$$

c) Si la pendiente en la zona de corte con 0 dB es de  $-20n$  dB/década, entre las esquinas del compensador habrá una pendiente de  $-20(n-1)$  dB/década y un desnivel de  $20 \log [(n-1) / \alpha]$  dB. Si queremos que el nuevo corte con 0 dB caiga aproximadamente en el punto de máxima fase del compensador, el cero del mismo lo situaremos en el punto cuya amplitud sea  $10 \log [(n-1) / \alpha]$ .

Para el caso en que en la zona de corte con 0 dB la pendiente sea de  $-20$  dB/década, el cero puede situarse en el mismo punto de corte con 0 dB.

Si en la zona próxima a 0 dB de amplitud, la pendiente no es ni aproximadamente constante, la posición del compensador ha de encontrarse por tanteo.

**EJEMPLO 9.3.-** Para el sistema del ejemplo 9.1. se quiere conseguir:

$$Er_p \leq 1 \% \text{ (escalón)}$$

$$Mf \geq 54^\circ$$

$$T_p \leq 0,1 \text{ seg.}$$

Como tenemos un margen de fase de  $19,6^\circ$ , el compensador ha de aportar una fase:

$$\varphi = 64 + 10 - 19,6 = 54,4^\circ$$

Para la fase máxima anteriormente calculada, precisamos que  $\alpha$  sea aproximadamente  $0,1$ .

Como la pendiente en la zona de  $0$  dB es de  $-40$  dB / década, el cero lo situamos en el punto cuya amplitud es aproximadamente  $10$  dB, que en nuestro caso puede estimarse para una pulsación de  $18$  r/s (realmente algo menos), como puede apreciarse en el gráfico de Bode de la figura 9.15., que es una reproducción del de la figura 9.2.

El polo lo situamos en  $18/0,1 = 180$ , y el nuevo punto de corte estará aproximadamente en la media geométrica de las pulsaciones de las esquinas del compensador, es decir, en  $56,9$ .

Los resultados del sistema compensado pueden verse en las figuras 9.16. a 9.18., y como puede apreciarse, se cumplen todas las especificaciones.

fig.9.15:

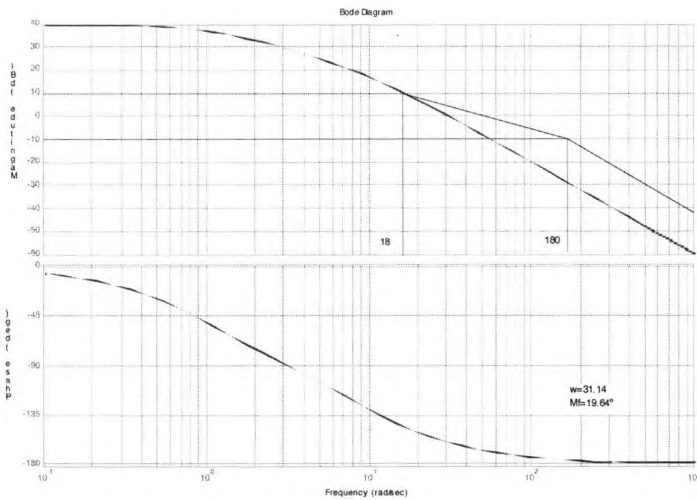


fig.9.16:

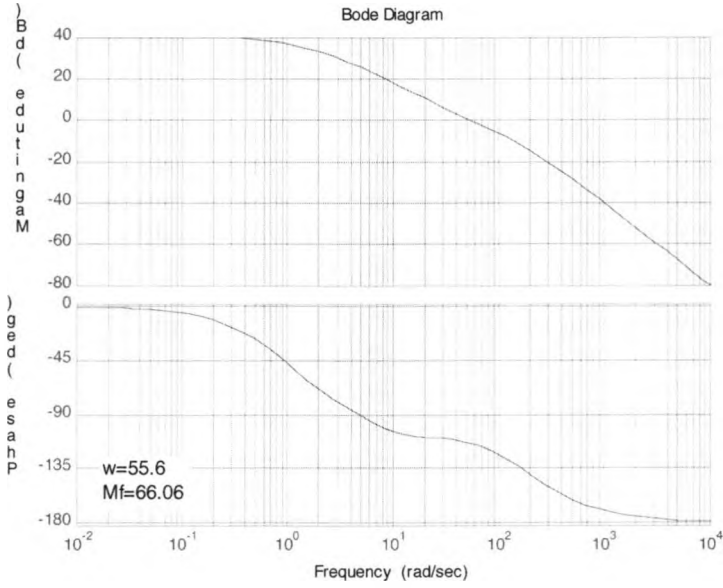


fig.9.17:

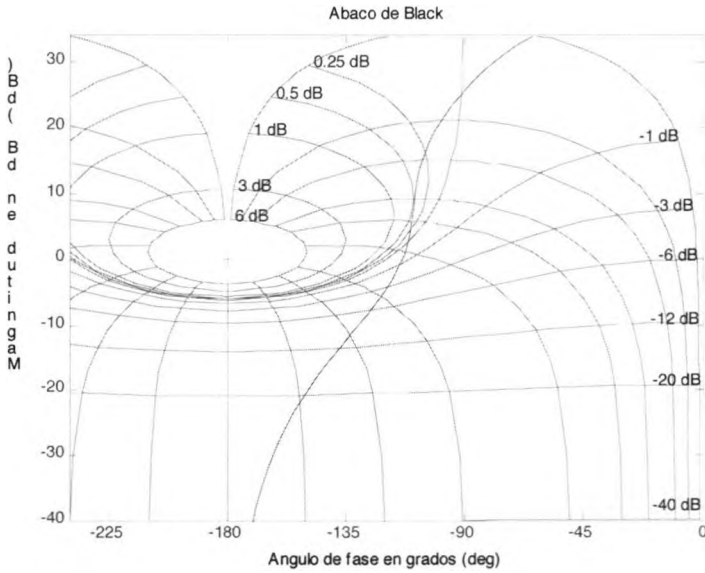
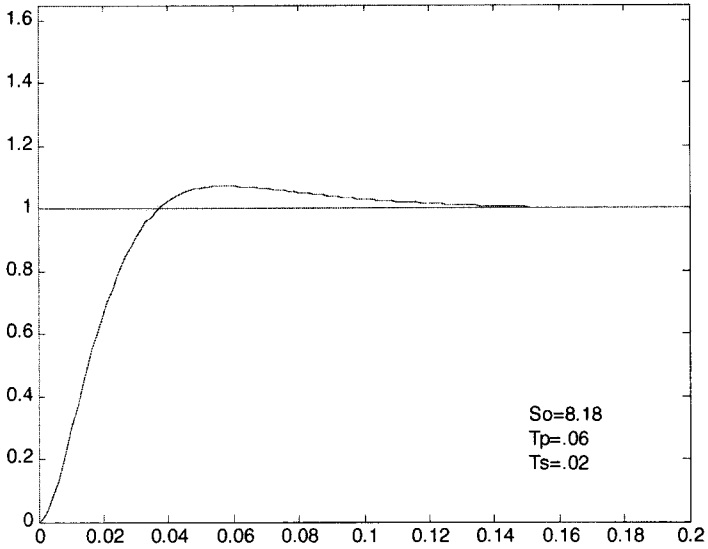


fig.9.18:



#### 9.4. COMPENSACIÓN POR REALIMENTACIÓN

El diseño de un compensador por realimentación es bastante más laborioso que el de un compensador en cascada, por lo que consideraremos en primer lugar un procedimiento gráfico aproximado, que facilita el encontrar una solución, y a continuación un procedimiento, también gráfico, de mayor exactitud, que se puede emplear como comprobación del primero.

En la función de transferencia en bucle abierto del sistema compensado por realimentación:

$$G^*(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) C(s)}$$

Normalmente, para frecuencias bajas  $G(s)$  suele ser grande y  $C(s)$  pequeño, por lo que  $G(s)$  se puede considerar que es pequeño frente a la unidad. En consecuencia, se puede aproximar la función de transferencia en bucle abierto del sistema compensado por  $G(s)$ . Si no ocurre así, y  $G(s)$  es grande, se puede despreciar el uno del denominador y hacer la aproximación por  $1/C(s)$ .

Para frecuencias altas  $G(s)$  suele ser muy pequeño, por lo que  $G(s) \cdot C(s)$  también lo es, y se puede aproximar por  $G(s)$ .

Para frecuencias intermedias suele ser  $G(s) \cdot C(s)$  mucho mayor que la unidad, por lo que se puede aproximar la función de transferencia en bucle abierto del sistema compensado por  $1/C(s)$ .

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, el procedimiento aproximado aludido anteriormente consiste en:

- 1º) Se dibuja en el plano de Bode el módulo de  $G(s)$  y posteriormente, después de hacer un tanteo, se traza el módulo de  $1/C(s)$ , marcando los puntos  $A$  y  $B$  en que ambos trazos se cortan (suponemos que  $A$  está a la izquierda de  $B$ ).
- 2º) Se aproxima  $G^*(s)$  por  $1/C(s)$  entre  $A$  y  $B$ , por  $G(s)$  para la zona a la izquierda de  $A$ , si  $C(s)$  es pequeño, o bien por  $1/C(s)$  si no lo es. Por último, se aproxima la zona a la derecha de  $B$  por  $G(s)$ .
- 3º) Se traza en el plano de Bode la curva de fase correspondiente la gráfica de amplitudes hallada en los pasos anteriores.
- 4º) Se determina el margen de fase y/o otros indicadores del comportamiento transitorio del sistema. Si los resultados son satisfactorios se realiza comprobación mediante el procedimiento mas aproximado y de lo contrario se repite el proceso desde el punto 1º.

El procedimiento gráfico más exacto, que se puede emplear para comprobar los resultados obtenidos por el método descrito anteriormente, es el siguiente:

- 1º) Se representa en el plano de Bode la amplitud y fase de  $G \cdot C$
- 2) El resultado obtenido anteriormente se pasa al diagrama de Black.
- 3º) Del diagrama de Black obtenemos los datos para representar en el plano de Bode la función de transferencia  $G \cdot C / (1 + CG)$ , obteniendo las curvas de amplitud y fase.
- 4º) En el mismo diagrama de Bode del punto anterior se traza la fase y la amplitud de  $1/C$ .
- 5º) Se suman las curvas obtenidas en los puntos 3º y 4º, obteniéndose como resultado las gráficas de amplitud y fase de  $G / (1 + GC)$ .
- 6º) Partiendo del gráfico de Bode de la función de transferencia en bucle abierto del sistema compensado, obtenido en el punto 5º, se puede evaluar el comportamiento del sistema en el régimen transitorio por los procedimientos ya conocidos.

**EJEMPLO 9.4.-** Un sistema tiene las funciones de transferencia:

$$H(s) = 1 ; G(s) = \frac{Kx}{(s/5 + 1)(s/20 + 1) s}$$

Se deben cumplir las especificaciones:

$$Erp \leq 1 \% \text{ (rampa)} ; Mf \geq 60^\circ$$

1º) Trazamos el gráfico de Bode de  $G(s)$ , figura 9.19., obteniéndose un margen de fase negativo (sistema inestable). El diagrama de amplitud se ha trazado para  $Kx = 100$ .

fig.9.19:

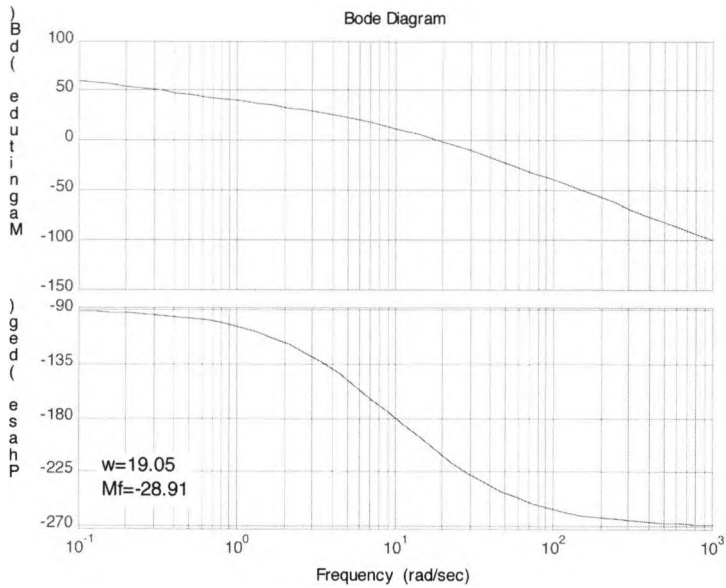


fig.9.20:

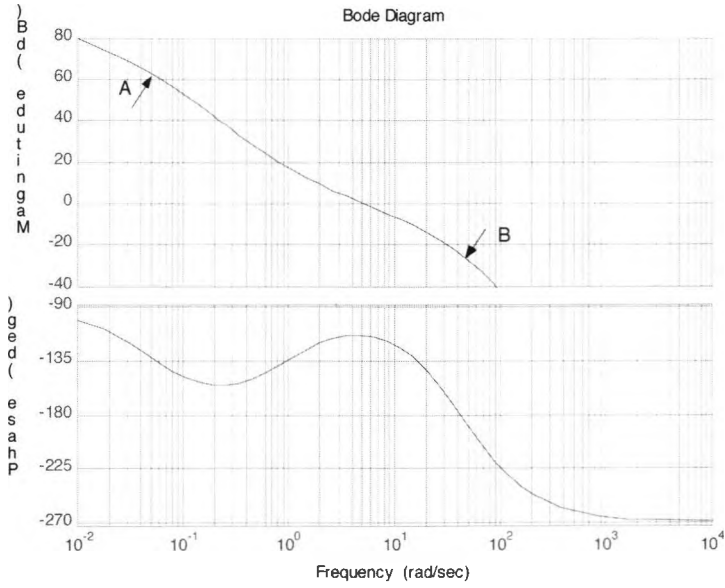


fig.9.21:

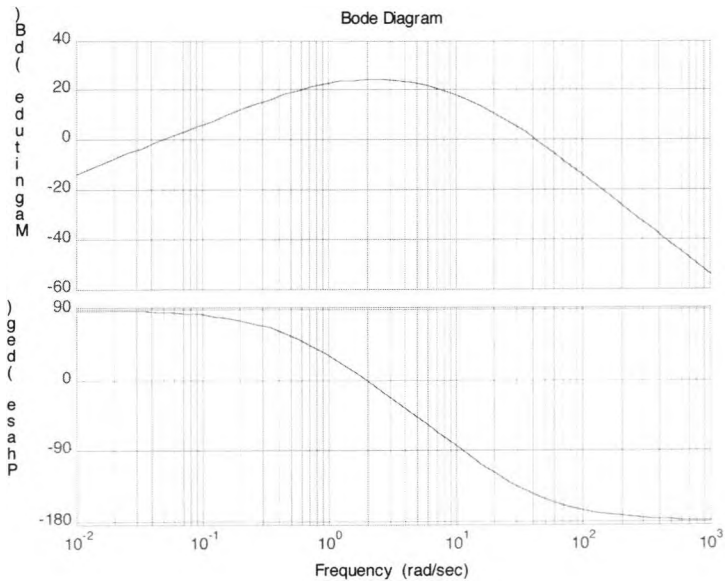


fig.9.22:

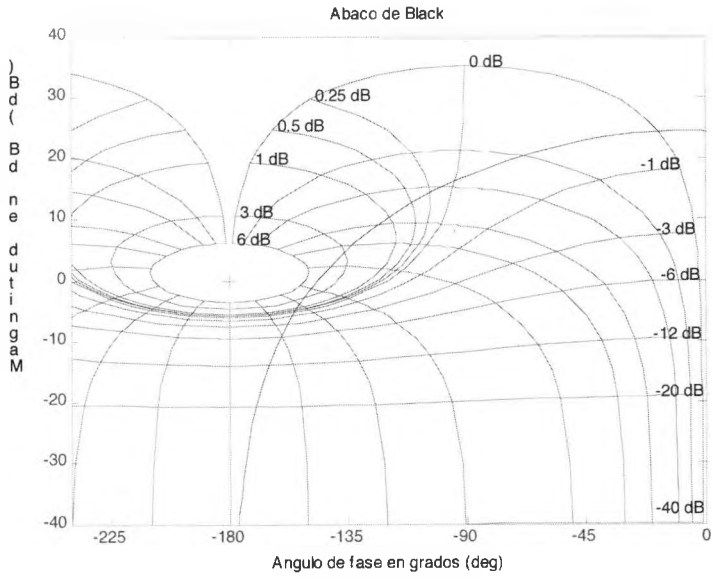


fig.9.23:

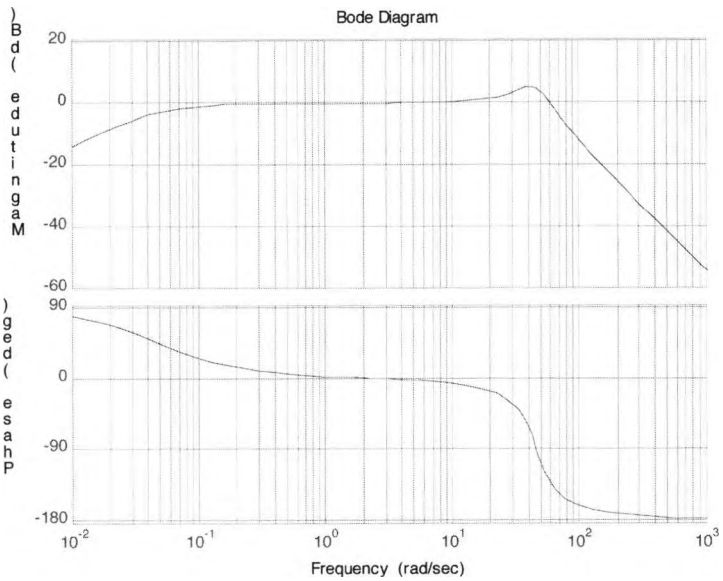


fig.9.24:

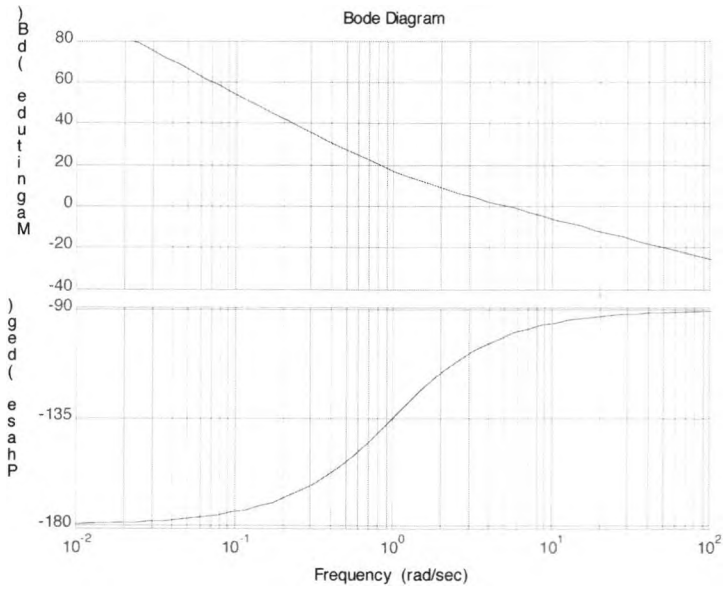
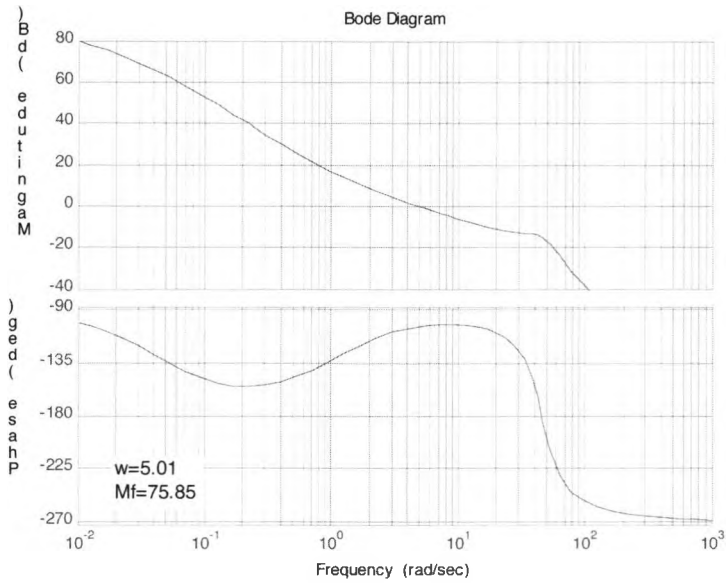


fig.9.25:



2º) Como la función de transferencia de nuestro sistema es de tipo uno, tendremos que emplear una función de transferencia para el compensador de realimentación de la forma:

$$C(s) = \frac{Kts^2}{s+a}$$

PULSAC.	BUCLE ABIERTO		G.C/(1 + G.C)		INVERSO DE C G/(1 + G.C)			
	FASE	A dB	FASE	A dB	FASE	A dB	FASE	A dB
.01	89.3	-13.98	78	-14.17	-179.4	93.98	-101.4	79.81
.02	88.6	-7.96	67	-8.68	-178.9	81.94	-111.9	73.26
.03	87.9	-4.44	57.5	-5.92	-178.3	74.9	-120.8	68.98
.04	87.1	-1.95	49.6	-4.3	-177.7	69.9	-128.1	65.61
.05	86.4	-.01	43.2	-3.28	-177.1	66.03	-133.9	62.75
.06	85.7	1.57	38.1	-2.61	-176.6	62.87	-138.5	60.26
.07	85	2.9	33.9	-2.14	-176	60.2	-142.1	58.05
.08	84.3	4.05	30.4	-1.81	-175.4	57.88	-145	56.07
.09	83.6	5.07	27.6	-1.57	-174.9	55.84	-147.3	54.27
0.1	82.9	5.98	25.1	-1.39	-174.3	54.02	-149.1	52.63
0.2	75.8	11.86	13.1	-0.76	-168.7	42.11	-155.6	41.35
0.3	69	15.17	8.7	-0.63	-163.3	35.27	-154.6	34.64
0.4	62.5	17.39	6.4	-0.58	-158.2	30.54	-151.8	29.96
0.5	56.3	18.98	5	-0.56	-153.4	26.99	-148.4	26.43
0.6	50.5	20.18	4.1	-0.55	-149	24.19	-145	23.64
0.7	45	21.1	3.4	-0.54	-145	21.91	-141.6	21.37
0.8	40	21.82	2.8	-0.53	-141.3	20	-138.5	19.47
0.9	35.2	22.38	2.4	-0.53	-138	18.39	-135.6	17.86
1	30.8	22.83	2	-0.53	-135	16.99	-133	16.46
2	-0.9	24.36	-0.1	-0.51	-116.6	8.93	-116.6	8.42
3	-21.1	24.13	-1.2	-0.49	-108.4	4.89	-109.6	4.4
4	-35.9	23.44	-2.1	-0.47	-104	2.2	-106.2	1.73
5	-47.7	22.58	-3	-0.44	-101.3	0.17	-104.3	-0.27
6	-57.4	21.65	-3.8	-0.4	-99.5	-1.46	-103.3	-1.86
7	-65.6	20.72	-4.6	-0.35	-98.1	-2.83	-102.7	-3.19
8	-72.7	19.79	-5.4	-0.3	-97.1	-4.02	-102.5	-4.31
9	-78.8	18.89	-6.2	-0.24	-96.3	-5.05	-102.6	-5.29
10	-84.3	18.02	-7	-0.17	-95.7	-5.98	-102.7	-6.15
20	-118.1	10.69	-16.6	0.91	-92.9	-12.03	-109.5	-11.12
30	-134.9	5.21	-32.4	2.79	-91.9	-15.56	-124.3	-12.77
40	-144.9	0.9	-63.2	4.71	-91.4	-18.06	-154.6	-13.35
50	-151.3	-2.63	-106.1	3.41	-91.1	-20	-197.3	-16.59
60	-155.8	-5.59	-133.4	-0.61	-91	-21.58	-224.4	-22.19
70	-159.2	-8.15	-146.8	-4.4	-90.8	-22.92	-237.6	-27.32
80	-161.7	-10.38	-154.1	-7.52	-90.7	-24.08	-244.8	-31.6
90	-163.7	-12.37	-158.6	-10.13	-90.6	-25.1	-249.3	-35.23
100	-165.3	-14.16	-161.7	-12.35	-90.6	-26.02	-252.3	-38.37
200	-172.6	-26.07	-172.2	-25.63	-90.3	-32.04	-262.5	-57.67
300	-175	-33.88	-174.9	-32.89	-90.2	-35.56	-265.1	-68.45
400	-176.3	-38.07	-176.2	-37.96	-90.1	-38.06	-266.4	-76.03
500	-177	-41.95	-177	-41.88	-90.1	-40	-267.1	-81.88

Realizamos una plantilla con la forma del diagrama de amplitudes, mediante asintotas, del inverso de  $C(s)$ , la cual desplazamos sobre el gráfico de Bode obtenido anteriormente hasta que encontremos una posición que nos de un margen de fase suficiente.

De esta manera encontramos una posición en la que la esquina del diagrama de amplitudes de  $1/C(s)$  queda en 14 dB y pulsación igual a 1 r/s, por lo que la función de transferencia del compensador resulta ser:

$$C(s) = \frac{0,2 s^2}{s + 1}$$

Los puntos  $A$  y  $B$  de corte de las dos curvas de amplitudes son correspondientes a las pulsaciones 0,05 y 43,6; respectivamente.

3º) En la figura 9.20. se ha dibujado el gráfico de Bode de:

$$G^*(s) = \frac{100(s + 1)}{s(s/0,05 + 1)(s/43,6 + 1)^2}$$

Que es la función de transferencia aproximada del sistema compensado, mediante la suposición de que a la izquierda del punto  $A$  y a la derecha del  $B$ ,  $G^*(s)$  y entre los dos puntos por el inverso de  $C(s)$ . También se ha supuesto que hay un polo doble en  $-43,6$ , cuando realmente tenemos un par de polos complejos conjugados.

El margen de fase que se obtiene es de 66 °.

4º) Iniciamos la comprobación con el trazado del gráfico de Bode de  $G(s) \cdot C(s)$  (figura 9.21.), del que pasamos al diagrama de Black de la figura 9.22.

Partiendo del anterior diagrama de Black, obtenemos el gráfico de Bode de  $G(s) \cdot C(s) / (1 + G(s) \cdot C(s))$ , que es el que aparece en la figura 9.23.

5º) Representamos la fase y la amplitud del inverso de  $G(s)$ , que es el que aparece en la figura 9.24.

Sumamos las curvas de fases de las figuras 9.23. y 9.24., y de la misma manera procedemos con las gráficas de amplitudes. Obteniéndose los resultantes de la figura 9.25. que es el gráfico de Bode de la nueva función de transferencia en bucle abierto.

En la figura 9.25. se aprecia que el margen de fase del sistema compensado es de casi 76 grados.

La nueva función de transferencia se puede calcular analíticamente y también obtenerla del gráfico de Bode de la misma. En nuestro caso resulta ser:

$$G^*(s) = \frac{100(s+1)}{s(s/0,047+1)(s^2/2123,8+0,0117s+1)}$$

Nótese la buena aproximación obtenida en este caso por el método aproximado, que nos daba un polo real en  $-0,05$  (valor exacto  $-0,047$ ), y un par de polos complejos de  $\omega_n = 43,6$  (valor exacto  $46,8$ ).

En la tabla que aparece en la página 136 están los valores de la amplitudes y fases de los distintos pasos de la comprobación de la compensación realizada. En la primera columna está la pulsación, la segunda y tercera corresponden a la fase y amplitud de  $G(s) \cdot C(s)$ , etc.



## CAPÍTULO 10 DESCRIPCIÓN INTERNA

### 10.1. INTRODUCCIÓN

Definimos estado de un sistema de un instante  $t_0$  a la mínima información del sistema en  $t_0$  que permita determinar su salida y en el instante  $t$  ( $t > t_0$ ), conociendo la entrada  $u(t)$  entre los instantes  $t_0$  y  $t$ .

El estado de un sistema estará determinado por un conjunto mínimo de variables:

$$X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_n(t)$$

Las cuales representaremos mediante una matriz columna que denominaremos vector de estado o simplemente, estado:

$$X^T = [X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \quad X_n]$$

Dada la definición de estado, podemos deducir que deberán existir unas relaciones que permitan determinar el estado en el instante  $t$  en función de  $t$ , del estado  $t_0$  y de la entrada entre  $t_0$  y  $t$ , y que nos den la salida  $Y(t)$  en función de  $t$ , del estado en  $t$  y de la entrada en  $t$ . Es decir:

$$\begin{aligned} X(t) &= \phi[t, X(t_0), u(t_0, t)] \\ Y(t) &= G[t, X(t), u(t)] \end{aligned}$$

Denominaremos a éstas relaciones función de transición y función de salida o de lectura, respectivamente.

Si un sistema tiene  $m$  entradas,  $p$  salidas y  $n$  variables de estado, en las anteriores relaciones  $u$  será un vector columna de  $m$  componentes, y un vector fila de  $p$  componentes y  $X$  un vector columna de  $n$  componentes.  $\phi$  y  $G$  representan relaciones matriciales.

El conjunto de todos los valores del vector de estado será un espacio de  $n$  dimensiones que denominaremos espacio de estado.

Partiendo de un instante  $t_0$  para una cierta entrada  $u(t)$ , mediante la función de transición, obtendremos para cada instante  $t$  un valor del vector de estado, que representará un punto en el espacio de estado. El conjunto de puntos obtenidos de esta forma define una cierta trayectoria que denominaremos trayectoria de estado, (ver ejemplos 10.1 y 10.2).

En todo lo que sigue nos referiremos a los sistemas lineales en tiempo continuo e invariantes, descritos por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, por lo que emplearemos relaciones de la forma:

$$\frac{dX(t)}{dt} = F[t, X(t), u(t, t_0)]$$

Que denominaremos ecuación de estado.

La descripción interna de los sistemas que nos interesan puede hacerse mediante las ecuaciones:

$$X' = AX + Bu$$

$$Y = CX + Du$$

A, B, C, y D representan matrices que al ser el sistema invariante en el tiempo estarán constituidos por constantes.

En la mayor parte de los casos no existirá conexión directa entre la entrada y la salida, pues ésta se efectúa solo por mediación del vector de estado, con lo que prácticamente podemos considerar las ecuaciones de estado y salida siguientes:

$$X' = AX + Bu$$

$$Y = Cu$$

Si las dimensiones de  $X$ ,  $u$  e  $Y$  son  $n$ ,  $m$  y  $p$  respectivamente, la matriz de evolución  $A$  será cuadrada de dimensión  $n \times n$ , la matriz de aplicación de control  $B$  será  $n \times m$  y la matriz de observación  $C$  de  $p \times n$ .

Para el caso de sistemas con una entrada y una salida tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \cdot \\ X'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$Y = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 10.1.** Sea un sistema descrito por la ecuación diferencial

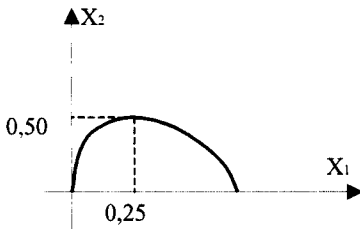
$$Y'' + 3Y' + 2Y = 2u$$

Si hacemos, tenemos las ecuaciones de estado siguientes:

$$\begin{aligned} X_1' &= X_2 \\ X_2' &= 2u - 3x_2 - 2x_1 \end{aligned}$$

Y la función de salida:  $Y = X_1$

Fig.10.1:



Las anteriores ecuaciones las podemos poner en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot u$$

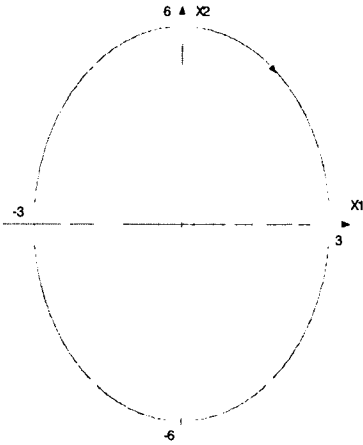
$$Y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

El espacio de estado es un plano y la trayectoria en dicho plano partiendo en  $t = 0$  de  $X_1 = X_2 = 0$  para entrada  $u$  un escalón de altura unitaria aplicado en el instante inicial, tenderá para  $t$  tendiendo a infinito al punto  $(1,0)$  que es donde termina la trayectoria de estado, (figura 10.1).

**EJEMPLO 10.2.** Supongamos un sistema dado por las ecuaciones:

$$X_1' = X_2 ; X_2' = 4u - 4X_1 ; Y = 2X_1 + X_2$$

Fig.10.2



Dibujar la trayectoria de estado para  $u = 0$ , siendo en el instante inicial  $X_1 = 0$  y  $X_2 = 6$ .

Integrando las ecuaciones diferenciales se obtiene:

$$X_1 = 3 \operatorname{sen} 2t ; X_2 = 6 \operatorname{cos} 2t$$

De las anteriores se deduce la ecuación de la trayectoria de estado al eliminar el tiempo:

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{36} = 1$$

El estado recorre continuamente la anterior elipse (figura 10.2), por lo que se trata de un sistema oscilante.

## 10.2. DISTINTAS FORMAS DE DESCRIPCIÓN INTERNA

La descripción interna de un sistema no es única, ya que existen infinidad de representaciones por variables de estado distintas para un mismo sistema.

Supongamos un sistema dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X' &= A_1 X + B_1 u \\ Y &= C_1 X \end{aligned}$$

Podemos definir otro vector de estado  $Z$  obtenido mediante una transformación lineal no singular del vector de estado  $X$ :

Despejamos  $X$ :  $X = T^{-1}Z$

Derivando:  $X' = T^{-1}Z'$

Sustituyendo resulta:

$$\begin{aligned} T^{-1}Z' &= A_1 T^{-1}Z + B_1 u \\ Y &= C_1 T^{-1}Z \end{aligned}$$

La nueva representación del sistema mediante el vector de estado  $Z$  tendrá la forma:

$$Z' = A_2 Z + B_2 u \quad ; \quad Y = C_2 Z$$

Siendo:

$$A_2 = T A_1 T^{-1} \quad ; \quad B_2 = T B_1 \quad ; \quad C_2 = C_1 T^{-1}$$

Cuando dos sistemas tengan representaciones por variables de estado que pueden relacionarse mediante una transformación lineal no singular, diremos que son similares.

Entre las infinitas representaciones de un sistema mediante variables de estado, hay algunas que se pueden considerar canónicas debido a ciertas propiedades o características de las mismas, las cuales pasaremos a estudiar seguidamente.

### 10.3. FORMA CANÓNICA DE CONTROL

También se la conoce como forma canónica en variables de fase.

Consideremos un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$P(D)Y = Q(D)u$$

En donde el grado  $P(D)$  es  $n$  y el de  $Q(D)$  es  $m$ , siendo  $n$  mayor que  $m$ . Los polinomios tienen la forma:

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$$

$$Q(D) = b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_1D + b_0$$

Se introduce una variable auxiliar  $Z$  y se hace el cambio:

$$Z = \frac{u}{P(D)} \quad ; \quad Y = Q(D)Z$$

Se definen  $n$  variables de estado con la forma:

$$x_i = Z^{(i-1)} \quad \text{siendo, } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

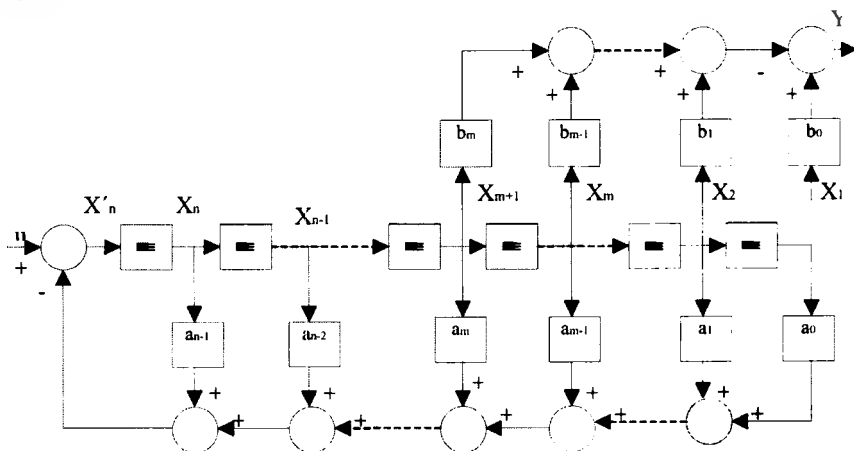
La ecuación diferencial queda descompuesta en las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned}$$

Y en la ecuación de lectura:

$$Y = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + b_mx_{m+1}$$

fig.10.3:



De las anteriores ecuaciones podemos deducir las matrices que definen esta representación por variables de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$$

En la figura 10.3 aparece un diagrama de bloque correspondiente a esta forma canónica de control.

Nótese que los símbolos empleados nos son los convencionales y que los integradores y sumadores no invierten.

Los vectores de estado empleados en los ejemplos 10.1 y 10.2 corresponden a la forma canónica del control.

### 10.4. FORMA CANÓNICA DE OBSERVACIÓN

Suponiendo que el modelo matemático de un sistema es el considerado en 10.3, la forma canónica de observación se obtiene dividiendo por  $D^n$ , despejando la salida y ordenando:

$$Y = -\frac{a_{n-1}}{D}Y - \frac{a_{n-2}}{D^2}Y - \dots + \frac{1}{D^{n-m}}(b_m u - a_m Y) + \dots + \frac{1}{D^n}(b_0 u - a_0 Y)$$

Las variables de estado se definen:

$$\begin{aligned} x_1' &= -a_0 x_n + b_0 u \\ x_2' &= -a_1 x_n + b_1 u + x_1 \\ &\dots \\ x_{m+1}' &= -a_m x_n + b_m u + x_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{m+2} &= -a_{m+1}x_n + x_{m+1} \\ &\dots \\ & \\ x_n &= -a_{n-1}x_n + x_{n-1} \end{aligned}$$

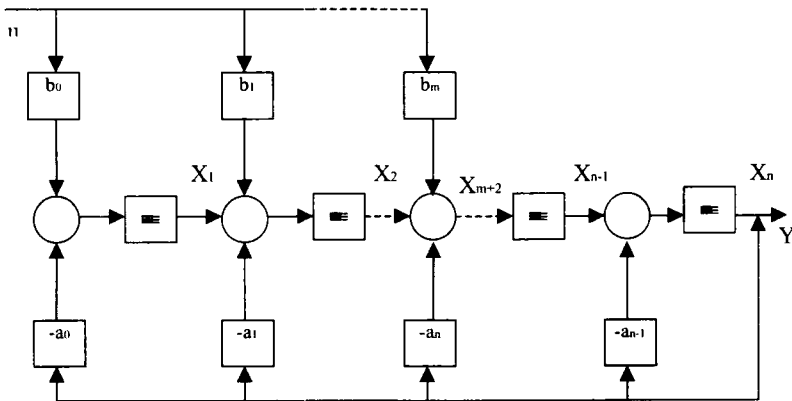
El diagrama de bloque de la forma canónica de observación se ha representado en la figura 10.4

De las ecuaciones de estado anteriormente obtenida y de la función de lectura:

$$Y = x_n$$

se obtienen las matrices A, B y C de ésta forma canónica:

fig.10.4



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B^T = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

### 10.5. FORMA CANÓNICA DE JORDAN

Poniendo la ecuación diferencial en la forma:

$$Y = \frac{Q(D)u}{P(D)}$$

Suponiendo que  $P(D)$  no tiene raíces múltiples, podemos hacer una descomposición en fracciones simples, todas con la misma forma:

$$Y = \frac{C_1}{D - P_1}u + \frac{C_2}{D - P_2}u + \dots + \frac{C_n}{D - P_n}u$$

Siendo las constantes  $P_i$  las raíces de  $P(D)$  y  $C_i$  los residuos.

Las ecuaciones de estado y la función de lectura son:

$$x_1' = P_1 x_1 + u$$

$$x_2' = P_2 x_2 + u$$

· ..... ·

$$x_n' = P_n x_n + u$$

$$Y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

Las matrices:

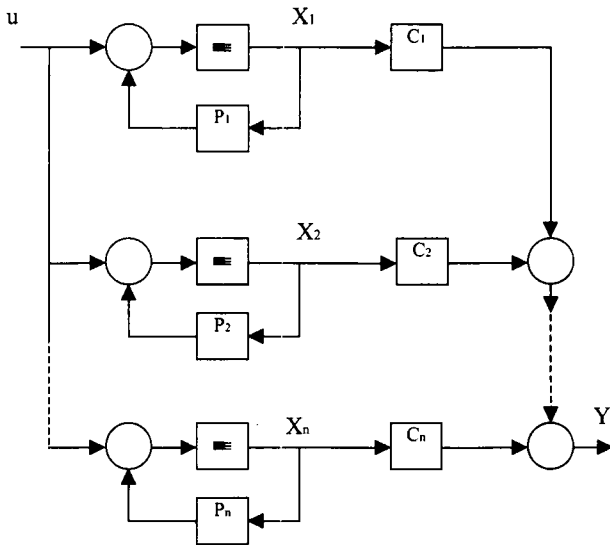
$$A = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_n \end{bmatrix}$$

$$B^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \dots \quad C_n]$$

El diagrama de bloques es el de la figura 10.5

fig.10.5:

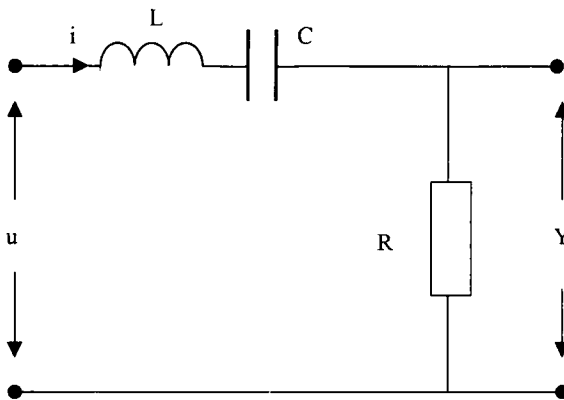


**EJEMPLO 10.3.** Obtener las formas canónicas de control y observación del circuito de la figura 10.6

Se deduce fácilmente la siguiente ecuación:

$$LDi + Ri + i / CD = u$$

fig:10.6:



Como  $y = R I$ , se puede poner:

$$\left( D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} \right) Y = \frac{R}{L} D u$$

1º .- Forma canónica de control.

$$Y = \frac{\frac{R}{L} D u}{D^2 + \frac{R}{L} D + \frac{1}{CL}}$$

Introducimos la variable auxiliar  $Z$ :

$$Y = \frac{R}{L} D Z$$

$$Z = \frac{u}{D^2 + \frac{R}{L} D + \frac{1}{CL}}$$

De la última ecuación se deduce:

$$Z'' = -\frac{R}{L} Z' - \frac{1}{CL} Z + u$$

Definimos las variables de estado

$$x_1 = Z$$

$$x_2 = Z'$$

Las ecuaciones de estado resultan:

$$x_2' = -\frac{R}{L} x_2 - \frac{1}{CL} x_1 + u$$

$$x_1' = x_2$$

La ecuación de salida:

$$Y = \frac{R}{L} x_2$$

Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R \\ CL & L \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

2°.- Forma canónica de observación.

Dividimos por  $D^2$  la ecuación diferencial y despejamos  $Y$ :

$$Y = \frac{1}{D} \left[ \frac{R}{L}u - \frac{R}{L}Y + \frac{1}{D} \left( -\frac{1}{LC}Y \right) \right]$$

Ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} x_1' &= -\frac{1}{LC}x_2 \\ x_2' &= x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{R}{L}u \end{aligned}$$

Ecuación de lectura:  $Y = x_2$

Matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{LC} \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

**EJEMPLO 10.4.** Obtener la matriz de transformación entre las dos formas canónicas de variables de estado del ejemplo anterior.

Designamos por  $\bar{x}$  al vector de estado de la forma canónica de observación. De las ecuaciones obtenidas anteriormente se deducen las siguientes relaciones:

$$\bar{x}_1 = -\frac{R}{L^2C}x_1'; \quad \bar{x}_2 = \frac{R}{L}x_2$$

De las que se deduce:

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L^2 C} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

## 10.6. FUNCIÓN DE TRANSICIÓN Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Supongamos un sistema dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X' &= AX + Bu \\ Y &= CX \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} s X(s) - X(0) &= A X(s) + B U(s) \\ Y(s) &= C X(s) \end{aligned}$$

De la primera de las anteriores ecuaciones podemos obtener:

$$(s I - A) X(s) = X(0) + B U(s)$$

Despejando  $X(s)$ :

$$X(s) = (s I - A)^{-1} (X(0) + B U(s))$$

De acuerdo con la definición dada en 10.1, la expresión anterior es la transformada de la función de transición.

A la matriz  $\phi(s) = (s I - A)^{-1}$  la denominaremos matriz de transición, con lo que:

$$X(s) = \phi(s) X(0) + \phi(s) B U(s)$$

Cuya antitransformada es la función de transición:

$$X(t) = \phi(t) X(0) + \int \phi(t - \tau) B U(\tau) d\tau$$

Siendo:

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [\phi(s)]$$

Para determinar la función de transferencia supondremos condiciones iniciales nulas, por lo cual podemos poner:

$$X(s) = \phi(s) B U(s)$$

$$Y(s) = C X(s)$$

De las anteriores ecuaciones se deduce:

$$W(s) = Y(s) U^{-1}(s) = C \phi(s) B$$

**EJEMPLO 10.5.** Sea un sistema descrito por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 1]$$

Las entradas  $u_1$  y  $u_2$  son dos escalones de alturas 1 y  $-1$  respectivamente y las condiciones iniciales del estado son nulas.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

Función de transferencia:

$$W(s) = C \phi(s) B = \frac{1}{s^2 + s + 1} [s \quad 2(s+1)]$$

La transformada de la función de transición para las condiciones iniciales dadas es:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} (s+1)U_1 + 2U_2 \\ -U_1 + 2sU_2 \end{bmatrix}$$

Para las entradas consideradas, la función de transición transformada toma la forma:

$$X(s) = -\frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} 1-s \\ 1+2s \end{bmatrix}$$

Calculando la antitransformada de la anterior expresión obtendremos la función de transición.

## CAPÍTULO 11

### ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD EN LA DESCRIPCIÓN INTERNA

#### 11.1. INTRODUCCIÓN

Entendemos por estado de equilibrio  $X_e$  como aquel en el que el sistema permanece indefinidamente al aplicar una entrada nula, es decir, si consideramos la función de transición:

$$X = \Phi[t, X(t_0), u(t_0, t)]$$

Para el estado de equilibrio  $X_e$  se debe cumplir:

$$X_e = \phi(t, X_e) \quad \text{Para } t \text{ mayor de } t_0$$

La anterior expresión, según lo considerado en 10,6, se podría poner de la siguiente forma:

$$X_e = \phi(t) X_e$$

De lo que deducimos que el estado  $X = 0$  siempre será un estado de equilibrio.

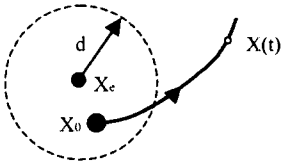
Consideremos el estado de equilibrio  $X_e$  y un estado inicial  $X_0$  en  $t = t_0$  próximo al anterior, de tal manera que:

$$|X_0 - X_e| < d ; d > 0$$

Aplicando una entrada nula y observando como evoluciona la trayectoria de estado para  $t$  mayor de  $t_0$  podemos deducir si el sistema es estable o no.

Evidentemente si  $X(t)$  se aleja continuamente de  $X_e$  al crecer el tiempo, el sistema es inestable. Ver la figura 11.1 para un espacio de estados de dos dimensiones.

fig.11.1:

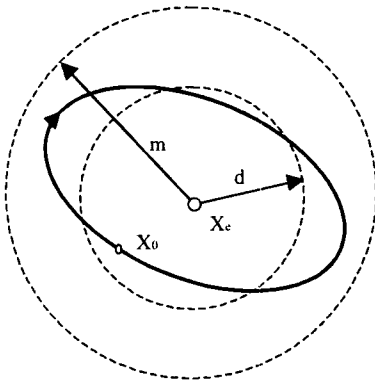


## 11.2. ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV

Si para cada valor de  $d > 0$  existe un valor  $m > 0$ , tal que se cumpla:

$$|X_e - X(t)| < m$$

fig.11.2:



para cualquier  $t > t_0$ , diremos que el sistema es estable en el sentido de Liapunov. Ver figura 11.2 para el caso de un vector de dos componentes.

Nótese que un sistema estable en el sentido de Liapunov puede ser oscilante, pero el estado no se aparta nunca significativamente del estado de equilibrio.

## 11.3. ESTABILIDAD ASINTÓTICA EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV

Si para  $d > 0$  se cumple:

$$|X_e - X(t_0)| \leq d$$

y para cualquier  $m > 0$ , tan pequeño como queramos, hay un  $T > 0$ , tal que para todo  $t > t_0 + T$ , se cumple:

$$|X_e - X(t)| \leq m$$

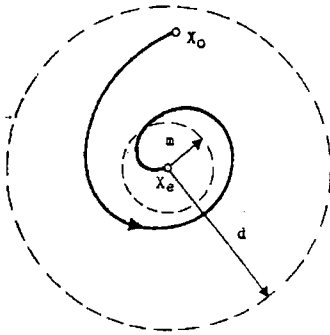
diremos que el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov. Ver figura 11.3 para un vector de estado de dos dimensiones.

La estabilidad asintótica en el sentido de Liapunov implica que el estado tiende hacia el estado de equilibrio al tender el tiempo hacia infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_e$$

Si el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov, lo será con independencia de las variables de estado elegidas, ya que dos vectores de estado de un mismo sistema están relacionados por una transformación lineal. Por tanto, si consideramos la forma canónica de Jordan, al ser además nula la entrada, podemos poner la expresión:

fig11.3:



$$\bar{X}' - \bar{A}\bar{X} = 0 \quad \text{siendo, } \bar{A} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_n \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}'_1 - P_1 \bar{X}_1 \\ \bar{X}'_2 - P_2 \bar{X}_2 \\ \dots \\ \bar{X}'_n - P_n \bar{X}_n \end{bmatrix} = 0$$

Cuya solución es:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1(0) e^{P_1 t} \\ \bar{X}_2(0) e^{P_2 t} \\ \dots\dots\dots \\ \bar{X}_n(0) e^{P_n t} \end{bmatrix}$$

Para que alcance un estado de equilibrio (reposo) al tender el tiempo hacia infinito debe cumplirse que todos los  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) han de tener su parte real negativa.

Consideremos la ecuación característica:

$$A \cdot V = L \cdot V$$

En donde  $L$  es un autovalor de  $A$  y  $V$  un vector propio de  $A$ . De la anterior ecuación se deduce que el determinante característico es igual a cero:

$$\|A - LI\| = 0$$

Si consideramos la matriz  $\bar{A}$  de la forma canónica de Jordán, la igualdad  $\|A - LI\| = 0$  se cumple para  $L = P_i$ , siendo  $P_i$  cualquiera de los elementos de la diagonal principal de  $\bar{A}$ , pues en tal caso el determinante tiene una fila y una columna con todos los elementos nulos.

Si es  $T$  una transformación no singular que convierte el vector de estado de la forma canónica de Jordán en otra fórmula cualquiera, la igualdad  $\|A - LI\| = 0$  la podemos escribir:

$$\|T \bar{A} T^{-1} - T L I T^{-1}\| = 0 \Rightarrow \|A - LI\| = 0$$

De lo que deducimos que los autovalores de una matriz no se altera con la transformación  $T$ , por lo cual los autovalores de  $A$  serán los  $P_i$  de la diagonal principal de la forma canónica de Jordan (autovalores de  $\bar{A}$ ).

En consecuencia, para que un sistema sea asintóticamente estable en el sentido de Liapunov es condición necesaria y suficiente que los autovalores de la matriz de evolución  $A$ , o lo que es igual, las raíces de la ecuación:

$$\|A - LI\| = 0$$

**EJEMPLO 11.1.** Estudiar la estabilidad del sistema del ejemplo 10.5.

$$\text{Al ser } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcularemos los autovalores igualando a cero el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} -L & 1 \\ -1 & -(L+1) \end{vmatrix} = 0$$

Resulta la ecuación:

$$L^2 + L + 1 = 0$$

cuyas raíces son:

$$L = -\frac{1}{2} \pm \frac{j}{2}\sqrt{3}$$

Al tener las raíces de la ecuación característica la parte real negativa, podemos concluir que el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

**EJEMPLO 11.2.** Estudiar la estabilidad del sistema del ejemplo 10.2.

La matriz de evolución es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son  $-2j$  y  $+2j$ , por lo cual el sistema no es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

Integrando las ecuaciones de estado para  $u = 0$  y eliminando al tiempo entre ellas se obtiene la ecuación de la trayectoria de estado siguiente:

$$\frac{X_1^2}{K^2} - \frac{X_2^2}{4K^2} = 1 \quad \text{siendo } K = \sqrt{X_1^2(t_0) + \frac{X_2^2(t_0)}{4}}$$

Es evidente que para un número positivo  $d$ , definido,  $d = K$  y siendo , existe un número positivo  $m = 2d$ , que hace que se cumpla para cualquier  $t$  mayor que  $t_0$ :

$$|X(t)| \leq m$$

De lo cual deducimos que el sistema se establece en el sentido de Liapunov. Esta conclusión concuerda con que los autovalores de  $A$  son imaginarios puros (sistema oscilante).

#### 11.4. FUNCIÓN DE LIAPUNOV

Sea una región  $R$  del espacio de estado  $X$  que contiene el origen  $X = 0$

Se define como función de energía de Liapunov o simplemente, función de Liapunov, una función escalar  $v(X)$  que en toda la región  $R$  cumple:

1°.-  $V(X)$  es continua derivable.

2°.-  $V(X)$  es positiva para cualquier  $X$  perteneciente a  $R$  que no sea el origen.  
 $X = 0$ .

3°.-  $V(0) = 0$

**EJEMPLO 11.3.** Determinar una función de Liapunov para el sistema del ejemplo 10.5.

Una posible solución sería la función:

$$V = X_1^2 + X_2^2$$

Que cumple las tres condiciones dadas anteriormente.

Esta función representa en un espacio de tres dimensiones un paraboloides de revolución cuyas intersecciones con planos  $V = cte$  son circunferencias.

Es evidente que la suma de los cuadrados de todas las variables de estado como en el ejemplo anterior, da origen a una función de Liapunov, pero son posibles infinidad de formas cuadráticas que cumplen las condiciones para ser consideradas como funciones de Liapunov. En general podemos definir:

$$V(X) = X^T E X$$

En donde la matriz de la forma cuadrática  $E$  es simétrica y de dimensión  $n \times n$ .

La condición para que  $V(X)$  sea definida positiva, es decir:

$$V(0) = 0 ; V(X) > 0 \text{ para todo } X \text{ distinto de cero}$$

es que el determinante de  $E$  y todos los determinantes que se puedan formar partiendo de  $E$  y suprimiendo la última fila y la última columna, las dos últimas filas y las dos últi-

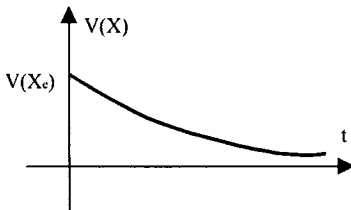
mas columnas, etc. Sean positivos ( criterio de Sylvester). En tal caso diremos que  $E$  también es definida positiva.

En el ejemplo anterior podríamos poner:

$$V(X) = [X_1 \ X_2] \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Es decir: 
$$V(X) = e_{11} X_1^2 + 2 e_{12} X_1 X_2 + e_{22} X_2^2$$

fig.11.4:



De acuerdo con el criterio de Sylvester debe cumplirse:

$$e_{11} > 0 ; e_{11} e_{22} - e_{12}^2 > 0$$

## 11.5. TEORÍA DE LIAPUNOV

### 10.5.1.- ESTABILIDAD ASINTÓTICA EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV

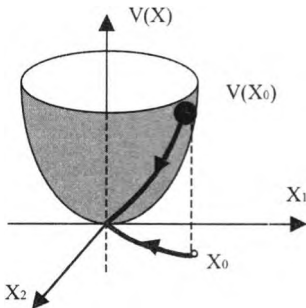
Sea un sistema descrito por un vector de estado  $X$  y consideramos al mismo evolucionando en forma autónoma, es decir con entrada nula.

Si existe una función de Liapunov  $V(X)$  en un recinto  $R$  y su derivada con respecto al tiempo es definida negativa en  $R$ , es decir

$$V'(0) = 0 ; V'(X) < 0 \quad \text{para } X \text{ distinto de cero}$$

podemos concluir que el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov en el recinto  $R$  (localmente asintóticamente estable). Si  $R$  incluye todo el espacio de estado diremos que el sistema es globalmente asintóticamente estable.

fig.11.5:



Efectivamente, pues al ser  $V(X)$  definida negativa, la representación de  $V(X)$  en función del tiempo tendrá la forma decreciente que aparece en la figura 11.4 y tenderá a cero al tender el tiempo hacia infinito, lo cual implica que cualquier punto de la superficie  $V(X)$  en el espacio de  $n$  más una dimensiones evoluciona hacia el origen ( $X = 0, V = 0$ ) sobre dicha superficie al tender el tiempo hacia infinito. La proyección de dicho punto sobre el hiperplano de  $n$  dimensiones (espacio de estado) es la trayectoria de estado y tenderá hacia el punto de reposo, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$$

Por tanto, el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

Ver la figura 11.5 para un vector de estado de dos dimensiones

**EJEMPLO 11.4.** En el ejemplo 11.3 se ha obtenido la función de Liapunov:

$$V = X_1^2 + X_2^2$$

Cuya derivada con respecto del tiempo es:

$$V' = 2X_1 X_1' + 2X_2 X_2'$$

Como para el sistema autónomo es:

$$X_1' = X_2 ; X_2' = -X_1 - X_2$$

Sustituyendo:

$$V' = -2X_2^2$$

que es definida negativa, por lo cual el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

### 11.5.2.- INESTABILIDAD

Si la derivada con respecto al tiempo de una función de Liapunov es definida positiva:

$$V'(0) = 0 ; V'(X) > 0 \quad \text{para todo } X \text{ distinto de } 0$$

$V(X)$  es continuamente creciente en función del tiempo por lo que el estado se aleja continuamente del punto de equilibrio  $X = 0$  y el sistema es inestable.

### 11.5.3.- ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV

Sea un sistema descrito por el vector de estado  $X$  y evolucionando autónomamente. Si existe una función de Liapunov  $V(X)$  en un recinto  $R$  y en él su derivada con respecto del tiempo es semidefinida negativa:

$$V'(X) \leq 0 \quad \text{para todo } X \text{ no cero}; \quad V'(0) = 0$$

Podemos concluir que el sistema es estable en el sentido de Liapunov en el recinto  $R$  (localmente estable en el sentido de Liapunov). Si  $R$  incluye todo el espacio de estado diremos que el sistema es globalmente estable en el sentido de Liapunov.

Si  $V'(X)$  es semidefinida negativa  $V(X)$  será no creciente con respecto al tiempo, lo cual implica que el estado no se aleja del punto de reposo en forma significativa. Por tanto la trayectoria de estado quedará encerrada por la proyección sobre el espacio de estado de la intersección de  $V(X)$  con el hiperplano  $V=K$ , en donde  $K$  es un valor igual o superior al máximo de la función de Liapunov para la trayectoria de estado considerada.

**EJEMPLO 11.5.** Para el sistema considerado en el ejemplo 11.2 podríamos emplear la función de Liapunov:

$$V = 4 X_1^2 + X_2^2$$

Su derivada con respecto del tiempo:

$$V' = 8X_1 X_1' + 2 X_2 X_2'$$

Para  $X_1' = X_2$  y  $X_2' = -4X_1$ , resulta  $V' = 0$ , por lo cual podemos deducir que el sistema es estable en el sentido de Liapunov. Nótese que esta función de Liapunov es constante y por tanto no creciente.

## 11.5.4.- SISTEMAS LINEALES

En particular para los sistemas lineales invariantes se puede aplicar la teoría de Liapunov para determinar si un sistema es o no asintóticamente estable mediante el siguiente procedimiento:

Sea  $Q$  una matriz arbitraria pero definida positiva (cumple el criterio de Sylvester). Si la ecuación:

$$A^T E + E A = -Q$$

tiene como única solución una matriz  $E$  definida positiva, el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

En efecto, si suponemos un sistema autónomo  $X' = A \cdot X$  y definimos la función de Liapunov:

$$V = X^T E X$$

en donde  $E$  es definida positiva, su derivada con respecto del tiempo es:

$$V' = X'^T E X + X^T E X'$$

Sustituyendo  $X' = A X$  ;  $X'^T = X^T A^T$  queda:

$$V' = X^T (A^T E + E A) X$$

Si se cumple que  $A^T E + E A = -Q$  en donde  $Q$  es definida positiva, podemos asegurar que  $V'$  es definida negativa y el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

**EJEMPLO 11.6.** Aplicar el anterior criterio al sistema del ejemplo 10.1

Para el sistema autónomo,  $X_1' = X_2$  ;  $X_2' = -2X_1 - 3X_2$

Tomando como matriz arbitraria definida positiva una matriz unidad, planteamos la ecuación:

$$A^T E + E A = -I \quad ; \quad \text{solución, } E = \begin{bmatrix} 3,75 & 0,25 \\ 0,25 & 1,50 \end{bmatrix}$$

Como  $E$  cumple el criterio de Sylvester el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.

### 11.5.5.- CONCLUSIÓN

La teoría de Liapunov desarrollada anteriormente permite efectuar el análisis de la estabilidad del sistema, pero ha de tenerse en cuenta que los teoremas expuestos en 11.5.1 a 11.5.3 dan condiciones suficientes para demostrar que un sistema es asintóticamente estable, inestable o estable en el sentido de Liapunov, respectivamente, y efectivamente, existirá alguna función de Liapunov para cada sistema que permitirá obtener conclusiones sobre su estabilidad, pero el que la derivada de una cierta función de Liapunov no sea definida negativa ni definida positiva ni semidefinida negativa no permite asegurar nada sobre la estabilidad del sistema, es decir, no es condición necesaria que la derivada de una arbitraria función de Liapunov se definida negativa para que el sistema sea asintóticamente estable, pero si  $V'$  es definida negativa será condición suficiente para demostrar la estabilidad asintótica. Si será condición necesaria para que un sistema sea asintóticamente estable el que exista alguna función de Liapunov cuya derivada sea definida negativa. Similar razonamiento se podría hacer para los otros teoremas.

Nótese que una determinada función de Liapunov permitirá sacar o no conclusiones sobre la estabilidad de un sistema según como sea la intersección de  $V = V(X)$  con  $V = cte$ . En relación con la trayectoria de estado del sistema autónomo.

El teorema desarrollado en 11.5.4 si establece una condición necesaria y suficiente para demostrar si un sistema es o no asintóticamente estable en el sentido de Liapunov. Se podría desarrollar una demostración de la necesidad de que cumpla tal teorema para los sistemas lineales e invariantes.



## CAPÍTULO 12

### DISEÑO EN LA DESCRIPCIÓN INTERNA

#### 12.1. OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD

Dado un sistema por las ecuaciones:

$$X' = A X + B u \quad ; \quad Y = C X$$

Nos podemos plantear si partiendo de un cierto estado y aplicando la entrada propia o ley de control, será posible hacer evolucionar al sistema hasta otro estado predeterminado; o si la salida del sistema contiene la información suficiente para conocer en cualquier momento cual es el estado interno del sistema. Es decir, nos interesa conocer si un sistema es controlable y observable.

**EJEMPLO 12.1.** Sea el sistema con una sola entrada y salida:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [2 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

Cuyas ecuaciones de estado y salida son las siguientes:

$$\begin{aligned} X_1' &= -X_1 + u \\ X_2' &= -3X_2 + u \end{aligned}$$

$$X_3' = -2X_3$$

$$X_4' = -1,5X_4$$

$$Y = 2X_1 + X_3$$

Podemos deducir que las variables  $X_2$  y  $X_4$  no están conectadas a la salida y que las variables  $X_3$  y  $X_4$  no están conectada a la entrada. En consecuencia:

$X_1$	es controlable y observable
$X_2$	es controlable pero no observable
$X_3$	no es controlable pero si observable
$X_4$	no es controlable ni observable

Del anterior ejemplo podemos deducir que en un sistema dado en la forma canónica de Jordan es controlable cuando la matriz  $B$  de aplicación de control no tiene ningún  $b_i = 0$  y observable cuando la matriz  $C$  de lectura no tiene ningún elemento igual a cero.

De igual manera, una variable de estado  $X_i$  es controlable si es distinto de cero el elemento  $b_i$  de la matriz de aplicación de control y observable cuando sea  $c_i$ , de la matriz de lectura no nulo.

Nótese que si el sistema está descrito por un vector de estado que no corresponda a la forma canónica de Jordan las anteriores conclusiones no serán aplicables. También se ha supuesto que  $A$  no tiene autovalores múltiples, pues de lo contrario no puede ser diagonal.

Las anteriores conclusiones son fácilmente ampliables a sistemas con varias entradas y varias salidas, de manera que una variable de estado no será controlable cuando no esté conectada a ninguna entrada (su fila correspondiente en  $B$  es nula) y no será observable cuando no esté conectada a ninguna salida (la columna correspondiente de  $C$  es nula).

En caso de que el sistema no esté dado en la forma canónica de Jordan no es difícil pasar a la misma conociendo que los autovalores de  $A$  son los elementos de la diagonal principal de la forma de Jordan y que la correspondiente transformación se puede obtener de los vectores propios de  $A$ .

**EJEMPLO 12.2.** Estudiar la controlabilidad y observabilidad del sistema dado por la matrices:

$$C = [1 \quad 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Planteamos el determinante característico, del que se obtiene la ecuación:

$$L^2 + 3L + 2 = 0$$

cuyas raíces son  $L_1 = -1$  y  $L_2 = -2$ , por tanto:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz de la transformaciones obtiene mediante los autovectores, por lo cual planteamos:

$$AV = LV \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Resulta el sistema de ecuaciones:

$$v_2 = L v_1 \quad ; \quad (3 + L)v_2 = -2v_1$$

Para  $L_1 = -1$  se obtiene:

$$v_{12} = -v_{11} \quad ; \quad 2v_{12} = -2v_{11}$$

Fijando  $v_{11} = 1$  resulta,  $v_{12} = -1$

De igual manera para  $L_2 = -2$  y fijando  $v_{21} = 1$  resulta que  $v_{22} = -2$  y la matriz de la transformación:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de la forma canónica de Jordan:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como comprobación se puede hacer  $\bar{A} = T^{-1} A T$

Dado que tanto  $\bar{B}$  como  $\bar{C}$  no tienen ningún elemento nulo, podemos concluir que el sistema es controlable y observable.

Existe una amplia teoría sobre controlabilidad y observabilidad que permite sistematizar el estudio de las mismas sin necesidad de obtener la forma canónica de Jordan, en la que no entramos por razones obvias.

Es condición necesaria y suficiente para que un sistema monovariable sea controlable y observable el que los polos de la función de transferencia sean distintos de los ceros.

**EJEMPLO 12.3.** Sea un sistema descrito por su función de transferencia:

$$W(s) = \frac{9(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Para obtener la forma canónica de Jordán descomponemos la función de transferencia en fracciones simples:

$$W(s) = \frac{0}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{3}{s+5}$$

Las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} X'_1 &= -X_1 \\ X'_2 &= -2X_2 + u \\ X'_3 &= -5X_3 + u \end{aligned}$$

La ecuación de lectura:

$$Y = 3X_2 - 3X_3$$

Las matrices: 
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tal como se ha planteado la descripción interna mediante la forma canónica de Jordan, la variable  $K_1$  no es ni controlable ni observable, pero falta información en la función de transferencia que permita establecer si  $X_1$  es controlable u observable. Lo que si es evidente es que no es controlable y observable.

## 12.2. REALIMENTACIÓN CON LAS VARIABLES DE ESTADO

La finalidad de un sistema de control es conseguir una determinada forma de evolución, por lo que es primordial la determinación de cual debe ser la entrada  $u$  (ley de control) que permita al sistema evolucionar desde un estado de partida  $X_0$  a otro estado predeterminado  $X$ .

Dado que partiendo de un estado  $X_0$  y aplicando una cierta entrada  $u$ , se puede conocer mediante la función de transición cual será el estado  $X$  al que evoluciona el estado en el instante  $t$ , podemos deducir que nuestro problema de determinar la ley de control puede tener una solución de la forma:

$$u = f(X(t_0), X(t))$$

En el caso concreto que nos interese la reproducción a la salida de una cierta señal  $r$  de referencia, podemos poner:

$$u = f(X, r)$$

Es decir, en cada instante la ley de control es una función del estado y de la señal de referencia en el instante considerado.

Tomaremos como Ley de control la que tiene la forma lineal siguiente:

$$u = K(r - H X)$$

En donde  $K$  es una constante escalar y  $H$  una matriz fila:

$$H = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_n]$$

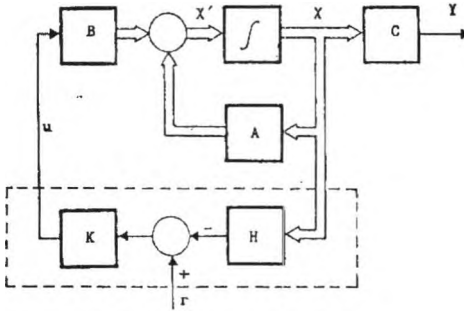
La interpretación de ésta expresión puede hacerse en la figura 12.1, en la que puede apreciarse que una ley de control de esta forma supone el establecer una realimentación con las variables de estado.

**EJEMPLO 12.4.** Aplicar la ley de control dada por:

$$u = r - [0 \quad 1,5]X$$

Las nuevas matrices del sistema son:

Fig.12.1



$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} ; \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nótese que los autovalores de  $A$ , que eran imaginarios puros, son ahora reales y negativos, por lo que el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Liapunov ( anteriormente era oscilante).

### 12.3. DETERMINACIÓN DE LA LEY DE CONTROL

Seguidamente nos referimos a los sistemas monovariantes (con una sola entrada y una sola salida), por lo que podemos partir de una función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

En donde : 
$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

Pretendemos cambiar el anterior polinomio característico a otro con distintos coeficientes:

$$P^*(s) = s^n + a^*_{n-1}s^{n-1} + \dots + a^*_1s + a^*_0$$

Si obtenemos la forma canónica de control, la matriz de evolución tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Y la matriz de aplicación de control :

$$B^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

Entre la ecuación de estado y la Ley de control:

$$X' = A X + B u$$

$$u = K(r - H X)$$

Resulta: 
$$X' = (A - K B H) X + K B r$$

Que ponemos: 
$$X' = A^* X + B^* r$$

Por simplificar podemos poner:  $K = I$ , con lo cual:

$$A^* = A - B H \ ; \ B^* = B$$

La nueva matriz de evolución toma la forma:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + h_1) & -(a_1 + h_2) & \dots & -(a_{n-1} + h_n) \end{bmatrix}$$

Por tanto, los elementos de la última fila de la anterior permiten determinar los de la matriz H:

$$h_i = a^*_{i-1} - a_{i-1}$$

**EJEMPLO 12.5.** Un sistema tiene la función de transferencia:

$$W(s) = \frac{4}{s^2 + s + 1}$$

Se desea transformarla en:

$$W^* = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Para determinar la ley de control hacemos:

$$B^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

Con lo cual:  $u = r - X_1 - 3X_2$

También habrá que hacer:  $C^* = 4C = [4 \quad 0]$

Es decir:  $Y = 4X_1$

**EJEMPLO 12.6.** Supongamos el mismo caso que en el ejemplo anterior, pero las variables de estado accesibles corresponden a la forma dada por las matrices:

$$C = [1 \quad -1]$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Planteamos el determinante característico:

$$\|A - L I\| = L^2 + L + 1$$

Los dos coeficientes de menor grado del anterior polinomio cambiados de signo nos permiten obtener la matriz  $\bar{A}$  de la forma canónica de control:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La cual podíamos haber obtenido también de la función de transferencia del sistema.

Calculamos la transformación  $T$  tal que  $X = T \cdot \bar{X}$ , para lo cual planteamos la ecuación matricial,  $A \cdot T = T \cdot \bar{A}$

Hacemos:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} T_{12} - T_{11} &= -T_{12} \\ T_{22} - T_{12} &= T_{11} - T_{12} \\ -T_{11} &= -T_{22} \\ -T_{12} &= T_{21} - T_{22} \end{aligned}$$

Fijando  $T_{11} = 1$  y  $T_{12} = 1$  resulta:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ley de control:  $u = r - \bar{H} \bar{X}$

Haciendo  $\bar{X} = T^{-1} X$ , podemos poner:

$$u = r - \bar{H} T^{-1} X$$

Es decir:  $H = \bar{H} T^{-1}$

De los resultados del ejemplo anterior obtenemos:

$$H = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

La ley de control:  $u = r - X_1 - 2X_2$

Como en el ejemplo anterior hay que hacer:

$$C^* = 4C \quad ; \quad C^* = [4 \quad -4]$$

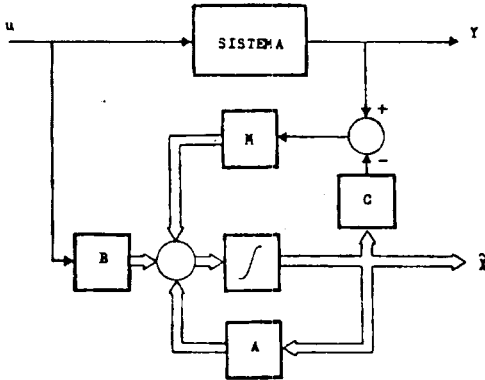
## 12.4. OBSERVADORES

Hemos visto como es posible modificar el comportamiento de un sistema mediante una apropiada ley de control, estableciendo una realimentación con las variables de estado, pero en muchos casos se tropieza con la dificultad de que gran parte del vector de estado no es accesible exteriormente, por lo que es necesario un observador o dispositivo que permita estimar las variables de estado.

Consideremos la figura 12.2 en donde  $M$  es una matriz columna de la forma:

$$M^T = [m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n]$$

Fig.12.2



Para el sistema tenemos:

$$\begin{aligned} X' &= A X + B u \\ Y &= C X \end{aligned}$$

Para el observador:

$$\begin{aligned} \tilde{X}' &= A \tilde{X} + B u + M (Y - \tilde{Y}) \\ \tilde{Y} &= C \tilde{X} \end{aligned}$$

Sustituyendo resulta:

$$\tilde{X}' = (A - M C) \tilde{X} + B u + M C X$$

Designando por  $e = \tilde{X} - X$  y restando de la última igualdad la ecuación de estado queda:

$$e' = (A - M C) e$$

Si los valores de  $A - M C$  tienen su parte real negativa se cumplirá:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$$

Es decir, el error en la observación de las variables de estado tiende a cero al tender el tiempo hacia infinito, lo cual garantiza un buen resultado de la observación aunque el sistema y el observador partan inicialmente de estados distintos.

El dispositivo de estimación del vector de estado considerado anteriormente se denomina observador asintótico u observador de Luenberger.

Supongamos un sistema descrito mediante un vector de estado en la forma canónica de observación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B^T = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] \quad C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

De donde resulta:

$$A - M C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_0 + m_1) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(a_1 + m_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -(a_{n-1} + m_n) \end{bmatrix}$$

La ecuación  $\|A - M C - L I\| = 0$

$$L^n + (a_{n-1} + m_n) L^{n-1} + \dots + (a_1 + m_2) L + (a_0 + m_1) = 0$$

Los valores  $m_i$  se escogen de manera que las raíces de la anterior ecuación sean de parte real negativa.

**EJEMPLO 12.6.** Diseñar un observador para el sistema del ejemplo 12.5.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

La ecuación resultante al igualar a cero el determinante característico del observador:

$$L^2 + (1 + m_2) L + (1 + m_1) = 0$$

Para  $m_1 = 9$  y  $m_2 = 3$  resultan las raíces:

$$L = -2 \pm 2,45 j$$

Nótese que el observador es más rápido que el sistema.

### 12.5. OBSERVADOR DE ORDEN N-1

Dado que siempre podemos tener como mínimo una variable de estado accesible, la salida del sistema, es posible la realización de un observador asintótico de  $n - 1$  variables de estado. Si tomamos un vector de estado de forma que que:

$$X' = A X + B u \quad \text{siendo} \quad X_n = Y$$

Podemos plantear la siguiente ecuación para el observador:

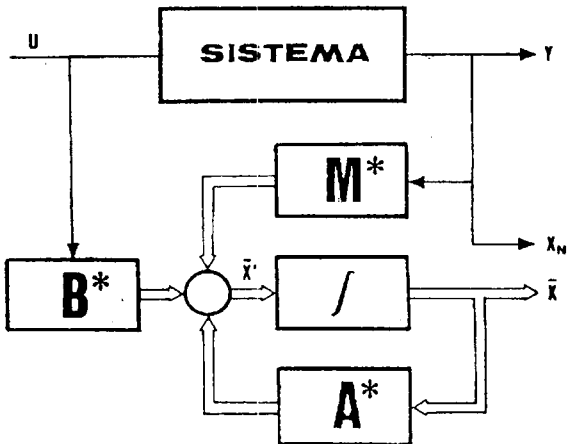
$$\tilde{X}' = A^* \tilde{X} + M^* Y + B^* u$$

En donde  $A^*$  la obtenemos eliminando la última fila y la última columna de  $A$ ,  $B^*$  quitándole la última fila a  $B$  y  $M^*$  es una matriz columna formada por los primeros  $n - 1$  componentes de la última columna de  $A$ .

Es fácil demostrar que éste dispositivo es un observador asintótico si los autovalores de  $A^*$  son de parte real negativa.

Nótese que al formar  $A^*$  quitándole a  $A$  una fila y una columna se obtendrán unos autovalores arbitrarios que pueden hacer que el comportamiento del observador sea inapropiado e incluso inestable.

Fig.12.3



## CAPÍTULO 13 SIMULACIÓN

### 13.1. GENERALIDADES.

La simulación consiste en reproducir, utilizando generalmente un calculador analógico o digital, mediante un modelo apropiado, un sistema que se comporte de manera similar al que tiene el dispositivo que queremos estudiar.

Tradicionalmente, para la simulación de sistemas de control se utilizaban calculadores analógicos que empleaban bloques operativos en los que las magnitudes físicas del sistema considerado se representaban mediante tensiones eléctricas, pero actualmente, este tipo de computadores han caído en desuso por la poca precisión (generalmente los resultados obtenidos en los mismos no poseían más de tres cifras exactas), lo poco manejables que resultaban (se solían programar realizando conexiones con conductores eléctricos enchufables) y en muchas ocasiones necesitaban ciertos ajustes previos, lo cual suponía un evidente engorro.

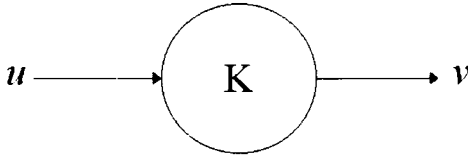
En la actualidad, para la simulación de sistemas de control, se dispone de programas de ordenador que funcionan como los calculadores analógicos, pero no tienen sus inconvenientes. Por esta razón es todavía de utilidad conocer como funcionan estos dispositivos.

### 13.2. UNIDADES OPERACIONALES

Los calculadores analógicos (o los programas que los simulan), pueden disponer de una gran variedad de bloques que realicen muy diversas funciones, pero aquí nos centraremos en los precisos para los sistemas lineales, por lo cual sólo consideraremos cuatro distintos:

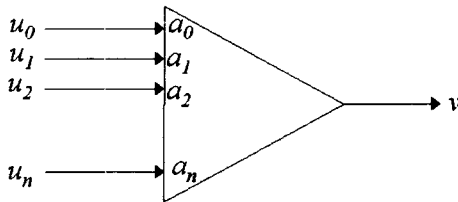
- a) *Multiplicador por una constante.* - Su representación es la que aparece en la figura 13.1. y en los calculadores analógicos tradicionales la constante era menor o igual a la unidad, pues se utilizaba un potenciómetro para realizarlo físicamente. Su salida  $v$  en función de la entrada  $u$  es la dada por la ecuación:

$$v = K \cdot u$$



**Figura 13. Multiplicador.**

b) *Sumadores.*- Su representación simbólica es la que aparece en la figura 13.2., en la que los coeficientes  $a_i$  representan factores de multiplicación de las entradas  $u_i$  (generalmente potencias de 10).

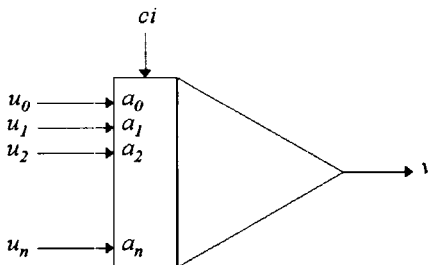


**Figura 13. Sumador.**

En los calculadores tradicionales este dispositivo solía ser inversor, por lo que su salida está dada por la ecuación:

$$v = -(a_0u_0 + a_1u_1 + \dots + a_nu_n)$$

c) *Integradores sumadores.*- Su símbolo es el que aparece en la figura 13.3., disponiendo de entradas  $u_i$  para las señales a integrar, las cuales se afectan por los valores  $a_i$ , normalmente potencias de 10, y de una entrada para dar la condición inicial, que aparece en la parte superior de la figura 13.3.



**Figura 13. Integrador sumador.**

Los integradores solían ser inversores, por lo que la salida puede estar dada por la siguiente ecuación:

$$v = -\int (a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) dt - ci$$

d) *Generadores de funciones.*- Son los bloques encargados de generar las funciones del tiempo necesarias. En la simulación de sistemas de control monovariantes se emplean esencialmente para generar la entrada del sistema.

### 13.3. PROGRAMACIÓN DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

En un calculador analógico se pueden realizar una gran diversidad de tipos de programaciones, pero en este capítulo nos centraremos en las funciones de transferencia. Podemos considerar los dos siguientes casos:

a) *Funciones de transferencia sin ceros.*- Es la forma más sencilla y supone realmente un caso particular del que se expone en el apartado siguiente. Para obtener la programación podríamos proceder como se indica a continuación:

De la función de transferencia se obtiene la correspondiente ecuación diferencial, que queda en la siguiente forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = K u(t)$$

Se despeja la derivada de mayor orden, con lo que la anterior expresión queda de la forma:

$$y^{(n)} = K u(t) - a_{n-1}y^{(n-1)} - \dots - a_1y' - a_0y$$

Se forma una cadena de tantos integradores en cascada como el orden de la ecuación diferencial, haciendo corresponder a la salida de cada integrador una de las derivadas de  $y$  desde  $y^{(n)}$  hasta  $y'$ , siendo la salida del último integrador  $y$ . La entrada del primer integrador se conecta según indica la ecuación anterior, para lo cual es necesario un generador de funciones que nos de  $u(t)$  y los multiplicadores precisos para los coeficientes de  $y$  y sus derivadas.

b) *Funciones de transferencia con ceros.*- Para más información sobre la programación de estas funciones de transferencia pueden consultarse las formas canónicas del vector de estado en el capítulo 10.

Suponemos que la forma de nuestra función de transferencia es la que se indica seguidamente, donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios en la variable  $s$  siendo el grado del numerador menor que el del denominador.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Se consideran tres formas distintas de programación que coinciden con las formas canónicas mencionadas anteriormente:

1) *Forma canónica de control.*- Utilizando la variable auxiliar  $Z(s)$  podemos obtener las expresiones:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{Q(s)} ; Y(s) = P(s) Z(s)$$

La primera ecuación es una función de transferencia sin ceros, por lo que se puede programar por el método descrito anteriormente. La segunda expresión se puede programar mediante un sumador y los correspondientes multiplicadores para los coeficientes de  $P(s)$ .

2) *Forma canónica de observación.*- Se plantea la ecuación:

$$Q(s) Y(s) = P(s) U(s)$$

Se divide por  $s$  elevado al grado de la anterior ecuación, se despeja y se ordena, con lo cual resulta:

$$Y = \frac{1}{s} \{ b_{n-1} U - a_{n-1} Y + \dots + \frac{1}{s} [ b_1 U - a_1 Y + \frac{1}{s} (b_0 U - a_0 Y) ] \dots \}$$

En la anterior expresión se ha supuesto que el grado del numerador de la función de transferencia es  $n-1$  y el grado del denominador  $n$ .

Para la programación se utilizan  $n$  integradores, asociándose cada uno de ellos con un nivel de paréntesis, de manera que la salida de cada uno de ellos es una de las entradas del siguiente, a excepción del primero; las otras entradas de los integradores se conectan a la entrada del sistema y a su salida, que es la salida del último integrador, afectándolas por los correspondientes coeficientes mediante los multiplicadores por constantes necesarios.

3) *Forma canónica de Jordan.*- Se despeja  $Y$ , descomponiendo en fracciones simples, con lo cual resulta:

$$Y = \frac{P(s)U(s)}{Q(s)} = \frac{C_1}{s - p_1}U + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}U$$

Por cada fracción se forma una ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{x}_i = p_i x_i + u$$

Que son fácilmente programables mediante un integrador y un multiplicador por constante.

Por último, se plantea la siguiente ecuación, que se realiza mediante un sumador y  $n$  multiplicadores por constantes:

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

En este proceso de programación hemos supuesto que todas las raíces de  $Q(s)$  son reales y simples.

#### 13.4. ESCALA DE TIEMPO

En algunas ocasiones resulta útil efectuar un escalado de tiempo, para lo cual se establece un coeficiente de relación entre el tiempo en el calculador y el tiempo en el correspondiente sistema físico:

$$\beta = \frac{\tau}{t} = \frac{\text{tiempo en el calculador}}{\text{tiempo en el sistema físico}}$$

Dependiendo de que el factor de escala sea mayor o menor de la unidad el tiempo en el calculador es más lento que en el sistema físico o viceversa.

El escalado de tiempo era muy importante en los calculadores analógicos tradicionales para adecuar la velocidad del proceso de cálculo al elemento de salida del mismo, para que la frecuencia de las señales eléctricas empleadas fuese apropiado al ancho de banda de los amplificadores operacionales y para minimizar el efecto de las derivas, a la que los integradores son muy sensibles.

Para realizar este escalado hay que realizar el siguiente cambio de variable en todas las funciones del tiempo:

$$t = \frac{\tau}{\beta}$$

Las derivadas se refieren a la nueva escala de tiempo mediante el siguiente cambio:

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \beta^n \frac{d^n f}{d\tau^n}$$

### 13.5. ESCALA DE AMPLITUD

La realización de una escala de amplitud era fundamental en los calculadores analógicos tanto para evitar saturaciones en los amplificadores operacionales como para que las señales eléctricas que representaban a las magnitudes físicas fuesen de pequeña amplitud y, por tanto, se perdiese precisión.

En la actualidad, con la utilización de ordenadores, el problema del escalado de amplitud no tiene tanta importancia, pero no por ello deja de tener interés.

Para realizar el escalado de amplitud se parte de un diagrama de programación previo y del valor máximo admisible de salida de las unidades operacionales  $V_m$ . Normalmente se supone que este valor máximo es el mismo para los distintos tipos de unidades.

Se hace corresponder dicho valor máximo con el máximo  $x_m$  de la magnitud física representada por la salida de cada bloque, de manera que para cada uno de ellos se establece un factor de escala de la forma:

$$k_i = \frac{V_m}{x_{im}}$$

Las salidas  $x_i$  de cada bloque se cambian por  $k_i x_i$ , lo cual obliga a realizar algunas modificaciones en las ecuaciones empleadas en la programación, multiplicando y dividiendo por las constantes de escala, lo que nos conduce al nuevo diagrama de bloques con el escalado realizado, en el que se conserva la estructura del antiguo pero en el que han cambiado de valor algunas constantes de los multiplicadores.

### 13.6. EJEMPLOS DE SIMULACIÓN

**EJEMPLO 1º.** Un sistema tiene por función de transferencia:

$$W(S) = \frac{1}{S^3 + 2,9 S^2 + 1,7 S - 0,2}$$

Similarlo utilizando la forma canónica de Jordan para una entrada en escalón y un intervalo de tiempo de 0 a 10 segundos. Suponer que es 10 V la tensión máxima de salida de los amplificadores operacionales.

Descomponemos en fracciones simples:

$$Y(S) = \frac{0,4329004}{S - 0,1} U(S) - \frac{0,9090909}{S + 1} U(S) + \frac{0,4761905}{S + 2} U(S)$$

Para realizar la programación planteamos las siguientes ecuaciones:

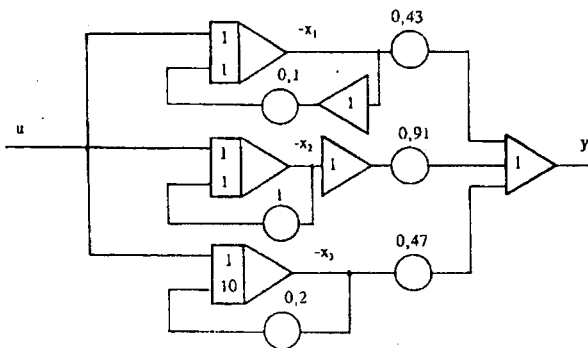
$$\dot{x}_1 = u(t) + 0,1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = u(t) - x_2$$

$$\dot{x}_3 = u(t) - 2 x_3$$

$$y = 0,43 x_1 - 0,91 x_2 + 0,47 x_3$$

Fig.13.1



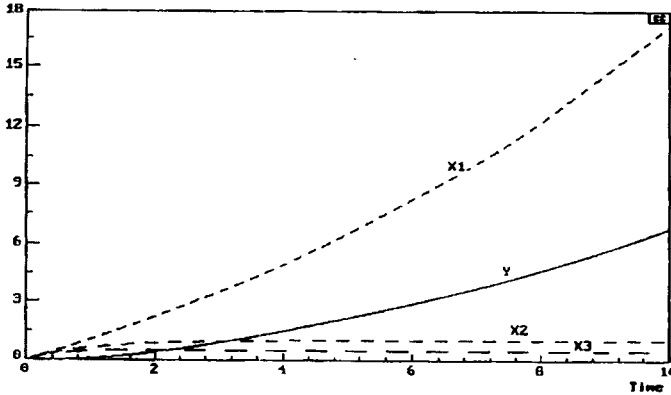
El sistema de ecuaciones nos permite obtener el diagrama de bloques anteriormente representado.

De la anterior programación se puede obtener el siguiente gráfico de respuesta temporal, en el que puede apreciarse que tanto la salida  $y(t)$  como la variable  $x_1$  son continuamente crecientes, lo cual determina que el sistema sea inestable, como podría predecirse al haber un polo real y positivo.

El gráfico se ha trazado para el intervalo establecido de 0 a 10 segundos y de él se obtienen los valores máximos que se indican:

$$\begin{aligned} x_{1m} &= 17,183 \\ x_{2m} &= 1,0 \\ x_{3m} &= 0,5 \\ y_m &= 6,767 \end{aligned}$$

Fig.13.2



Calculamos las constantes para el escalado dividiendo la tensión máxima de salida de los amplificadores operacionales por los correspondientes valores máximos:

$$\begin{aligned} K_y &= 1,4 \\ K_{x_1} &= 0,5 \\ K_{x_2} &= 10 \\ K_{x_3} &= 20 \end{aligned}$$

Las anteriores constantes se han redondeado por defecto en los casos en que ha sido necesario.

Modificamos el sistema de ecuaciones para introducir el escalado:

$$(0,5 \dot{x}_1) = 0,5 u(t) + 0,1(0,5 x_1)$$

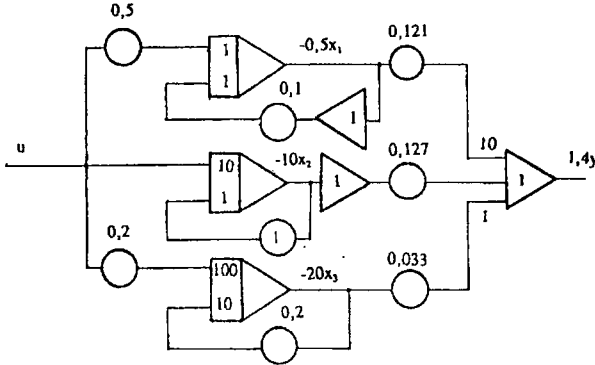
$$(10 \dot{x}_2) = 10 u(t) - (10 x_2)$$

$$(20 \dot{x}_3) = 20 u(t) - 2(20 x_3)$$

$$(1,4 y) = 1,21 (0,5 x_1) - 0,127 (10 x_2) + 0,033 (20 x_3)$$

Estas ecuaciones nos permiten obtener la programación definitiva que se muestra seguidamente:

Fig.13.3



**EJEMPLO 2º.** Programar en un calculador analógico por la forma canónica de observación el sistema dado por la función de transferencia:

$$W(s) = \frac{5s + 20}{s^3 + 5,4s^2 + 6s + 20}$$

Se considerará entrada nula, todas las condiciones iniciales iguales a cuatro y se supondrá que la máxima tensión admisible de los amplificadores operacionales es de 10 V.

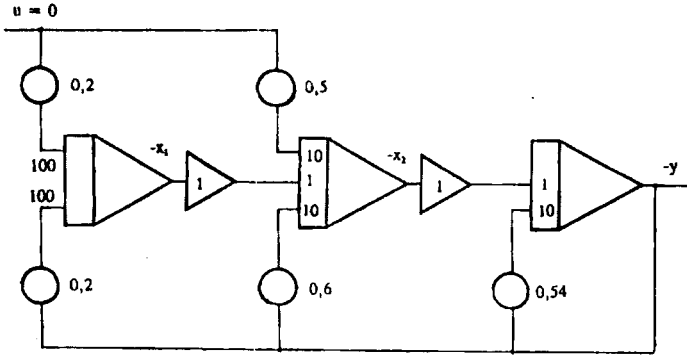
Sustituimos la variable  $s$  por el operador derivada, dividimos por la máxima potencia de  $D$ , en este caso el cubo, y descomponemos en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_1 = 20 u(t) - 20 y$$

$$\dot{x}_2 = 5 u(t) + x_1 - 6 y$$

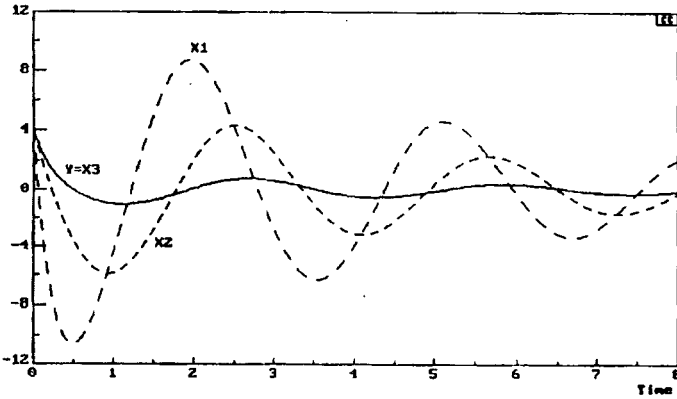
$$\dot{y} = x_2 - 5,4 y$$

Fig.13.4



Mediante el sistema de ecuaciones se puede obtener el diagrama de bloques anteriormente representado y se ha trazado el siguiente gráfico de respuesta temporal, en el que se ha considerado entrada nula y las condiciones iniciales de todos los integradores se han hecho igual a cuatro, como puede apreciarse en el mismo.

Fig.13.5



Los valores máximos de las variables que interesan para el escalado de amplitud son:

$$\begin{aligned}
 x_{1m} &= -10,563 \text{ (mínimo)} \\
 x_{2m} &= -5,923 \text{ (mínimo)} \\
 y_m &= 4 \text{ (valor inicial)}
 \end{aligned}$$

Calculamos las constantes de escala dividiendo la tensión máxima de salida de las unidades operacionales por el valor máximo en valor absoluto que corresponda:

$$K_{x1} = 0,9$$

$$K_{x2} = 1,6$$

$$K_y = 2$$

Las constantes anteriores se han redondeado por defecto y con ellas podemos modificar el sistema de ecuaciones diferenciales de esta programación para efectuar el escalado en amplitud:

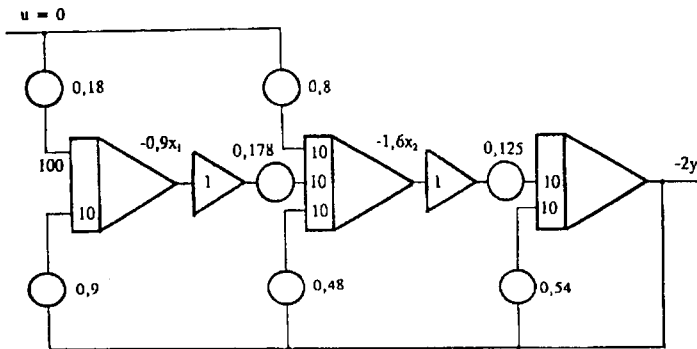
$$(0,9 \dot{x}_1) = 18 u(t) - 9(2 y)$$

$$(1,6 \dot{x}_2) = 8 u(t) + 1,78(0,9 x_1) - 4,8(2 y)$$

$$(2 \dot{y}) = 1,25(1,6 x_2) - 5,4(2 y)$$

Estas ecuaciones nos permiten obtener la programación definitiva que aparece seguidamente:

Fig.13.6





## CAPÍTULO 14 SISTEMAS NO LINEALES

### 14.1. LINEALIZACIÓN

Sea el sistema autónomo dado por la ecuación de estado:

$$\dot{X} = F(X)$$

En donde la función  $F$  es no lineal.

Consideremos el punto  $x_0$  en cuyo entorno queremos linealizar el sistema, para lo cual podemos plantear la siguiente serie de Taylor:

$$\dot{X} = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{x_0} (X - X_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \right]_{x_0} (X - X_0)^2 + \dots$$

Suponiendo que la diferencia  $x - x_0$  es pequeña se pueden despreciar los sumandos de orden superior al primero, por lo que podríamos poner:

$$\dot{X} = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{x_0} (X - X_0)$$

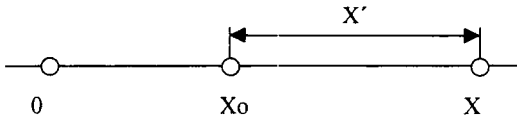
En el caso de que  $x_0$  sea un equilibrio, se cumplirá que  $F(x_0) = 0$ , con lo que la anterior expresión toma la forma:

$$\dot{X} = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{x_0} (X - X_0)$$

Para el caso particular de que  $x_0$  sea el origen de coordenadas, es decir,  $x_0 = 0$ , tenemos:

$$\dot{X} = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{x_0=0} X$$

Fig.14.1:



En el caso de que nuestro equilibrio no esté en el origen, podemos hacer una traslación de manera que el origen quede en el equilibrio considerado, para lo cual haremos:

$$x = x_0 + x^*$$

Sustituyendo queda:

$$\left. \frac{d(X_0 + X^*)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{x_0} X^*$$

Como la derivada de  $x_0$  con respecto al tiempo es cero, la anterior ecuación la podemos escribir:

$$\left. \frac{d(X^*)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X} \right]_{x_0} X^*$$

En el caso concreto de que nuestro sistema sea de dimensión  $n$ , las ecuaciones de estado las podemos poner:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \dot{X}_2 &= F_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= F_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Al aplicar la linealización en el equilibrio  $x_0$  podemos plantear la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}_{x_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Que abreviadamente se puede poner:

$$\dot{x} = J_{x_0} \cdot x$$

A la matriz  $J$  se le denomina jacobiano y debe estar particularizada para un equilibrio. El vector de estado  $x$  debe estar referida al equilibrio  $x_0$  como origen.

## 14.2. ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA EN EL PLANO DE FASE

Para realizar este estudio se parte de los equilibrios para el sistema autónomo, es decir con entrada nula.

### 14.2.1.- EQUILIBRIOS

Los podemos definir como aquellos estados en los que el sistema permanece indefinidamente al aplicar una entrada nula, es decir:

$$X = \text{constante} \quad ; \quad X' = 0$$

Para un sistema lineal dado por:

$$X' = A X$$

Resulta ser el equilibrio:

$$X = 0$$

Es decir, en los sistemas lineales el único punto de equilibrio es el origen, es decir  $X=0$ .

En los sistemas no lineales autónomos dados por la siguiente ecuación:

$$X' = F(X)$$

Los equilibrios los determinaremos resolviendo la ecuación no lineal:

$$F(X) = 0$$

De la cual, en general, se podrán obtener varias soluciones. El origen  $X=0$  es, normalmente, también un equilibrio en los sistemas no lineales.

El comportamiento de un sistema se puede determinar estudiándolo en el entorno de sus equilibrios.

#### 14.2.2.- SISTEMAS LINEALES

Al existir solamente un equilibrio, el origen, y dada la naturaleza de estos sistemas, las conclusiones que se obtengan para el entorno de dicho único equilibrio se pueden extender a todo el espacio de estado.

Los autovalores de la matriz de evolución  $A$ , es decir, las soluciones de la ecuación característica, nos permiten conocer su comportamiento:

$$\Delta(A - \lambda I) = 0$$

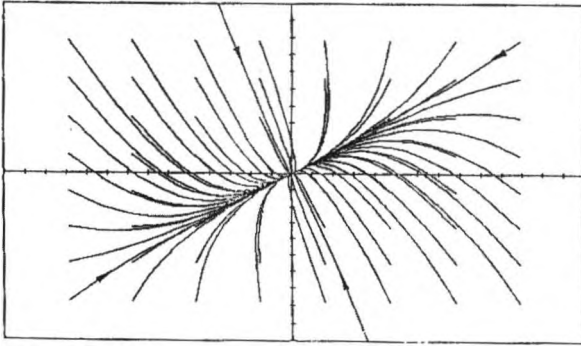
Para el caso de los sistemas bidimensionales podemos considerar los siguientes casos:

1.- *Autovalores de parte real negativos.*- El equilibrio es estable y se obtiene lo que se denomina un atractor puntual, es decir, todas las trayectorias de estado tienden hacia el equilibrio.

Se pueden considerar dos casos en los que la forma de las trayectorias es distinta:

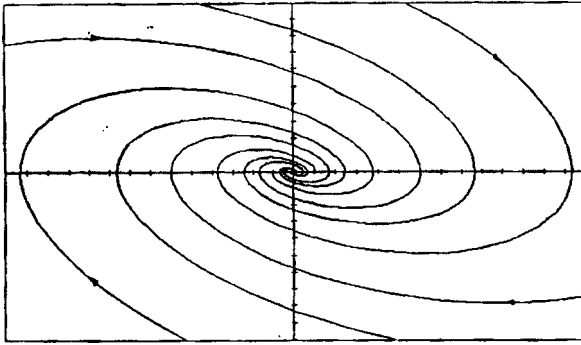
1.1.- Autovalores reales y negativos (figura 14.2.).

fig.14.2:



1.2.- Autovalores complejos conjugados de parte real negativa (figura 14.3.).

fig.14.3:

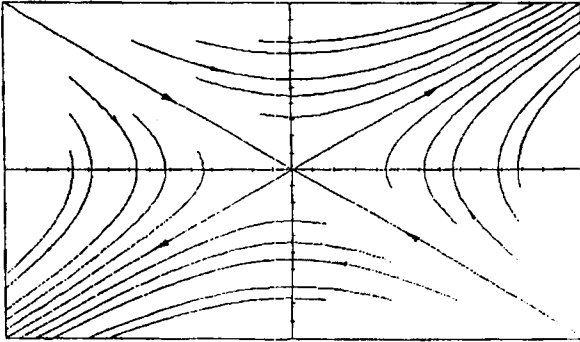


2.- *Algún autovalor es de parte real positiva.*- El equilibrio es inestable.

Se pueden considerar tres casos:

2.1.- Autovalores reales, uno positivo y otro negativo.- Se tiene en este caso un punto de silla o ensilladura. Todas las trayectorias se alejan del equilibrio a excepción de dos (figura 14.4.).

fig.14.4:



2.2.- Los dos autovalores son reales y positivos.- Se tiene un repulsor, alejándose del equilibrio todas las trayectorias.

En las figuras 14.5. y 14.6. se han representado dos casos de autovalores reales y positivos.

La figura 14.5. tiene los autovectores coincidentes con los ejes.

La figura 14.6. tiene los autovectores en el primero y tercer cuadrantes.

fig.14.5:

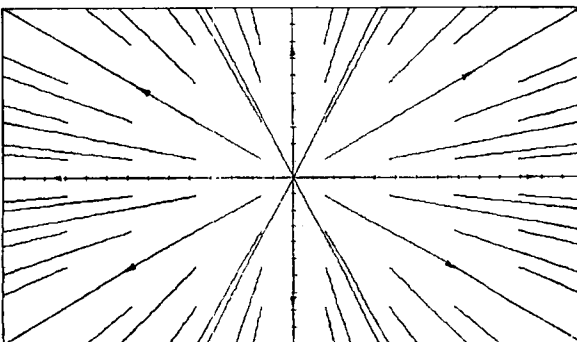
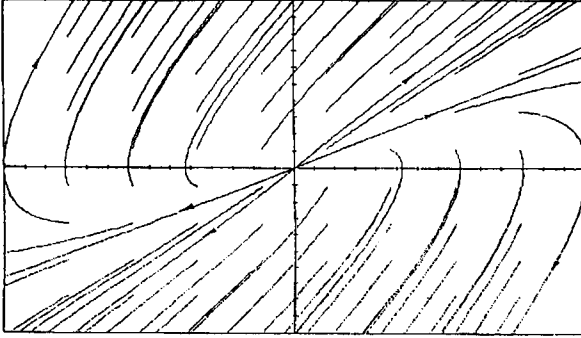
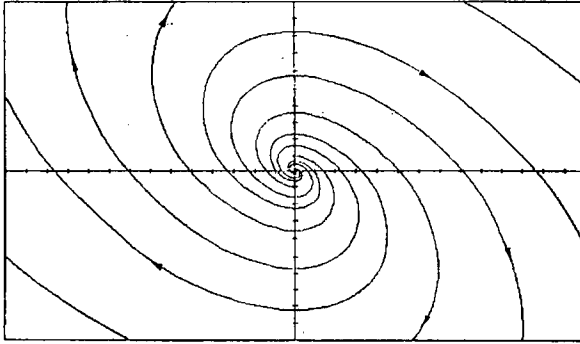


fig.14.6:



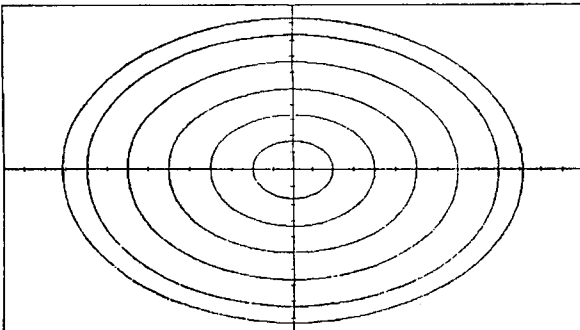
2.3.- Autovalores complejos de parte real positiva.- Se tiene un repulsor, alejándose del equilibrio todas las trayectorias (figura 14.7.).

fig.14.7:



3.- Autovalores imaginarios puros.- Las trayectorias son cerradas y ni parten ni llegan al equilibrio. El sistema es oscilante (estable en el sentido de Liapunov), produciéndose oscilaciones mantenidas cuya amplitud depende de las condiciones iniciales. En este caso se dice que existe un centro (figura 14.8.).

fig.14.8:



### 14.2.3.- SISTEMAS NO LINEALES

En los sistemas no lineales pueden aparecer varios equilibrios y el comportamiento puede variar de forma considerable dependiendo en que zona del espacio de estado nos encontremos. Aparecen separatrices que delimitan las distintas zonas de comportamiento.

Para estudiar el espacio de estado de un sistema no lineal se procede a su linealización en cada equilibrio y se calculan los autovalores del jacobiano particularizado en cada uno de dichos puntos:

$$\Delta(A - \lambda I) = 0$$

Las conclusiones de la linealización solo podemos aplicarlas con seguridad en un reducido entorno del equilibrio, pues pueden aparecer comportamientos marcadamente diferentes de los sistemas lineales, tales como ciclos límites, órbitas inestables, atractores extraños, comportamientos cuasiperiódicos, etc.

Para completar el esbozo del espacio de estado puede ser de gran utilidad el determinar los autovectores del jacobiano:

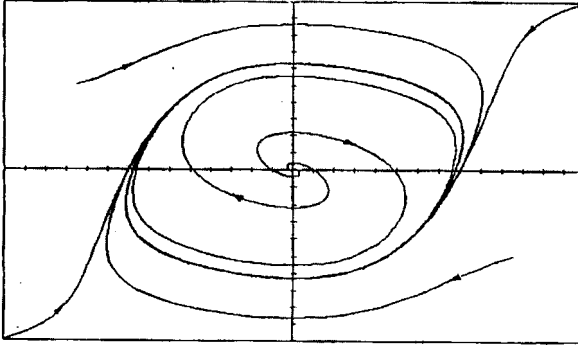
$$(J - \lambda I)U = 0$$

En las siguientes figuras se han representado algunos de los comportamientos que pueden aparecer en sistemas no lineales:

A) Ciclo límite.- Aparece una trayectoria cerrada hacia la que tienden asintóticamente todas las trayectorias de su zona de influencia.- El caso representado corresponde al sistema de Vanderpol, en el que se han trazado seis trayectorias de las que cuatro son exteriores al ciclo límite y otras dos interiores. En la linealización en el entorno del correspondiente equilibrio se obtiene un repulsor (fuente) normalmente asociado a autovalores complejos de parte real positiva (figura 14.9.)

La determinación para la existencia de ciclo límite no se puede asegurar con la sola linealización en el entorno del correspondiente equilibrio.

fig.14.9:



B) Atractores extraños.- En estos se obtienen comportamientos oscilantes (estables en el sentido de Liapunov), pero las formas de onda no son periódicas. Aparecen solamente en sistemas de orden superior al segundo.

Los atractores extraños suelen ir asociados a repulsores cuando se efectúa la linealización correspondiente y suelen aparecer autovalores complejos de parte real positiva. El determinar si se presenta un comportamiento de este tipo o no puede ser difícil.

En las figuras 14.10. y 14.11. se han representado los atractores de Lorenz y de Rossler respectivamente.

fig.14.10:

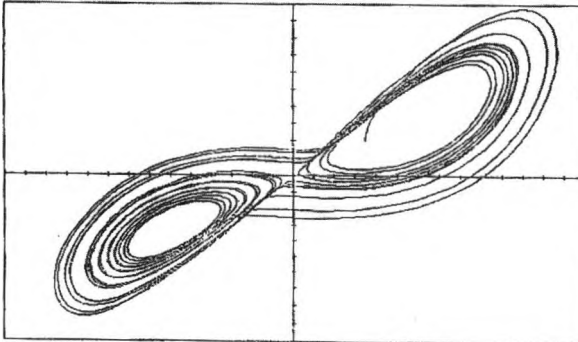
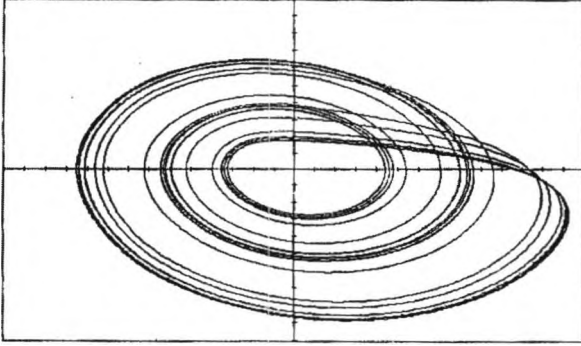


fig.14.11



### 14.3. EJEMPLOS

**EJEMPLO 1°.** Un sistema no lineal de segundo orden está dado por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}x' &= 2x^2 + y \\ y' &= 4x - y^3\end{aligned}$$

Para poder analizar este sistema procedemos a su linealización, calculando el correspondiente jacobiano:

$$J = D_x F(x) = \begin{bmatrix} 4x & 1 \\ 4 & -3y^2 \end{bmatrix}$$

Para determinar los equilibrios planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}2x^2 + y &= 0 \\ 4x - y^3 &= 0\end{aligned}$$

Se obtienen los puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned}P_1 : & \quad x = 0 \quad ; \quad y = 0 \\ P_2 : & \quad x = -0,87 \quad ; \quad y = -1,52\end{aligned}$$

Para los anteriores puntos se obtienen los siguientes jacobianos:

$$\begin{aligned}J_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \\ J_2 &= \begin{bmatrix} -3,48 & 1 \\ 4 & -6,89 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para determinar los autovalores planteamos la ecuación característica:

$$\Delta(J - \lambda I) = 0$$

Autovalores:

$$J_1 \rightarrow \lambda_1 = 2 ; \lambda_2 = -2$$

$$J_2 \rightarrow \lambda_1 = -2,55 ; \lambda_2 = -7,81$$

Resulta ser  $P_1$  una ensilladura y  $P_2$  un atractor puntual.

Para calcular los autovectores planteamos:

$$(J - \lambda I)U = 0$$

Para  $J_1$  y el autovalor 2 resulta:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para  $J_1$  y el autovalor  $-2$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para  $J_2$  y el autovalor  $-2,55$ :

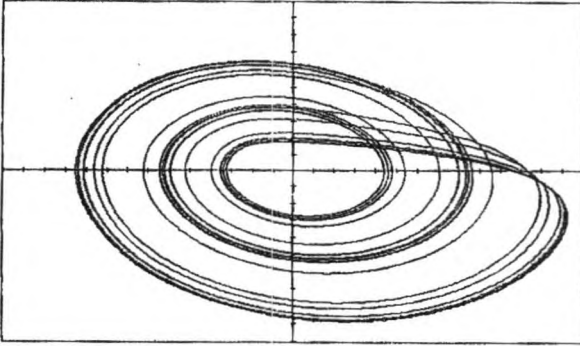
$$\begin{bmatrix} -0,93 & 1 \\ 4 & -4,34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,93 \end{bmatrix}$$

Para  $J_2$  y el autovalor  $-7,81$ :

$$\begin{bmatrix} 4,33 & 1 \\ 4 & 0,92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -4,33 \end{bmatrix}$$

Para los anteriores resultados se obtiene el siguiente gráfico de la figura 14.12.

fig.14.11



**EJEMPLO 2º.** Un sistema autónomo de segundo orden está dado por las siguientes ecuaciones de estado:

$$x' = -x^3 - 2x^2 + 9x - xy$$

$$y' = xy - 2y$$

El jacobiano para este sistema es:

$$J = \begin{bmatrix} -3x^2 - 4x + 9 - y & -x \\ y & x - 2 \end{bmatrix}$$

Resultan cuatro equilibrios, que se resumen en la siguiente tabla:

Punto	Tipo	X	Y	autovalor	$U_x$	$U_y$
P <sub>1</sub>	Punto de silla	0	0	9	1	0
				-2	0	1
P <sub>2</sub>	Atractor puntual	2	1	-0,169	0,169	1
				-11,831	-11,831	1
P <sub>3</sub>	Punto de silla	2,162	0	0,162	1	-6,40
				-13,671	1	0
P <sub>4</sub>	Atractor puntual	-4,16	0	-26,319	1	0
				-6,162	1	4,843

Los cuadrantes 1º, 2º y 3º corresponden a zona estable y el 4º es zona inestable, es decir, las trayectorias tienden hacia el infinito. El eje  $y$  es la separatriz de los dos atractores puntuales, de manera que el primer cuadrante es la zona de influencia del atractor asociado a  $P_2$  y el segundo y tercer cuadrantes corresponden a la cuenca de atracción de  $P_4$ .





*Este libro se terminó de imprimir el 9 de mayo de 2004,  
cincuenta y cuatro años después del fallecimiento de  
Esteban Terradas, ingeniero y físico español.*



Universidad  
de Cádiz

Servicio de Publicaciones  
2004

ISBN 84-96274-16-0



9 788496 274167