Mecánica de Fluidos II
Práctica 1: Problema Condiciones Iniciales

2 y 9 de Marzo de 2023

1. Hallar la solución analítica del siguiente problema de condiciones iniciales, donde k es una constante: (0,06 %)

$$u'(t) = -ku(t), \quad u(0) = 1.$$

2. Calcular la solución numérica con un esquema Euler[1] hasta $t = 3$ para $\Delta t = 0,01$, $\Delta t = 0,1$ y $\Delta t = 1$ y $k = 1$ y $k = 10$. Mostrar una gráfica con las tres soluciones más la analítica. Calcular el error relativo $E_r = abs((u_{num} - u_{ana})/u_{ana})$ en $t = 1$ para los tres casos. (0,3 %)

3. Calcular la solución numérica con un esquema Euler implicito[2] hasta $t = 3$ para $\Delta t = 0,01$, $\Delta t = 0,1$ y $\Delta t = 1$ y $k = 1$ y $k = 10$. Mostrar una gráfica con las tres soluciones más la analítica. Calcular el error relativo $E_r = abs((u_{num} - u_{ana})/u_{ana})$ en $t = 1$ para los tres casos. (0,3 %)

4. Convertir el siguiente problema de condiciones iniciales de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones de primer orden para luego calcular la solución numérica con un esquema Euler hasta $t = 6,28$ para $\Delta t = 0,01$. Mostrar en una gráfica la solución de la ecuación inicial. (0,5 %)

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

5. Resolver el mismo problema anterior con un esquema Runge-Kutta de segundo orden[3] y comparar el error relativo en $t = 6,28$. (0,5 %)

[1] Euler: $u^{n+1} = u^n + F(u^n, t_n)\Delta t$

[2] Euler: $u^{n+1} = u^n + F(u^{n+1}, t_{n+1})\Delta t$

[3] RK2: $k_1 = F(u^n, t_n)$, $k_2 = F(u^n + \Delta t k_1, t_{n+1})$ y $u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t(k_1+k_2)}{2}$

Mecánica de Fluidos II
Práctica 2: Método del disparo y Capa límite de Blasius

16 y 23 de Marzo de 2023

1. Dada la siguiente parábola:

$$y = x^2 - 3x + 2$$

Hallar analíticamente los dos puntos de corte con el eje x haciendo $y = 0$. (0,06 %)

2. Para la parábola anterior, hallar uno de esos puntos de corte usando un método de Newton[1] con el valor supuesto $\lambda^0 = 0{,}9$ haciendo uso de que se conoce la derivada de la función. Dar el valor obtenido tras 2 iteraciones del método. Hacer el mismo ejercicio usando el método de Newton pero ahora con las valores supuestos $\lambda^0 = 0{,}9$ y $\lambda^1 = 1{,}1$ y sin usar el valor de la derivada de la función (método de la secante[2]). Dar el valor obtenido tras 4 iteraciones del método, sin contar λ^1 como una iteración. Probar el método con $\lambda^0 = 1{,}8$ y $\lambda^1 = 2{,}2$ y comparar los resultados. (0,25 %)

3. Dado el problema del disparo de un cañon por las siguientes ecuaciones:

$$x'' = 0; \quad y'' = -9{,}81; \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad x(\tau) = 1 \quad y(\tau) = 0$$

Donde x e y son las coordenadas horizontal y vertical. El cañon está situado en el punto $(0, 0)$ y el objetivo en $(1, 0)$ que se alcanza en un instante τ que no es dado ni importante. La velocidad de salida del cañon es $v = 10$ y se desea saber el ángulo de disparo necesario. Hay que tener en cuenta que $x'(0) = v\cos(\theta)$ y $y'(0) = v\sin(\theta)$. Primero convertir este sistema de dos ecuaciones de segundo orden en un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden. Utilizando un método basado en un esquema Euler o Runge-Kutta orden dos[3] y un método del disparo a través del método de Newton (método de la secante) e iniciando el método con dos disparos a ángulos de $\theta^0 = 0,03rad$ y $\theta^1 = 0,07rad$. Calcular el número de disparos sucesivos que se necesitan usando el método del disparo para que la diferencia entre el valor del nuevo ángulo hallado y el anterior sea menor de 10^{-6} y el valor de dicho ángulo. Realizar luego el mismo ejercicio usando como valores iniciales del método los valores $\theta^0 = 0,8rad$ y $\theta^1 = 1,2rad$ y comentar el resultado. (0,55 %)

4. Dado el problema de la capa límite de Blasius, convertir el siguiente problema de condiciones de contorno de tercer orden a un sistema de tres ecuaciones de primer orden para luego calcular la solución numérica con un esquema RK2, con un paso espacial $\Delta\eta = 10^{-3}$ (equivalente al paso temporal Δt de otros problemas de condiciones iniciales). Parar el método del disparo (usando el método de la secante) cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas sea menor que 10^{-6} y anotar el número de pasos necesarios en cada caso. Utilizar como aproximaciones $f''(0) = \lambda$: $\lambda^0 = 0{,}1$ y $\lambda^1 = 0{,}5$. Aproximar $\eta \to \infty$ por $\eta = 100$.

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0; \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad \eta \to \infty : \, f' \to 1$$

Al final del calculo, representar $f'(\eta)$ y escribir el valor de $f''(0)$. ¿Qué significa este valor físicamente? (0,8 %)

[1] Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

[2] Secante: $x_{n+1} = x_n - (x_n - x_{n-1}) \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

[3] La precisión del método nos dirá cuanto podemos aproximar la solucion con el método del disparo. Por ejemplo, con un paso de tiempo de $\Delta t = 10^{-4}$ con un método de Euler, no podemos esperar que el método de la secante nos de una solución con una precisión digamos de 10^{-8} , ya que nuestra integración tipo Euler tendrá un error.

Mecánica de Fluidos II
Práctica 3: Derivadas parciales y transferencia de calor (ecuaciones parabólicas)

30 de Marzo y 13 de Abril de 2023

1. Calcular la primera y segunda derivada de la función (0,06 %):

$$f(x) = \sin(x)$$

2. Para la función anterior, aproximar $f'(x)$ en $x = 0{,}5$ usando diferencias finitas avanzadas[1] y diferencias finitas centradas[2]. Representar el error cometido frente a Δx para valores de Δx espaciados logaritmicamente entre 10^{-7} y 0,1. Repetir el ejercicio para f'', usando diferencias finitas centradas de segundo[3] y cuarto[4] orden. (0,25 %)

3. Dado el siguiente problema de transferencia de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{1}$$

sujeto a las condiciones de contorno $T(0,t) = 0$, $T(1,t) = 0$, y a la condición inicial $T(x,0) = \sin(\pi x)$, calcular la solución exacta $T(x,t)$ para $0 < x < 1$, $t > 0$. (0.1 %)

4. Escribir un método Euler explícito para resolver el problema con $\kappa = 1$. Aproximar las derivadas en el espacio mediante diferencias finitas centradas de segundo orden. Resolver numéricamente la ecuación para $\Delta x = 0{,}1$ y $0{,}01$, teniendo en cuenta que el paso en el tiempo debe ser $\Delta t < \Delta x^2/[2\kappa]$ para que el método sea estable. Medir el error L_2[5] en $t = 1$. ¿Cuáles son los pasos máximos de tiempo para que el método sea estable para cada Δx? (0,65 %)

5. Cambiar la condición de contorno a $T(1,t) = 1$, y la condición inicial a $T(x,0) = x^2 + \sin(\pi x)$. Resolver la ecuación numéricamente usando el método de Euler explicito para un $\Delta x = 0{,}05$ y un Δt estable. (0,6 %)

[1] $f'(x) \approx [f(x+\Delta x) - f(x)]/\Delta x$

[2] $f'(x) \approx [f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)]/(2\Delta x)$

[3] $f''(x) \approx [f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)]/\Delta x^2$

[4] $f''(x) \approx [-f(x+2\Delta x) + 16f(x+\Delta x) - 30f(x) + 16f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)]/(12\Delta x^2)$

[5] El error L_2 viene dado por $\int_0^1 (f_{num} - f_{ana})^2 dx$, siendo f_{num} la solución numérica, y f_{ana} la solución analítica. Se puede aproximar de manera numérica como $\sum_i (f^i_{num} - f^i_{ana})^2 \Delta x$.

Mecánica de Fluidos II
Práctica 4: Transferencia de calor implícita y ecuaciones caóticas

21 y 28 de Abril de 2023

1. Dado el siguiente problema de transferencia de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{1}$$

sujeto a las condiciones de contorno $T(0,t) = 0$, $T(1,t) = 0$, y a la condición inicial $T(x,0) = \sin(\pi x)$, usar un método Euler implícito[1] y un método Crank-Nicolson[2] para resolver el sistema con $\kappa = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $0{,}01$ y $0{,}001$, y medir el error L_2 para los pasos de tiempo $\Delta t = 0{,}1$ y $0{,}01$ en $t = 0{,}3$. Comparar la estabilidad del método con el caso explícito. Comentar cuáles son las dos fuentes de error, y como disminuir el error de la integración. (0,7 %)

2. Simular el sistema de Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \tag{2}$$
$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \tag{3}$$
$$\dot{z} = xy - \beta z \tag{4}$$

con $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$, y una condición inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ usando un método Euler con un paso $\Delta t = 10^{-4}$.

a. Representar la señal $x(t)$ frente al tiempo para $0 < t < 50$.

b. Representar la trayectoria del sistema en el plano (x, z).

c. Calcular la función de densidad de probabilidad[3] de x para $0 < t < 100$, $30 < t < 100$, $30 < t < 500$ y $30 < t < 1000$.

d. Si cambiamos la condición inicial a $x = 1{,}001$, qué pasa? Repetir los tres apartados anteriores.

Total: (0,5 %)

3. Repetir el ejercicio anterior usando un método RK2, y comentar como cambian los resultados. Explicar la dificultad de medir el error en un sistema caótico usando $x(t)$ (0,4 %)

[1] $u^{n+1} = u^n + \Delta t F(u^{n+1}, t_{n+1}$

[2] $u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2}[F(u^{n+1}, t_{n+1}) + F(u^n, t_n)]$

[3] Esto se hace con un histograma normalizado con un número adecuado de intervalos.

Mecánica de Fluidos II
Práctica 5: Ecuaciones Elípticas: soluciones directas e iterativas

5 y 12 de Mayo de 2023

1. Dada la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = f$ en dos dimensiones, con término

$$f = \sin(\pi x)\cos(\pi y) + \sin(5\pi x)\cos(5\pi y) \tag{1}$$

definida en el dominio $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ y sujeto a las condiciones de contorno $\phi = 0$ en las fronteras ($x = 0$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$), demostrar que la solución del problema viene dada por:

$$\phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x)\cos(\pi y) - \frac{1}{50\pi^2}\sin(5\pi x)\cos(5\pi y). \tag{2}$$

Para ello comprobar que la solución cumple las condiciones de contorno, y que la solución cumple la ecuación diferencial. (0.3 %)

2. Resolver la ecuación usando un esquema de segundo orden usando pasos iguales en las dos direcciones[1], y medir el error L_2. Comenzar con $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0{,}1$, y disminuir progresivamente a $\Delta = 10^{-2}$, 10^{-3}, etc. hasta que sea imposible resolver la ecuación por limitaciones de memoria. Representar el error frente a Δ y dar el paso mínimo que puede resolver el ordenador sin quedarse sin memoria. Representar la solución gráficamente para este paso mínimo. (0.66 %)

3. Implementar el método iterativo de Jacobi[2] para resolver el problema discreto. Para ello, parar el método cuando se alcance una diferencia entre las dos soluciones menor a una tolerancia, o se alcance un número máximo de iteraciones. Probar el método con $\phi^0 = 0$ y $\Delta = 0{,}1$, y representar el residuo y el error frente al número de pasos hasta que el residuo baje de 10^{-8}. Medir el error L_2 y comentar la diferencia entre residuo y error. (0,4 %)

4. Usando el método iterativo de Jacobi implementado antes, refinar la discretización de manera progresiva disminuyendo Δ, hasta que alcancemos un valor menor al que no podíamos resolver con el método directo. Resolver el problema para este, y varios Δ más, asegurandose que para cada método, el residuo es menor que 10^{-8}. Medir el error L_2. Representar la solución gráficamente. (0.26 %)

[1] Para pasos en x e y iguales, $\nabla^2\phi = 1/\Delta^2(\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} - 4\phi_{i,j})$

[2] $\phi^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{4}(\phi^n_{i-1,j} + \phi^n_{i+1,j} + \phi^n_{i,j-1} + \phi^n_{i,j+1}) - \frac{1}{4}f_{i,j}\Delta^2$

Mecánica de Fluidos II
Práctica 6: Ecuaciones Hiperbólicas (ecuación de advección)

19 y 26 de Mayo de 2023

1. Dada la ecuación de la advección en una dimensión:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

siendo a una constante con $a > 0$, y f una función del tiempo y de la coordenada x, $f = f(x, t)$, mostrar que $f(x - at, 0)$ es una solución exacta de la ecuación, es decir, que la ecuación transporta con velocidad a la condición inicial $f_0(x)$ en el espacio. (0.2 %)

2. Se va a resolver la ecuación numéricamente en el dominio $(0, 1)$ tomando $a = 1$, condiciones de contorno periódicas[1] y como condicion inicial $f_0(x) = \exp[-(x - 0{,}5)^2]$. Para ello, primero implementar un esquema “upwind”[2], tomar el paso en el espacio como $\Delta x = 0{,}05$, y variar el número de Courant $C = a\Delta t/\Delta x$ entre $C = 0{,}1$, $C = 0{,}5$, $C = 1$ y $C = 1{,}2$. Mostrar como el esquema se vuelve inestable para $C > 1$. Para los casos estables, representar la soluciónes junto a la solución exacta y medir el error L_2 en $t = 4$. Luego cambiar el paso en el espacio a $\Delta x = 0{,}01$, y repetir: representar la solución en $t = 4$, y medir el error L_2 para los mismos valores de C. (0.5 %)

3. Cambiar el esquema upwind por uno FCTS[3] e intentar resolver las ecuaciones para un paso en el espacio $\Delta x = 0{,}05$ con $C = 0{,}1$. ¿Qué ocurre con la solución? ¿Hay algún valor de C que estabilice el método? (0.2 %)

4. Cambiar el esquema upwind por un esquema Lax-Wendroff[4], y repetir el ejercicio 2. (0.4 %)

5. Ahora se va a cambiar las condiciones iniciales por una onda cuadrada definida como:

$$g_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \le x < 0{,}25 \\ 1 \text{ si } 0{,}25 \le x < 0{,}75 \\ 0 \text{ si } 0{,}75 \le x < 1 \end{cases} \tag{2}$$

Se pide resolver numéricamente la ecuación con la nueva condición inicial para para $\Delta x = 0{,}01$ y $\Delta x = 0{,}025$ usando los métodos upwind y Lax-Wendroff. Elegir Δt para que $C = 0{,}5$, y representar la solución exacta frente a la solución numerica en $t = 1$. ¿Qué tipo de errores se ven para cada método? ¿Cómo se podrían limitar estos errores para el método Lax-Wendroff? (0.4 %)

---

[1] Esto quiere decir que $f(0, t) = f(1, t)$

[2] $f_i^{n+1} = f_i^n - a\Delta t/\Delta x(f_i^n - f_{i-1}^n)$

[3] $f_i^{n+1} = f_i^n - a\Delta t/[2\Delta x](f_{i+1}^n - f_{i-1}^n)$

[4] $f_i^{n+1} = f_i^n - a\Delta t/[2\Delta x](f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + a^2\Delta t^2/[2\Delta x^2](f_{i+1}^n - 2f_{i+1}^n + f_{i-1}^n)$